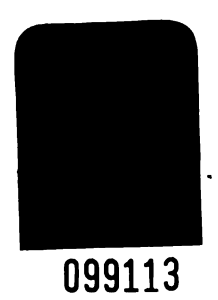
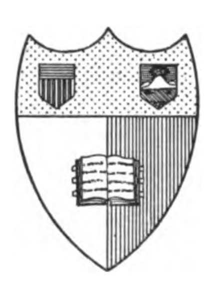
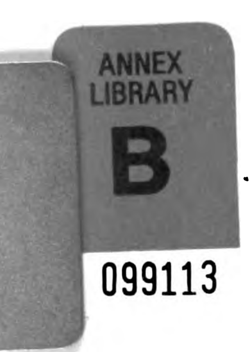
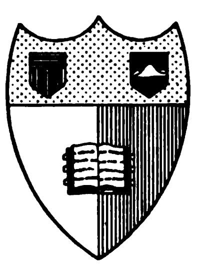









ANNEX
LIBRARY
B
099113



Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben
von
Dr.-Ing. W. Rogowski
Charlottenburg

Schriftleitung: i. V. Prof. Dr. E. Orlich, Charlottenburg

VI. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1918

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Namenverzeichnis.

Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 1. u. 2. Heft. 1917.

Über die graphische Darstellung des Wechselpotentials und die Lage des Erdpotentials in Drehstromanlagen.

Von

H. Görges, Dresden.

Eine besonders übersichtliche Art, die Spannungen in einem Wechselstromsystem darzustellen, ist die topographische Methode. Soweit man, wie man es in den Anwendungen meist tut, annimmt, daß zwischen zwei Punkten eines Stromkreises eine eindeutige Wechselspannung besteht, kann man auch jedem dieser Punkte ein Wechselpotential zuschreiben und die Spannung als Differenz dieser Potentiale betrachten. Diese Wechselpotentiale kann man nun durch Punkte einer Ebene darstellen, deren Abstand voneinander nach Größe und Richtung die Spannung angibt[1]). Diese Darstellung geht aber noch weiter: sie zeigt, daß zwei Spannungen nur dann identisch sind, wenn sie nicht bloß nach Größe und Phase, sondern auch in den Potentialen miteinander übereinstimmen.

I. Die Grundlage der graphischen Darstellung des Wechselpotentials und die Dreieckskoordinaten.

Eine Spannung P_{ab} werde, Abb. 1, durch die Strecke $\overline{\mathfrak{AB}}$ dargestellt. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ und ziehen die Strecken $\overline{\mathfrak{OA}}$ und $\overline{\mathfrak{OB}}$. Dann ist

$$\overline{\mathfrak{AB}} = \overline{\mathfrak{OB}} \mathbin{\widehat{-}} \overline{\mathfrak{OA}}.$$

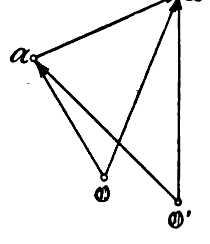


Abb. 1.

Das Zeichen $\widehat{+}$ soll die geometrische Summe, das Zeichen $\widehat{-}$ die geometrische Differenz andeuten. Verlegen wir $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{O}'$, so ist

$$\overline{\mathfrak{AB}} = \overline{\mathfrak{O}'\mathfrak{B}} \mathbin{\widehat{-}} \overline{\mathfrak{O}'\mathfrak{A}}.$$

Es kommt also, wenn man P_{ab} als Differenz zweier Vektoren $\overline{\mathfrak{OB}}$ und $\overline{\mathfrak{OA}}$ darstellen will, nicht auf die Lage des Nullpunktes $\mathfrak{O}$ an. Dieser kann ganz willkürlich gewählt werden. Da es also nur auf die Lage der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ankommt, lassen wir Punkt $\mathfrak{O}$ und die Vektoren $\overline{\mathfrak{OA}}$ und $\overline{\mathfrak{OB}}$ in der Zeichnung weg und schreiben statt $\overline{\mathfrak{OA}}$ und $\overline{\mathfrak{OB}}$ einfach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Demnach ist

$$P_{ab} = \overline{\mathfrak{AB}} = \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{-}} \mathfrak{A}. \quad \text{1)}$$

Die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind in graphischer Darstellung die Potentiale der Punkte des Systems, zwischen denen die Spannung $\overline{\mathfrak{AB}}$ herrscht. Die Strecke $\overline{\mathfrak{AB}}$ darf nicht ohne weiteres parallel mit sich selbst verschoben werden, denn wenn ein dritter Punkt C des Systems das Potential $\mathfrak{C}$ hat, stellt $\overline{\mathfrak{AC}}$ die Spannung zwischen A und C und $\overline{\mathfrak{BC}}$ die Spannung zwischen B und C dar, Es darf daher im allgemeinen nur die Figur als Ganzes in der Zeichenebene verschoben werden.

[1]) Görges, Über die graphische Darstellung des Wechselpotentials und ihre Anwendung. ETZ 1898, S. 164.

Auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten unendlichen Geraden liege ein Punkt $\mathfrak{P}$, Abb. 2, und es sei

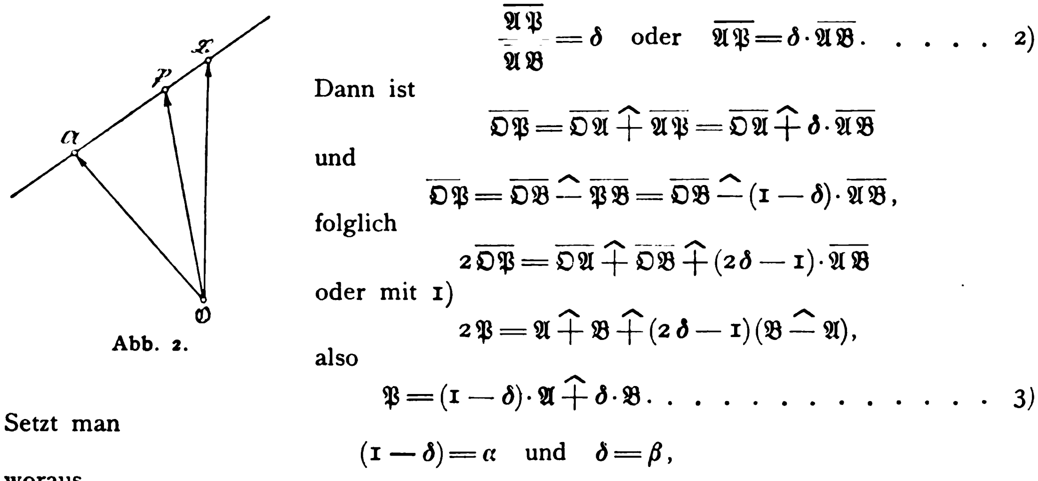


Abb. 2.

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} = \delta \quad \text{oder} \quad \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}} = \delta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2)$$

Dann ist

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \mathbin{\hat{+}} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \mathbin{\hat{+}} \delta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \mathbin{\hat{-}} \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \mathbin{\hat{-}} (1 - \delta) \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

folglich

$$2\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \mathbin{\hat{+}} \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \mathbin{\hat{+}} (2\delta - 1) \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$$

oder mit 1)

$$2\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} (2\delta - 1)(\mathfrak{B} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{A}),$$

also

$$\mathfrak{P} = (1 - \delta) \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \delta \cdot \mathfrak{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 3)$$

Setzt man

$$(1 - \delta) = \alpha \quad \text{und} \quad \delta = \beta,$$

woraus

$$\alpha + \beta = 1$$

folgt, so kann man allgemein einen Punkt $\mathfrak{P}$, der auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten Geraden liegt, durch den Ausdruck

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{P} = \alpha\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \beta\mathfrak{B} \\ \alpha + \beta = 1 \end{array} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 4)$$

darstellen. Ist z. B. $\mathfrak{P}$ die Mitte von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, so ist

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{2}\mathfrak{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 5)$$

Ein Beispiel möge dies erläutern. Wenn man mit dem Quadrantenelektrometer die Leistung L an einem Stromverbraucher AB, Abb. 3, messen will, so schaltet man ihm einen induktionsfreien Widerstand R vor, und verbindet seine Enden C und A

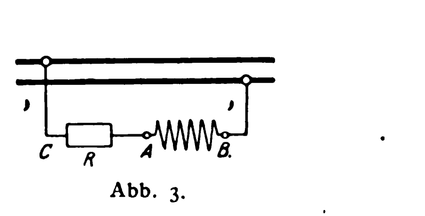


Abb. 3.

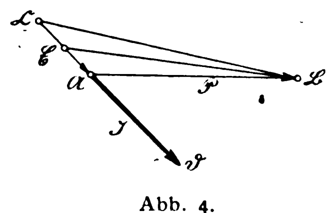


Abb. 4.

mit den Quadrantenpaaren, B mit der Nadel. Es sei nun $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, Abb. 4, die Spannung am Stromverbraucher, $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$ die Stromstärke J, $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}$ der Spannungsverlust RJ im Vorschaltwiderstand, wobei $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}$ die Richtung von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$ hat. Die übliche Formel für das auf die Nadel wirkende Drehmoment ist

$$D = c\,(V_a - V_c)\left(V_b - \frac{V_a + V_c}{2}\right),$$

worin V_a, V_b, V_c die Potentiale der Punkte A, B, C in Abb. 3 sind. Statt dessen können wir mit Rücksicht auf Abb. 4

$$D = c\,[(\mathfrak{A} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \mathbin{\hat{-}} [\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{2}C])] = c\,[(\mathfrak{A} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{E})] = c\,[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}}]$$

schreiben. Dieser Ausdruck für den Mittelwert des Drehmomentes ist ein Vektorprodukt. Das Drehmoment ist demnach dem Vektorprodukt $[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}\mathfrak{B}}]$ proportional, während die Leistung dem Vektorprodukt $[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}]$ proportional ist. Da

$$\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \hat{+} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

so ist

$$D = c\cdot[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}\cdot(\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \hat{+} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}})] = c\cdot[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}] + \tfrac{1}{2}c\,[\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}]^2.$$

Setzt man endlich

$$\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} = R\cdot J, \quad \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = P,$$

so wird

$$D = c\cdot R\,([P\cdot J] + \tfrac{1}{2}R\cdot J^2),$$

oder wenn das Vektorprodukt $[P\cdot J] = L$ gesetzt wird:

$$D = cR\,(L + \tfrac{1}{2}R J^2).$$

Man mißt also einen Wert, der die zu messende Leistung L um die halbe Stromwärmeleistung im Vorschaltwiderstand übertrifft. Dabei ist es gleichgültig, welcher Punkt der Schaltung geerdet wird, weil sich dadurch, wenn man das Erdpotential durch einen festen Punkt der Zeichenebene bezeichnet, nur die ganze Figur verschiebt.

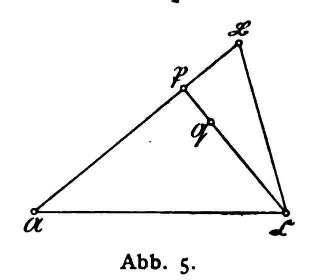


Abb. 5.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ waren die Bezugspunkte zur Bestimmung der Lage des Punktes $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$. Nimmt man noch einen dritten Punkt $\mathfrak{C}$ hinzu, der mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht auf einer und derselben Geraden liegt, so kann man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Q}$ der Ebene durch diese drei Punkte bestimmen. Es sei nämlich, Abb. 5,

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} = \delta, \quad \frac{\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{Q}}}{\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}} = \varepsilon,$$

so ist

$$\mathfrak{P} = (1-\delta)\cdot\mathfrak{A} \hat{+} \delta\cdot\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{Q} = (1-\varepsilon)\cdot\mathfrak{C} \hat{+} \varepsilon\cdot\mathfrak{P} = (1-\varepsilon)\cdot\mathfrak{C} \hat{+} \varepsilon(1-\delta)\cdot\mathfrak{A} \hat{+} \varepsilon\delta\cdot\mathfrak{B}.$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{Q} = \alpha\mathfrak{A} \hat{+} \beta\mathfrak{B} \hat{+} \gamma\mathfrak{C}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

so wird

$$\alpha = \varepsilon(1-\delta)$$

$$\beta = \varepsilon\delta$$

$$\gamma = 1-\varepsilon,$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

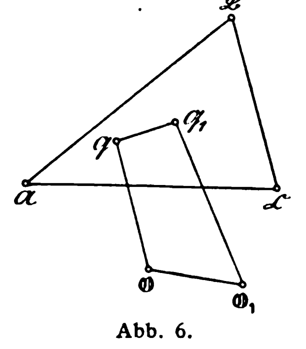


Abb. 6.

Daß Punkt $\mathfrak{Q}$ eindeutig durch 6) bestimmt ist, wenn Gl. 7) erfüllt ist, geht aus folgender Betrachtung hervor. Angenommen $\mathfrak{Q}$ rücke nach $\mathfrak{Q}_1$, wenn $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{O}_1$ verlegt wird. Dann ist, Abb. 6,

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{Q}} = \alpha\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \hat{+} \beta\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \hat{+} \gamma\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{Q}_1} = \alpha\cdot\overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{A}} \hat{+} \beta\cdot\overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{B}} \hat{+} \gamma\cdot\overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{C}},$$

daher

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{Q}} \hat{-} \overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{Q}_1} = \alpha\cdot(\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \hat{-} \overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{A}}) \hat{+} \beta\cdot(\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \hat{-} \overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{B}}) \hat{+} \gamma\cdot(\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}} \hat{-} \overline{\mathfrak{O}_1\mathfrak{C}})$$

$$= \alpha\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1} \hat{+} \beta\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1} \hat{+} \gamma\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1} = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1} = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1}.$$

Daraus folgt, daß $\overline{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1} = 0$ ist, als $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{Q}_1$ zusammenfällt.

Um den Punkt $\mathfrak{Q}$ zu zeichnen, hat man, Abb. 7, von einem beliebigen Nullpunkt $\mathfrak{O}$ aus die Strecken $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}$ zu ziehen, von $\mathfrak{O}$ aus die Strecke $\alpha\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$ auf $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$, die

Strecke $\beta \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}}$ auf $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}}$, die Strecke $\gamma \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}$ auf $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}$ abzutragen und von $\mathfrak{O}$ aus beginnend diese drei Strecken geometrisch zu addieren. Einfacher ist es, $\mathfrak{O}$ mit einem der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zusammenfallen zu lassen, z. B. mit $\mathfrak{A}$. Dann verschwindet die entsprechende Strecke, z. B. $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$, und man hat, um $\mathfrak{Q}$ zu finden, nur zwei Strecken, z. B. $\beta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\gamma \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ geometrisch zu addieren.

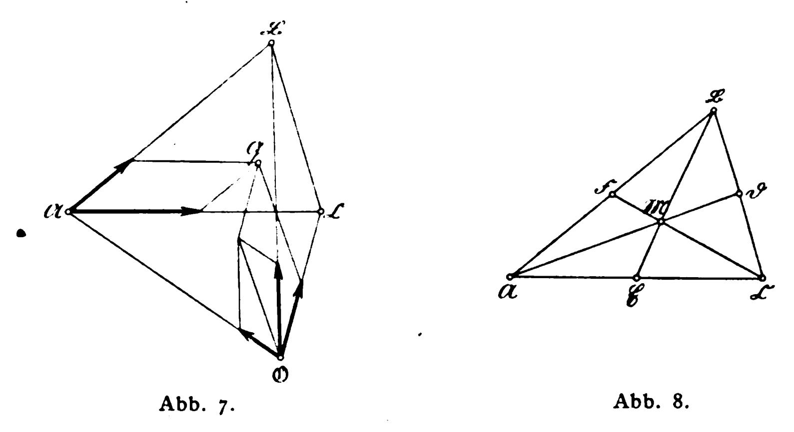


Abb. 7. Abb. 8.

Es mögen sich die Mittellinien $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{E}}$, $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}$ des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, Abb. 8, im Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ schneiden. Man hat dann

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C} \mathbin{\widehat{+}} \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}$$

$$\varepsilon = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}} = \frac{2}{3},$$

folglich

$$\mathfrak{M} = (1 - \varepsilon) \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \varepsilon \mathfrak{D}$$

oder

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{C}. \qquad 8)$$

Man findet hiernach den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Dreiecks, indem man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ ausgehend je ein Drittel von $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}$ geometrisch addiert, oder einfacher, indem man von $\mathfrak{A}$ ausgehend je ein Drittel von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ geometrisch addiert.

$\mathfrak{M}$ ist der Schwerpunkt der mit gleich großen Massen behaftet gedachten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Allgemein ist

$$\mathfrak{Q} = \alpha\mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \beta\mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \gamma\mathfrak{C}$$

der Schwerpunkt der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, wenn diese der Reihenfolge nach mit den Massen

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

oder auch mit den Massen α, β, γ behaftet gedacht werden. Von diesem Grundgedanken ausgehend hat Möbius seinen „baryzentrischen Kalkül" entwickelt, an den sich diese Ausführungen anschließen[1]). Möbius versteht unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die recht- oder schiefwinkligen einander parallelen Abstände dreier Punkte von einer beliebigen Geraden und schreibt

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,\mathfrak{Q} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C}$$

oder auch

$$\mathfrak{Q} \equiv \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C}.$$

[1]) Aug. Ferd. Möbius, Prof. d. Astronomie zu Leipzig, Der barycentrische Calcül, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig, Ambrosius Barth, 1827.

Er kann daher algebraisch addieren. Er weist unter anderem nach, daß der Punkt $\mathfrak{Q}$ eine Gerade beschreibt, wenn α, β und γ lineare Funktionen, und einen Kegelschnitt beschreibt, wenn sie Funktionen zweiten Grades einer unabhängigen Veränderlichen x sind.

Wir wollen α, β, γ die Dreieckskoordinaten oder kurz die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{Q}$ nennen.

Wir hatten gesehen, daß die Differenz zweier Potentiale $\mathfrak{Q} \mathbin{\widehat{-}} \mathfrak{P}$ gleich der Strecke $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ ist, die die Spannung P_{pq} darstellt. Setzt man

$$\mathfrak{P} = \alpha_1 \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \beta_1 \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \gamma_1 \mathfrak{C}$$

und

$$\mathfrak{Q} = \alpha_2 \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \beta_2 \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \gamma_2 \mathfrak{C},$$

so ist

$$\mathfrak{Q} \mathbin{\widehat{-}} \mathfrak{P} = (\alpha_2 - \alpha_1) \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} (\beta_2 - \beta_1) \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} (\gamma_2 - \gamma_1) \mathfrak{C}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{Q} \mathbin{\widehat{-}} \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = u \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} v \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} w \mathfrak{C}, \qquad \text{9)}$$

so wird wegen 7)

$$u + v + w = 0 \qquad \text{10)}$$

Umgekehrt stellt der Ausdruck

$$u \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} v \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} w \mathfrak{C}$$

eindeutig nach Länge und Richtung eine Strecke dar, wenn Gl. 10) erfüllt ist. Denn dann kann man

$$\begin{aligned} u \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} v \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} w \mathfrak{C} &= u \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \mathbin{\widehat{+}} v \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \mathbin{\widehat{-}} u \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}} \mathbin{\widehat{-}} v \cdot \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}} \\ &= u \cdot (\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}} \mathbin{\widehat{-}} \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}) \mathbin{\widehat{+}} v \cdot (\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{B}} \mathbin{\widehat{-}} \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{C}}) \\ &= u \cdot \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} \mathbin{\widehat{+}} v \cdot \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

setzen. Der letzte Ausdruck ist aber von der Lage von $\mathfrak{O}$ ganz unabhängig. Die Lage der Strecke in der Ebene bleibt unbestimmt, denn man kann den Anfangspunkt

$$\alpha_1 \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} \beta_1 \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} \gamma_1 \mathfrak{C}$$

beliebig wählen, der Endpunkt ist dann:

$$(u + \alpha_1) \mathfrak{A} \mathbin{\widehat{+}} (v + \beta_1) \mathfrak{B} \mathbin{\widehat{+}} (w + \gamma_1) \mathfrak{C}.$$

Diese Darstellung eignet sich nun besonders dazu, die Lage der Potentiale in einem Drehstromsystem zu untersuchen. Die Potentiale der drei Leiter in einem Querschnitt des Leitungsstranges werden durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ dargestellt. Die Stromvektoren tragen wir am besten an die Ecken des Dreiecks an, und zwar nach innen gerichtet, wenn es sich um einen Stromverbraucher, nach außen gerichtet, wenn es sich um einen Stromerzeuger handelt. Multipliziert man die Stromvektoren mit der Widerstandseinheit, so gibt ihre Länge, im Spannungsmaßstab gemessen, die Größe der Verschiebung an, die die Potentiale durch die Ströme in der Widerstandseinheit erfahren. Sind z. B. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, Abb. 9, die Potentiale am Anfange einer Fernleitung, $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{E}}$, $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}$ die Spannungsverluste, so sind $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ die Potentiale, also $\overline{\mathfrak{D}\mathfrak{E}}$, $\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{F}}$, $\overline{\mathfrak{F}\mathfrak{D}}$ die Spannungen am Ende der Fernleitung. Es ist dabei zu beachten, daß durch wahre Widerstände das Potential in der Richtung des Stromvektors, durch induktive Widerstände das Potential senkrecht zur Richtung des Stromvektors verschoben wird.

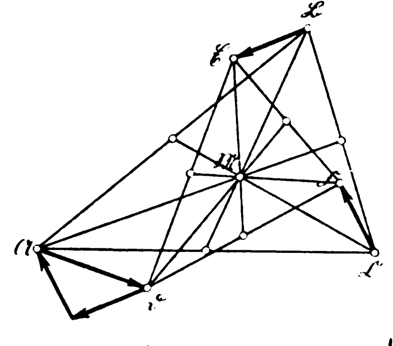


Abb. 9.

Hierbei ergibt sich ein bemerkenswerter Satz. Die Stromvektoren eines Drehstromsystems sind bei beliebiger Belastung des Systems der einzigen aus dem ersten Kirchhoffschen Gesetz hervorgehenden Bedingung unterworfen, daß sie sich durch Parallelverschiebung zu einem in sich geschlossenem Dreieck zusammensetzen lassen. Nun hat man

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{A}, \quad \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{E}} = \mathfrak{E} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{B}, \quad \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{C}$$

Es muß also

$$(\mathfrak{D} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{A}) \mathbin{\hat{+}} (\mathfrak{E} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{B}) \mathbin{\hat{+}} (\mathfrak{F} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{C}) = 0$$

sein, woraus

$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{D} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{E} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{F} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{3}\mathfrak{C}$$

folgt. Diese Gleichung sagt aus, daß das Dreieck $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ denselben Mittelpunkt wie das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ hat. Dieser Satz gilt für ein Dreieck von beliebiger Gestalt. Gilt der Satz auch für die Spannungsverluste einer Fernleitung, so hat er die Bedeutung, daß die Erde am Anfang und am Ende der Leitung dasselbe Potential hat, Erdströme also infolge von Potentialverschiebungen nicht auftreten können. Dies ist eine Forderung, der eine gute Anlage genügen muß.

Legen wir nun ein gleichseitiges Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zugrunde, so erhält man für die Strecke $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}$, indem man Punkt $\mathfrak{O}$ mit Punkt $\mathfrak{A}$ zusammenfallen läßt:

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}} = u \cdot 0 + v \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + w \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}.$$

Die Länge von $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}}$ ist daher, wenn man beachtet, daß $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ einen Winkel von 60^0 mit $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ einschließt:

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}} = \sqrt{v^2 \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^2 + 2vw \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} \cdot \cos 60^0 + w^2 \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}^2}.$$

Setzt man die Länge von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ gleich s, so erhält man

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}} = \sqrt{v^2 + vw + w^2} \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Läßt man $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, so wird

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}} = \sqrt{w^2 + wu + u^2} \cdot s. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Läßt man endlich $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{C}$ zusammenfallen, so wird

$$\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{O}} = \sqrt{u^2 + uv + v^2} \cdot s. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Man hat also

$$u^2 + uv + v^2 = v^2 + vw + w^2 = w^2 + wu + u^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

In der Tat braucht man nur aus

$$u + v + w = 0$$

$w = -u - v$ in den zweiten und dritten Ausdruck einzusetzen, um sie in den ersten überzuführen.

II. Allgemeine Bestimmung der Lage des Erdpotentials.

Wir wollen nun die Lage des Erdpotentials bestimmen, wenn die drei Leiter eines Drehstromsystems durch wahren Widerstand R, durch Selbstinduktivität L und durch Kapazität C in Reihen- oder Parallelschaltung mit der Erde verbunden sind. Die Aufgabe ist wiederholt behandelt worden, zuerst wohl von Kennelly, der dabei mechanische Analogien benutzt hat. Man hat auch die symbolische Methode der komplexen Größen und graphische Verfahren zur Lösung angewendet[1]).

[1]) Kennelly, El. World and Engineer 1899, S. 268; Arnold, La Cour und Bragstad, Theorie der Wechselströme und Transformatoren, S. 288 u. ff.; Kittler, Petersen, Allgem. Elektrotechnik, 2, S. 385 u. ff.; Fraenckel, Theorie der Wechselströme, S. 112 u. ff.

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{O}$, Abb. 10. Dann ist $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}} = P_a$ die Spannung zwischen dem Leiter A und der Erde. Diese Spannung erzeugt einen Gesamtstrom J_a, der irgendwelche Phasenverschiebung φ_a gegen P_a haben möge. Wir zerlegen J_a in die Leistungskomponente oder den Wirkstrom J_a' und die leistungslose Komponente oder den Blindstrom J_a''. Nun ist bei Reihenschaltung von wahrem Widerstand R, Kapazität C und Selbstinduktivität L

Abb. 10.

$$J' = J \cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \cdot \cos\varphi$$

und

$$J'' = J \sin\varphi = \frac{P}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \cdot \sin\varphi .$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega C} - \omega L &= S \\ \text{und} \quad \sqrt{R^2 + S^2} &= W. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Da

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{S}{R},$$

so ist

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + S^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{S}{\sqrt{R^2 + S^2}}.$$

Daher ist der Größe nach

$$J_a' = \frac{P_a}{R_a} \cos^2\varphi_a = \frac{R_a}{R_a^2 + S_a^2} \cdot P_a,$$

$$J_a'' = \frac{P_a}{R_a} \cos\varphi_a \sin\varphi_a = \frac{S_a}{R_a^2 + S_a^2} \cdot P_a .$$

$\frac{R_a}{R_a^2 + S_a^2}$ ist der Wirkleitwert oder die Konduktanz, $\frac{S_a}{R_a^2 + S_a^2}$ der Blindleitwert oder die Suszeptanz. Haben wir mehrere solche Verbindungen zwischen Leitung A und der Erde parallel zueinander, so ist der Größe nach

$$\left.\begin{aligned} J_a' &= \sum \frac{R_a}{R_a^2 + S_a^2} \cdot P_a = A_a \cdot P_a, \\ J_a'' &= \sum \frac{S_a}{R_a^2 + S_a^2} \cdot P_a = B_a \cdot P_a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum \frac{R}{R^2 + S^2} \\ B &= \sum \frac{S}{R^2 + S^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

ist. Der Stromvektor von J_a' fällt in die Richtung von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}$, der Stromvektor von J_a'' in der Richtung von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1}$, wenn $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}$ durch Schwenkung um 90^0 nach links in $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1}$ übergeht. Es ist demnach

$$\left.\begin{aligned} J_a' &= A \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}} \\ J_a'' &= B \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1} . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

J_a' und J_a'' sind durch geometrische Addition zu dem resultierenden Strome J_a zusammenzusetzen. Verfährt man ebenso mit den von B und C ausgehenden Strömen, so erhält man die drei Ströme J_a, J_b, J_c, die der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Vektoren sich durch Parallelverschiebung zu einem geschlossenen Dreieck zusammensetzen lassen. Hierdurch ist der Gang der Rechnung festgelegt.

Es handelt sich nun zunächst darum, die Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 des Punktes $\mathfrak{O}_1$ durch die Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes $\mathfrak{O}$ auszudrücken. Hierzu suchen wir drei Gleichungen.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}} &= \mathfrak{O} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{A} = u\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} v\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} w\mathfrak{C}, \\ \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1} &= \mathfrak{O}_1 \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{A} = u_1\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} v_1\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} w_1\mathfrak{C}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} u &= \xi - 1, & v &= \eta, & w &= \zeta \\ u_1 &= \xi_1 - 1, & v_1 &= \eta_1, & w_1 &= \zeta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

und nach Gl. 13)

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}} = \sqrt{u^2 + uv + v^2} \cdot s,$$

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1} = \sqrt{u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2} \cdot s,$$

wenn s die Länge der Dreieckseite ist. Da $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}$ und $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1}$ gleich lang sind, muß

$$u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2 = u^2 + uv + v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

sein. Ferner ist

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}^2 + \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1}^2 = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1}^2$$

und

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1} = \mathfrak{O}_1 \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{O} = (u_1 - u)\,\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} (v_1 - v)\,\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} (w_1 - w)\,\mathfrak{C}.$$

Wendet man wieder 13) an, so erhält man hieraus

$$(u^2 + uv + v^2) + (u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2) = (u_1 - u)^2 + (u_1 - u)(v_1 - v) + (v_1 - v)^2,$$

woraus

$$0 = 2uu_1 + uv_1 + u_1 v + 2vv_1$$

oder

$$(2u + v)u_1 + (2v + u)v_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

folgt.

Endlich ist

$$u_1 + v_1 + w_1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Aus den Gl. 21), 22), 23) können u_1, v_1, w_1 berechnet werden. Wir entnehmen dazu aus Gl. 22)

$$v_1 = -\frac{2u + v}{2v + u} \cdot u_1$$

und setzen diesen Wert in Gl. 21) ein. Dies ergibt

$$u_1^2 \left[1 - \frac{2u + v}{2v + u} + \frac{(2u + v)^2}{(2v + u)^2}\right] = u^2 + uv + v^2,$$

oder

$$\begin{aligned} u_1^2 \left[(4v^2 + 4vu + u^2) - (4uv + 2v^2 + 2u^2 + vu) + (4u^2 + 4uv + v^2)\right] \\ = [u^2 + uv + v^2]\,[2v + u]^2, \end{aligned}$$

oder

$$u_1^2 [3u^2 + 3uv + 3v^2] = [u^2 + uv + v^2]\,[2v + u]^2,$$

woraus

$$u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (2v + u) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (v - w)$$

folgt. Die Werte für v_1 und w_1 erhält man am einfachsten durch zyklische Vertauschung. Die drei Werte sind daher

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(v - w) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\eta - \zeta), \\ v_1 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(w - u) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta - \xi + 1), \\ w_1 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(u - v) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\xi - \eta - 1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

$$u_1 + v_1 + w_1 = 0.$$

Ferner erhält man aus Gl. 20)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(v - w) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\eta - \zeta), \\ \eta_1 &= \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(w - u) = \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\zeta - \xi + 1), \\ \zeta_1 &= \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(u - v) = \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\xi - \eta - 1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = 0.$$

Es fragt sich nun, welches Vorzeichen wir benutzen müssen. Läßt man $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{C}$ zusammenfallen, so wird

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 1,$$

also, wenn man das positive Vorzeichen wählt,

$$\xi_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \eta_1 = + \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \zeta_1 = - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Läßt man weiter $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfallen, so verschwindet $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{A}}$ und man erhält

$$\mathfrak{O}_1 = \eta_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \mathbin{\hat{+}} \zeta_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \mathbin{\hat{-}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}.$$

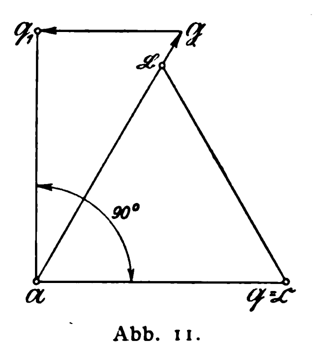


Abb. 11.

Trägt man, Abb. 11, auf $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ aus $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{G}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, und parallel zu $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{G}$ aus $\overline{\mathfrak{G}\mathfrak{O}_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}$ ab, so erhält man Punkt $\mathfrak{O}_1$. Dem positiven Vorzeichen entspricht daher eine Linksdrehung. Wir wollen im folgenden immer das positive Vorzeichen benutzen.

Wir können nun die Ströme J_a', J_a'' und J_a berechnen. Nach Gl. 18) und 19) ist

$$J_a' = A_a u \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} A_a v \cdot \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} A_a w \cdot \mathfrak{C},$$

$$J_a'' = B_a u_1 \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} B_a v_1 \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} B_a w_1 \mathfrak{C},$$

oder mit Gl. 20) und 24)

$$J_a' = A_a(\xi - 1) \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} A_a \eta \cdot \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} A_a \zeta \cdot \mathfrak{C}$$

$$J_a'' = \frac{B_a}{\sqrt{3}}(\eta - \zeta) \cdot \mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \frac{B_a}{\sqrt{3}}(\zeta - \xi + 1) \cdot \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} \frac{B_a}{\sqrt{3}}(\xi - \eta - 1) \cdot \mathfrak{C}.$$

Ihre geometrische Summe ergibt J_a. Wenn wir noch mit $\sqrt{3}$ multiplizieren, so finden wir die erste der drei folgenden Gleichungen und die beiden anderen aus ihr durch zyklische Vertauschung, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}\,J_a &= [\sqrt{3}\,A_a(\xi-1)+B_a(\eta-\zeta)]\cdot\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_a\eta+B_a(\zeta-\xi+1)]\cdot\mathfrak{B}\\ &\qquad \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_a\zeta+B_a(\xi-\eta-1)]\cdot\mathfrak{C},\\ \sqrt{3}\,J_b &= [\sqrt{3}\,A_b(\eta-1)+B_b(\zeta-\xi)]\cdot\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_b\zeta+B_b(\xi-\eta+1)]\cdot\mathfrak{C}\\ &\qquad \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_b\xi+B_b(\eta-\zeta-1)]\cdot\mathfrak{A},\\ \sqrt{3}\,J_c &= [\sqrt{3}\,A_c(\zeta-1)+B_c(\xi-\eta)]\cdot\mathfrak{C} \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_c\xi+B_c(\eta-\zeta+1)]\cdot\mathfrak{A}\\ &\qquad \mathbin{\hat{+}} [\sqrt{3}\,A_c\eta+B_c(\zeta-\xi-1)]\cdot\mathfrak{B}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad 26)$$

Da nun $J_a \mathbin{\hat{+}} J_b \mathbin{\hat{+}} J_c = 0$ sein muß und dazu die Summen der Koeffizienten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ aus den Gl. 26) einzeln verschwinden müssen, so erhält man

$$[\sqrt{3}\,A_a(\xi-1)+B_a(\eta-\zeta)]+[\sqrt{3}\,A_b\xi+B_b(\eta-\zeta-1)]+[\sqrt{3}\,A_c\xi+B_c(\eta-\zeta+1)]=0$$

und zwei entsprechende Gleichungen, oder anders geordnet

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}(A_a+A_b+A_c)\xi+(B_a+B_b+B_c)(\eta-\zeta) &= \sqrt{3}\,A_a+B_b-B_c\\ \sqrt{3}(A_a+A_b+A_c)\eta+(B_a+B_b+B_c)(\zeta-\xi) &= \sqrt{3}\,A_b+B_c-B_a\\ \sqrt{3}(A_a+A_b+A_c)\zeta+(B_a+B_b+B_c)(\xi-\eta) &= \sqrt{3}\,A_c+B_a-B_b.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 27)$$

Setzt man nun

$$\sqrt{3}(A_a+A_b+A_c)=m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 28)$$

$$B_a+B_b+B_c \;=n, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 29)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}\,A_a+B_b-B_c &= p\\ \sqrt{3}\,A_b+B_c-B_a &= q\\ \sqrt{3}\,A_c+B_a-B_b &= r,\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 30)$$

wobei

$$p+q+r=m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 31)$$

ist, so gehen die Gl. 27) in die Gleichungen

$$\begin{aligned}+m\xi+n\eta-n\zeta &= p\\ -n\xi+m\eta+n\zeta &= q\\ +n\xi-n\eta+m\zeta &= r\end{aligned}$$

über, aus denen ξ, η und ζ zu berechnen sind. Die Nennerdeterminante N_0 ist

$$N_0=\begin{vmatrix}+m & +n & -n\\ -n & +m & +n\\ +n & -n & +m\end{vmatrix}=m(m^2+3n^2).$$

Ferner ist

$$N_0\,\xi=\begin{vmatrix}p & +n & -n\\ q & +m & +n\\ r & -n & +m\end{vmatrix}\begin{aligned}&=p(m^2+n^2)-q(nm-n^2)+r(n^2+nm)\\ &=(p+q+r)n^2+pm^2-qmn+rmn\\ &=m[n^2+pm+(r-q)n].\end{aligned}$$

Man erhält daher, wenn man noch mit m dividiert und für die zweite und dritte Gleichung zyklische Vertauschung anwendet,

$$\left.\begin{aligned}(m^2+3n^2)\xi &= n^2+pm+(r-q)n\\ (m^2+3n^2)\eta &= n^2+qm+(p-r)n\\ (m^2+3n^2)\zeta &= n^2+rm+(q-p)n.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 32)$$

Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst.

Es ist nicht schwierig, zu rechtwinkligen Koordinaten überzugehen. Es sei die x-Achse parallel zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, die y-Achse rechtwinklig dazu nach links verdreht, Abb. 12.



1. Es liege der Nullpunkt in $\mathfrak{A}$, Abb. 12. Wir legen $\mathfrak{O}$ in Punkt $\mathfrak{A}$, dann ist, wenn die Dreieckseite gleich s gesetzt wird,

$$\mathfrak{Q} = \eta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \hat{+} \zeta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$$

oder, da $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ 60^0 mit $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ einschließt,

$$x = (\eta + \tfrac{1}{2}\zeta) \cdot s = \tfrac{1}{2}(2\eta + \zeta) \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\zeta \cdot \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$$

oder

$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\zeta \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

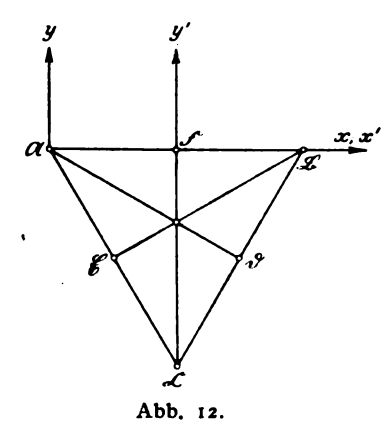


Abb. 12.

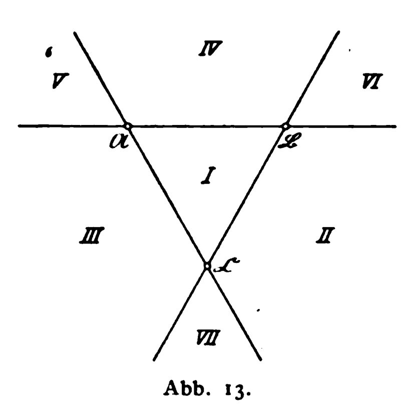


Abb. 13.

2. Es liege der Nullpunkt in der Mitte $\mathfrak{F}$ von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, Abb. 12. Wir legen $\mathfrak{O}$ in Punkt $\mathfrak{F}$, dann ist

$$\mathfrak{Q} = \xi \cdot \overline{\mathfrak{F}\mathfrak{A}} \hat{+} \eta \cdot \overline{\mathfrak{F}\mathfrak{B}} \hat{+} \zeta \cdot \overline{\mathfrak{F}\mathfrak{C}}.$$

Daher

$$x' = -\tfrac{1}{2}\xi \cdot s + \tfrac{1}{2}\eta \cdot s = \tfrac{1}{2}(\eta - \xi) \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

und wie vorher

$$y' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\zeta \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Aus den Ausdrücken für y folgt, daß $\mathfrak{Q}$ rechts von der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten Geraden, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gesehen, also unterhalb dieser Geraden liegt, wenn ζ positiv ist, links von ihr, also oberhalb, wenn ζ negativ ist. Man kann hieraus leicht folgende Regeln ableiten. Die drei durch die Eckpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gelegten Geraden mögen die Zeichenebene in die sieben Teile I bis VII zerlegen, wie Abb. 13 zeigt. Dann gilt

$\mathfrak{Q}$ liegt in	I,	wenn	ξ, η, ζ positiv sind,							
$\mathfrak{Q}$ „ „	II,	„	ξ	negativ,	η	und	ζ	positiv	sind,	
$\mathfrak{Q}$ „ „	III,	„	η	„	, ζ	„	ξ	„	„	
$\mathfrak{Q}$ „ „	IV,	„	ζ	„	, ξ	„	η	„	„	. . . . . 37)
$\mathfrak{Q}$ „ „	V,	„	ξ	positiv,	η	„	ζ	negativ	sind,	
$\mathfrak{Q}$ „ „	VI,	„	η	„	, ζ	„	ξ	„	„	
$\mathfrak{Q}$ „ „	VII,	„	ζ	„	, ξ	„	η	„	„	

Man kann $\mathfrak{Q}$ als den Schwerpunkt ansehen, wenn die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mit Massen behaftet sind, die den rechten Seiten der Gl. 32) proportional sind.

Nach Gl. 11) und 20) ist, wenn man $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{A}$ verlegt,

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}} = \sqrt{\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2} \cdot s.$$

Setzt man s gleich der Spannung P, so ist $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}}$ gleich der Spannung P_a des Punktes A gegen die Erde. Man hat also mit zyklischer Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} P_a &= \sqrt{\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2}\cdot P,\\ P_b &= \sqrt{\zeta^2 + \zeta\xi + \xi^2}\cdot P,\\ P_c &= \sqrt{\xi^2 + \xi\eta + \eta^2}\cdot P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

Aus diesen Gleichungen können die Spannungen gegen die Erde berechnet werden. Am einfachsten ist es im allgemeinen, zunächst ξ, η und ζ aus 32) zu berechnen und dann die Gl. 38) zu benutzen. Wir können aber auch die Werte aus 32) in die Werte 38) einsetzen. Zur Abkürzung setzen wir

$$\left.\begin{aligned} N &= m^2 + 3n^2\\ a &= pm + (r - q)n\\ b &= qm + (p - r)n\\ c &= rm + (q - p)n.\\ \hline a + b + c &= (p + q + r)m = m^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 39)$$

Dann wird mit 32)

$$N\xi = n^2 + a,$$
$$N\eta = n^2 + b,$$
$$N\zeta = n^2 + c.$$

Daher

$$N^2(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) = 3n^4 + 3(a + b)n^2 + (a^2 + ab + b^2).$$

$$a^2 + ab + b^2 = \begin{cases} [p^2 + pq + q^2]m^2\\ + [2p(r - q) + 2q(p - r) + p(p - r) + q(r - q)]mn\\ + [(r^2 - 2qr + q^2) + (p^2 - 2pr + r^2) + (rp - pq - r^2 + qr)]n^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [p^2 + pq + q^2]m^2\\ + [p^2 - q^2 + pr - qr]mn\\ + [p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp]n^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [p^2 + pq + q^2]m^2\\ + [(p - q)(p + q + r)]mn\\ + [(p + q + r)^2 - 3(pq + qr + rp)]n^2 \end{cases}$$

$$= (p^2 + pq + q^2)m^2 + (p - q)m^2n + m^2n^2 - 3(pq + qr + rp)n^2.$$

Ferner ist

$$3(a + b)n^2 = 3(p + q)mn^2 + 3(p - q)n^3$$
$$= 3(p^2 + q^2 + 2pq + qr + rp)n^2 + 3(p - q)n^3.$$

Daher

$$N^2(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) = (m^2 + 3n^2)[n^2 + (p - q)n + (p^2 + pq + q^2)].$$

Folglich mit zyklischer Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} P_a &= \sqrt{\frac{n^2 + (q - r)n + (q^2 + qr + r^2)}{m^2 + 3n^2}}\cdot P,\\ P_b &= \sqrt{\frac{n^2 + (r - p)n + (r^2 + rp + p^2)}{m^2 + 3n^2}}\cdot P,\\ P_c &= \sqrt{\frac{n^2 + (p - q)n + (p^2 + pq + q^2)}{m^2 + 3n^2}}\cdot P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 40)$$

Diese Größen können nur unendlich groß werden, wenn der Nenner verschwindet. Dazu muß sowohl m als auch n zu Null werden. Nun besteht m aus lauter positiven



Gliedern und kann nur verschwinden, wenn die wahren Widerstände sämtlich unendlich groß sind. Der Ausdruck n besteht aus einer Reihe von Gliedern von der Form

$$\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

und kann daher verschwinden, wenn gleichzeitig Kapazität und Selbstinduktivität vorhanden ist.

Wenn

$$p = q = r$$

ist, so verschwindet je das letzte Glied der rechten Seiten in den Gl. 32), während das vorletzte Glied je gleich $\frac{1}{3} m^2$ wird, weil $p + q + r = m$ ist. Man erhält dann

$$\xi = \frac{1}{3}, \quad \eta = \frac{1}{3}, \quad \zeta = \frac{1}{3},$$

d. h. das Erdpotential fällt dann in den Mittelpunkt des Spannungsdreiecks.

III. Anwendung der allgemeinen Lösung auf Sonderfälle.

A. Parallelschaltung von Widerstand, Kapazität und Selbstinduktivität zwischen je einem Leiter und Erde. Gefahrengleichung.

Es sollen nun die allgemeinen Gleichungen auf einige Sonderfälle angewendet werden. Wir wollen zunächst annehmen, die drei Leiter seien durch wahren Widerstand R, Selbstinduktivität L und Kapazität C in Parallelschaltung mit der Erde verbunden. Die wahren Widerstände in dem Kondensator und den Drosselspulenkreisen wollen wir vernachlässigen. Die Summanden A und B sind dann für die drei parallel geschalteten Verbindungen zwischen einem Leiter und der Erde

Summand	für wahren Widerstand	für Kapazität	für Selbstinduktivität
von A	$\frac{1}{R}$	0	0
B	0	$\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} = \omega C$	$-\frac{1}{\omega L}$

Daher wird

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{R} = \Lambda, \\ B &= \omega C - \frac{1}{\omega L} = \Pi, \end{aligned}\right\} \qquad 41)$$

wenn Λ den Leitwert, Π den Blindleitwert bedeutet.

1. Es seien nur wahre Widerstände zwischen den Leitungen und der Erde vorhanden. Dann ist

$$m = \sqrt{3}(\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c), \quad n = 0, \quad p = \sqrt{3}\Lambda_a, \quad q = \sqrt{3}\Lambda_b, \quad r = \sqrt{3}\Lambda_c.$$

Daher

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{p}{m} = \frac{\Lambda_a}{\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c}, \\ \eta &= \frac{q}{m} = \frac{\Lambda_b}{\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c}, \\ \zeta &= \frac{r}{m} = \frac{\Lambda_c}{\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c}. \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

2. Die wahren Widerstände seien unendlich groß. Dann ist

$$m = o, \quad n = \Pi_a + \Pi_b + \Pi_c, \quad p = \Pi_b - \Pi_c, \quad q = \Pi_c - \Pi_a, \quad r = \Pi_a - \Pi_b,$$

daher

$$3n^2\xi = n^2 + (\Pi_a - \Pi_b - \Pi_c + \Pi_a)\,n,$$

$$3n\xi = (\Pi_a + \Pi_b + \Pi_c) + (2\Pi_a - \Pi_b - \Pi_c) = 3\Pi_a.$$

Man erhält daher

$$\xi = \frac{\Pi_a}{\Pi_a + \Pi_b + \Pi_c}, \quad \eta = \frac{\Pi_b}{\Pi_a + \Pi_b + \Pi_c}, \quad \zeta = \frac{\Pi_c}{\Pi_a + \Pi_b + \Pi_c}, \quad \ldots \quad 43)$$

Mit Hilfe von 38) kann man hieraus auch leicht die Spannungen gegen die Erde angeben. Im besonderen erhält man,

a) wenn nur Kapazität vorhanden ist,

$$\xi = \frac{C_a}{C_a + C_b + C_c}, \quad \eta = \frac{C_b}{C_a + C_b + C_c}, \quad \zeta = \frac{C_c}{C_a + C_b + C_c}, \quad \ldots \quad 44)$$

b) wenn nur Selbstinduktivität vorhanden ist,

$$\xi = \frac{\frac{1}{L_a}}{\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c}}, \quad \eta = \frac{\frac{1}{L_b}}{\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c}}, \quad \zeta = \frac{\frac{1}{L_c}}{\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c}}. \quad \ldots \quad 45)$$

Das Erdpotential liegt in den Fällen a) und b) nach 37) immer innerhalb des Dreiecks 𝔄𝔅ℭ. Verschwindet eine der Koordinaten ξ, η, ζ, so liegt 𝔒 auf der dem zugehörigen Punkte gegenüberliegenden Seite verschwinden zwei der Koordinaten, so fällt 𝔒 mit dem Punkt der dritten Koordinate zusammen. Dieser letzte Fall ist annähernd bei Drehstromanlagen mit konzentrischen Kabeln verwirklicht, weil die inneren Leiter keine unmittelbare Kapazität gegen die Erde besitzen und daher nur die geringe außerhalb der Kabel befindliche Kapazität dieser Leiter in Frage kommt, während der Außenleiter eine große Kapazität gegen die Erde besitzt. Die städtischen Elektrizitätswerke in Chemnitz waren zu Anfang mit konzentrischen Kabeln ausgestattet, infolgedessen wurden die Spannungen gegen die Erde zu etwa 80, 1950 und 1950 Volt gefunden. Wird ein konzentrisches Kabel mit einer Freileitung verbunden, so sucht sich das Erdpotential in der Nähe des Kabels auf das des Außenleiters, in der Nähe der Freileitung auf die Mitte des Dreiecks 𝔄𝔅ℭ einzustellen. Die Folge davon sind Erdströme, die zu Telephonstörungen Veranlassung gegeben haben. Noch schlimmer liegt der Fall, wenn der Außenleiter eines Kabelstranges mit einem der inneren Leiter eines anderen Kabelstranges verbunden wird.

c) Wenn zugleich Kapazität und Selbstinduktion vorhanden sind, kann der Nenner verschwinden. Die Koordinaten können dann unendlich groß werden. Wenn nämlich $n = o$ ist, so geben die Gl. 32) die Werte

$$\xi = \frac{p}{m}, \quad \eta = \frac{q}{m}, \quad \zeta = \frac{r}{m}.$$

In diesem Falle sind die Summanden

Summand von	für wahren Widerstand	für Kapazität	für Selbstinduktivität
A	o	o	$\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$
B	o	ωC	$-\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$



Daher wird
$$A = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2},$$
$$B = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2},$$
worin R der Widerstand der Induktionsspule ist. Demnach wird
$$m = \sqrt{3} \cdot \left[\frac{R_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2} + \frac{R_b}{R_b^2 + \omega^2 L_b^2} + \frac{R_c}{R_c^2 + \omega^2 L_c^2}\right],$$
$$n = \omega [C_a + C_b + C_c] - \omega \left[\frac{L_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2} + \frac{L_b}{R_b^2 + \omega^2 L_b^2} + \frac{L_c}{R_c^2 + \omega^2 L_c^2}\right],$$
$$p = \sqrt{3} \cdot \frac{R_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2} + \omega C_b - \frac{\omega L_b}{R_b^2 + \omega^2 L_b^2} - \omega C_c + \frac{\omega L_c}{R_c^2 + \omega^2 L_c^2},$$
$$\xi = \frac{\dfrac{R_a}{R_a^2 + \omega^2 L_a^2}}{\sum \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}} + \frac{\omega (C_b - C_c) - \omega \left(\dfrac{L_b}{R_b^2 + \omega^2 L_b^2} - \dfrac{L_c}{R_c^2 + \omega^2 L_c^2}\right)}{\sum \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$
Der erste Summand von ξ ist die erste Koordinate eines Punktes $\mathfrak{O}_0$, der sicher im Innern des Dreiecks $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ liegt; der zweite Summand ist die erste Koordinate der Strecke $\overline{\mathfrak{O}_0 \mathfrak{O}}$, um die das Erdpotential von jenem Punkte entfernt ist. Die Nenner sind als sehr kleine Größen anzusehen. Wenn daher der Zähler des zweiten Summanden, sowie die entsprechenden Ausdrücke für die η- und die ζ-Koordinate verschwinden oder auch sehr kleine Größen sind, kann $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{O}_0$ zusammenfallen oder doch nahe bei $\mathfrak{O}_0$ liegen; es ist aber auch leicht möglich, daß $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_0$ weit auseinanderliegen. Wir können daher sagen, daß die Gefahr großer Überspannungen gegen die Erde vorhanden ist, wenn
$$n = 0$$
oder angenähert, wenn die Gleichung
$$\omega (C_a + C_b + C_c) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 46)$$
ganz oder nahezu erfüllt ist. Am besten ist es, dafür zu sorgen, daß die Werte von $\frac{1}{\omega L}$ sämtlich entweder viel geringer oder viel größer sind, als die Werte ωC. Besonders große Unsymmetrien treten bei einzelpoliger Schaltung auf; in diesem Falle ist zu untersuchen, ob die Gl. 46) nicht erfüllt sein kann. Nimmt man die Kapazitäten als gleich groß an, und denkt man sich nur die Leitung A durch eine Induktionsspule oder einen im Nullpunkt geerdeten Transformator mit der Erde verbunden, so erhält man als Gleichung der Gefahr
$$3\omega C = \frac{1}{\omega L_a} \quad \text{oder} \quad 3\omega^2 C L_a = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 47)$$

B. Einfache Fälle von Überspannungen.

1. Um einen Fall der Unsymmetrie zu behandeln, nehmen wir an, die Widerstände seien unendlich groß, die Leitung A sei durch Kapazität C_a, die Leitungen B und C seien durch Selbstinduktivitäten L_b und L_c mit der Erde verbunden. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde
$$\omega C_a = \varkappa_a, \quad \frac{1}{\omega L_b} = \lambda_b, \quad \frac{1}{\omega L_c} = \lambda_c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48)$$
gesetzt. Dann ist, wenn der Widerstand der Induktionsspulen vernachlässigt wird,
$$\Pi_a = \varkappa_a, \quad \Pi_b = -\lambda_b, \quad \Pi_c = -\lambda_c, \quad m = 0, \quad n = \varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c.$$

Hiermit ergibt sich aus 43)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\varkappa_a}{\varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c}, \\ \eta &= -\frac{\lambda_b}{\varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c}, \\ \zeta &= -\frac{\lambda_c}{\varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

$\mathfrak{Q}$ liegt, Abb. 14, auf der durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gelegten Geraden, wenn $\xi = 0$ ist. Dies ist der Fall, wenn entweder $C_a = 0$ oder $\frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c} = \infty$ wird. Wir wollen nun verfolgen, wie sich die Lage des Punktes $\mathfrak{Q}$ ändert, wenn L_b und L_c konstant bleiben und C_a sich ändert. Wenn $C_a = 0$ ist, so ist

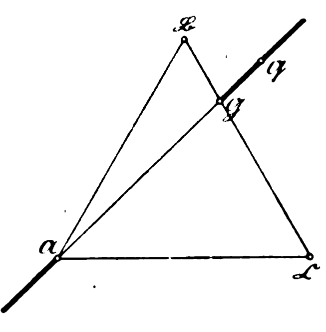


Abb. 14.

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_c}, \quad \zeta_0 = \frac{\lambda_c}{\lambda_b + \lambda_c} \quad \ldots \quad 50)$$

Dies sind die Koordinaten eines auf $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ liegenden Punktes $\mathfrak{G}$.

Demnach ist

$$\mathfrak{G} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_c} \cdot \mathfrak{B} \hat{+} \frac{\lambda_c}{\lambda_b + \lambda_c} \cdot \mathfrak{C},$$

und man erkennt, daß $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{B}$ zusammenfällt, wenn $\lambda_c = 0$ oder $L_c = \infty$ ist, und daß $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ zusammenfällt, wenn $\lambda_b = 0$ oder $L_b = \infty$ ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß $\mathfrak{Q}$ stets auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ gelegten unendlichen Geraden liegen muß, wenn C_a allein veränderlich ist. Soll nämlich $\mathfrak{Q}$ auf einer durch zwei Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ gelegten Geraden liegen, so muß nach 4)

$$\mathfrak{Q} = \delta \mathfrak{M} \hat{+} \varepsilon \mathfrak{N}, \quad \delta + \varepsilon = 1$$

sein. Wenn man nun

$$\mathfrak{Q} = \xi \cdot \mathfrak{A} \hat{+} \eta \cdot \mathfrak{B} \hat{+} \zeta \cdot \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{M} = \alpha_1 \mathfrak{A} \hat{+} \beta_1 \mathfrak{B} \hat{+} \gamma_1 \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{N} = \alpha_2 \mathfrak{A} \hat{+} \beta_2 \mathfrak{B} \hat{+} \gamma_2 \mathfrak{C}$$

setzt, so folgt, daß

$$\begin{aligned} \xi &= \delta\alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 & \xi + \eta + \zeta &= 1 \\ \eta &= \delta\beta_1 + \varepsilon\beta_2 & \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 1 \\ \zeta &= \delta\gamma_1 + \varepsilon\gamma_2 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= 1 \end{aligned}$$

sein muß. Sieht man in den letzten Gleichungen δ und ε als Unbekannte an, so ergibt sich, daß

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \delta = \begin{vmatrix} \xi & \alpha_2 \\ \eta & \beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \varepsilon = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \xi \\ \beta_1 & \eta \end{vmatrix}$$

ist. Setzt man hieraus δ und ε in die Gleichung $\delta + \varepsilon = 1$ ein, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \xi & \alpha_2 \\ \eta & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \xi \\ \beta_1 & \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

oder

$$(\beta_2 - \beta_1)\xi - (\alpha_2 - \alpha_1)\eta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

als Bedingung dafür, daß $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf einer Geraden liegen. Wenn nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ ist,

so ist $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, und wenn $\mathfrak{N}$ auf $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ liegt, so ist $\alpha_2 = 0$, also wird aus der Bedingungsgleichung 51)

$$\beta_2 \xi + \eta = \beta_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 52)$$

Nun war, wenn $\mathfrak{O}$ auf $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ lag, also die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 hatte, nach 50)

$$\eta_0 = \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_c} = \beta_2 .$$

Dies in 52) eingesetzt gibt mit 49)

$$\frac{\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_c} \cdot \frac{\varkappa_a}{\varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c} - \frac{\lambda_b}{\varkappa_a - \lambda_b - \lambda_c} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \lambda_c},$$

also eine Identität, womit der Beweis erbracht ist.

Punkt $\mathfrak{O}$ fällt, wie wir gesehen haben, in die Seite $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$, wenn $C_a = 0$. Wächst C_a, so ist ξ nach 49) zunächst negativ, während η und ζ positiv sind. $\mathfrak{O}$ rückt also in der Richtung $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{G}}$ über $\mathfrak{G}$ hinaus und fällt ins Unendliche, wenn

$$\varkappa_a = \lambda_b + \lambda_c \quad \text{oder} \quad \omega C_a = \frac{1}{\omega L_b} + \frac{1}{\omega L_c}$$

wird. Wächst C_a weiter, so wird ξ positiv, während η und ζ negativ werden. $\mathfrak{O}$ wandert dann auf der anderen Seite des Dreiecks aus dem Unendlichen auf $\mathfrak{A}$ zu und erreicht $\mathfrak{A}$, wenn $C_a = \infty$ wird. Im Inneren des Dreiecks kann $\mathfrak{O}$ niemals liegen.

Ist $L_c = \infty$, so bewegt sich $\mathfrak{O}$ auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten unendlichen Geraden. $\mathfrak{O}$ fällt ins Unendliche, wenn

$$\omega C_a = \frac{1}{\omega L_b} \quad \text{oder} \quad \omega^2 C_a L_b = 1$$

ist. Man erhält also die bekannte Resonanzbedingung für Einphasenstrom.

2. Die Widerstände seien unendlich groß, Leitung A sei durch Selbstinduktivität, die Leitungen B und C seien durch Kapazität mit der Erde verbunden. Der Fall kann genau wie der vorhergehende behandelt werden. $\mathfrak{O}$ bewegt sich auf einer unendlichen durch $\mathfrak{A}$ gehenden Geraden außerhalb des Dreiecks, wenn man L_a von Null bis Unendlich wachsen läßt. Ist $L_a = 0$, so fällt $\mathfrak{O}$ in den Punkt $\mathfrak{A}$, ist $L_a = \infty$, so fällt $\mathfrak{O}$ in die Seite $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$. $\mathfrak{O}$ rückt ins Unendliche, wenn

$$\frac{1}{\omega L_a} = \omega C_b + \omega C_c$$

wird.

C. Überwachung des Isolationszustandes durch Spannungsmessungen.

Der Isolationszustand der Anlagen wird vielfach durch Elektrometer oder entsprechende Meßgeräte überwacht, die zwischen je eine Leitung und die Erde geschaltet sind und die Spannungen der drei Leitungen gegen die Erde messen. Man kann im allgemeinen annehmen, daß die drei Kapazitäten zwischen den Leitungen und der Erde gleich groß seien. Selbstinduktivitäten mögen nicht vorhanden sein. Solange die Isolationswiderstände sehr groß sind, ist die Lage des Erdpotentials im wesentlichen durch die Kapazitäten bestimmt. Es liegt dann in der Nähe des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ des Dreiecks. Die Elektrometer zeigen dann ungefähr gleich große Anschläge. Wir wollen nun annehmen, die Isolation einer Leitung, und zwar der Leitung A, sei wesentlich verringert. Wir setzen demnach

$$\Lambda_a = \Lambda_a, \quad \Lambda_b = 0, \quad \Lambda_c = 0, \quad \Pi_a = \Pi_b = \Pi_c = \omega C .$$

Dann ist

$$p = \sqrt{3}\Lambda_a, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad m = \sqrt{3}\Lambda_a = p, \quad n = 3\omega C \quad \ldots \quad 53)$$

Damit erhält man aus den Gleichungen 32)

$$\left.\begin{aligned}(p^2 + 3n^2)\xi &= n^2 + p^2, \\ (p_2 + 3n^2)\eta &= n^2 + np, \\ (p^2 + 3n^2)\zeta &= n^2 - np,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

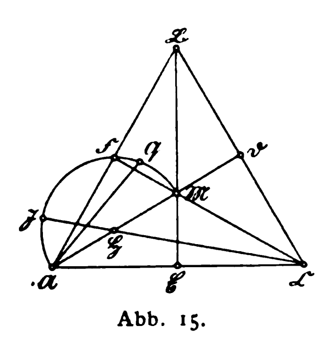


Abb. 15.

ξ und η sind immer positiv, ζ kann verschwinden oder negativ werden. $\mathfrak{O}$ kann also über die Seite $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ aus dem Dreieck heraustreten. ζ verschwindet, wenn

$$n = p \quad \text{oder} \quad 3\omega C = \sqrt{3}\Lambda_a$$

oder

$$\sqrt{3}\omega C = \Lambda_a$$

wird. Dann ist

$$\xi = \eta = \tfrac{1}{2}.$$

$\mathfrak{O}$ liegt dann also auf der Mitte $\mathfrak{F}$ von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, Abb. 15. Die drei Spannungen gegen die Erde sind nach Gl. 40)

$$\left.\begin{aligned}P_a &= \sqrt{\frac{n^2}{p^2 + 3n^2}}\cdot P, \\ P_b &= \sqrt{\frac{n^2 - pn + p^2}{p^2 + 3n^2}}\cdot P, \\ P_c &= \sqrt{\frac{n^2 + pn + p^2}{p^2 + 3n^2}}\cdot P.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Wir wollen den Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{M}$ berechnen. Es ist

$$\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{O}\mathfrak{M}) = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}^2 - \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}^2 - \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{M}}^2}{2\,\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}}\cdot\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{M}}}.$$

Nun ist

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{M}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot P = \frac{\sqrt{3}}{3}P$$

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{O}} = P_a = \frac{n}{\sqrt{N}}P, \quad \text{wenn} \quad N = p^2 + 3n^2.$$

$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{M}}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \mathbin{\hat{-}} \mathfrak{O} = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{C}) \mathbin{\hat{-}} \left(\frac{n^2 + p^2}{N}\cdot\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \frac{n^2 + np}{N}\cdot\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} \frac{n^2 - np}{N}\cdot\mathfrak{C}\right)$$

$$= u\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} v\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} w\mathfrak{C},$$

woraus

$$u = \frac{1}{3} - \frac{n^2 + p^2}{N} = -\frac{2p^2}{3N},$$

$$v = \frac{1}{3} - \frac{n^2 + np}{N} = \frac{p^2 - 3np}{3N},$$

$$w = \frac{1}{3} - \frac{n^2 - np}{N} = \frac{p^2 + 3np}{3N}.$$

folgt. Nun ist

$$\overline{\mathfrak{Q}\mathfrak{M}} = \sqrt{u^2 + uv + v^2} \cdot P$$

$$= \frac{P}{3N}\sqrt{(4p^4) - (2p^4 - 6np^3) + (p^4 - 6np^3 + 9n^2p^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{3p^4 + 9n^2p^2}{(3p^2 + 9n^2)^2}} \cdot P = \frac{p}{\sqrt{3(p^2 + 3n^2)}} \cdot P.$$

Daher wird

$$\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{M}) = \frac{\frac{1}{3} - \frac{n^2}{p^2 + 3n^2} - \frac{p^2}{3(p_2 + 3n^2)}}{\left(\frac{2np}{\sqrt{3}(p^2 + 3n^2)}\right)} = 0.$$

$\mathfrak{Q}$ liegt also auf einem Halbkreise über $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$. Weiter ist

$$\operatorname{tang}(\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{Q}) = \frac{\overline{\mathfrak{Q}\mathfrak{M}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}}} = \frac{p}{\sqrt{3(p^2 + 3n^2)}} : \frac{n}{\sqrt{p^2 + 3n^2}} = \frac{p}{\sqrt{3} \cdot n} = \frac{\Lambda_a}{3\omega C}.$$

Demnach liegt $\mathfrak{Q}$ so, als wenn A nur durch den wahren Widerstand $R_a = 1/\Lambda_a$, M durch die gesamte Kapazität 3 C mit der Erde verbunden wäre. $\mathfrak{Q}$ wandert mit wachsendem Λ_a keineswegs geradlinig auf $\mathfrak{A}$ zu, sondern weicht nach rechts aus. Wenn $\Lambda_a = \sqrt{3}\omega C$ ist, liegt $\mathfrak{Q}$ auf der Mitte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, es ist dann

$$P_a = P_b = \tfrac{1}{2} P, \quad P_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} P.$$

Wird Λ_a größer, so tritt $\mathfrak{Q}$ aus dem Dreieck heraus, bei $\Lambda_a = \infty$ oder $R_a = 0$ fällt $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammen. Es ist dann

$$P_a = 0, \quad P_b = P_c = P.$$

Wenn Punkt $\mathfrak{H}$ die Mitte von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{M}}$ ist und die Verlängerung von $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{H}}$ den Halbkreis in $\mathfrak{J}$ schneidet, so ist $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{J}}$ der größte Wert, den P_c annehmen kann. Nun ist

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6})\mathfrak{A} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{6}\mathfrak{B} \mathbin{\hat{+}} \tfrac{1}{6}\mathfrak{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

Daher hat die Strecke $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{H}}$ die Koordinaten

$$u = \tfrac{4}{6}, \quad v = \tfrac{1}{6}, \quad w = \tfrac{1}{6} - 1 = -\tfrac{5}{6}$$

und es wird

$$\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{H}} = \sqrt{u^2 + uv + v^2} \cdot P = \tfrac{1}{6}\sqrt{16 + 4 + 1} \cdot P = \tfrac{1}{6}\sqrt{21} \cdot P = 0{,}764 \cdot P.$$

Da ferner

$$\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{H}\mathfrak{A}} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot P,$$

so wird

$$\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{J}} = (\tfrac{1}{6}\sqrt{21} + \tfrac{1}{6}\sqrt{3})P = \tfrac{1}{6}(\sqrt{21} + \sqrt{3})P = 1{,}053 \cdot P.$$

Die größte Spannung der Leitung C gegen die Erde übertrifft also die Betriebsspannung um rund 5 Hundertstel.

Die Koordinaten von $\mathfrak{C}$ sind

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1,$$

die von $\mathfrak{H}$ nach 56)

$$\alpha_2 = \tfrac{4}{6}, \quad \beta_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \gamma_2 = \tfrac{1}{6}.$$

Setzt man die Koordinaten von $\mathfrak{J}$ gleich

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1,$$

so erhält man aus 51)

$$\tfrac{1}{6}\xi_1 - \tfrac{4}{6}\eta_1 = 0,$$

oder

$$\xi_1 = 4\eta_1 .$$

Aus 54) erhält man hiermit

$$\frac{4}{1} = \frac{n^2 + p^2}{n^2 + np}$$

und daraus

$$p = 2n + \sqrt{7} \cdot n$$

oder

$$\sqrt{3} A_a = (2 + \sqrt{7}) 3\omega C,$$

woraus

$$A_a = (2\sqrt{3} + \sqrt{21})\omega C = 8{,}04\,\omega C$$

folgt. Bei diesem Wert tritt die größte Spannung zwischen der Leitung C und der Erde auf.

D. Kondensator und Induktionsspule in Reihenschaltung.

Leitung A sei durch Kapazität C, Leitung B durch wahren Widerstand R und Selbstinduktivität L in Reihenschaltung mit der Erde verbunden. Zur Abkürzung werde

$$\frac{1}{\omega C} = c, \quad \omega L = l, \quad S = c - l \quad \dots\dots\dots\dots 57)$$

gesetzt. Man hat dann

$$R_a = 0, \qquad R_b = R, \qquad R_c = \infty,$$
$$L_a = 0, \qquad L_b = L, \qquad L_c = \infty.$$
$$C_a = C, \qquad C_b = \infty, \qquad C_c = 0,$$

Daher ist

$$A_a = 0, \qquad A_b = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \qquad A_c = 0.$$

$$B_a = \omega C, \quad B_b = -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad B_c = 0.$$

Folglich

$$\left.\begin{aligned}
m &= \sqrt{3}\,(A_a + A_b + A_c) = \frac{\sqrt{3}R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\sqrt{3}R}{R^2 + l^2}, \\
n &= B_a + B_b + B_c = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{c} - \frac{l}{R^2 + l^2}, \\
p &= -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = -\frac{l}{R^2 + l^2}, \\
q &= \frac{\sqrt{3}R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega C = \frac{\sqrt{3}R}{R^2 + l^2} - \frac{1}{c}, \\
r &= \omega C + \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{c} + \frac{l}{R^2 + l^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots 58)$$

Nach 33) und 34) war für rechtwinklige Koordinaten mit Nullpunkt in $\mathfrak{A}$ und Richtung der x-Achse in der Richtung $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$$x = \tfrac{1}{2}(2\eta + \zeta)\cdot P \quad \ldots \quad 33)$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\zeta\cdot P \quad \ldots \quad 34)$$

Nun erhält man aus 32)

$$(m^2 + 3n^2)(2\eta + \zeta) = 3(n - r)n + (2q + r + n)m.$$

$$(m^2 + 3n^2)\zeta = n(n + q - p) + rm.$$

Setzt man hierin die Werte aus 58) ein, so ergibt sich

$$m^2 + 3n^2 = \frac{3[R^2 + (l - c)^2]}{(R^2 + l^2)c^2},$$

$$(m^2 + 3n^2)(2\eta + \zeta) = \frac{6(c - l)}{(R^2 + l^2)c},$$

$$(m^2 + 3n^2)\zeta = \frac{2\sqrt{3}R}{(R^2 + l^2)c}.$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(c - l)c}{R^2 + (c - l)^2}\cdot P = \frac{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}\cdot P, \\ y &= -\frac{Rc}{R^2 + (c - l)^2}\cdot P = -\frac{R\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}\cdot P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 59)$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen entweder C oder L oder R, so erhält man jedesmal eine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y mit gleich großen Koeffizienten von x^2 und y^2, d. h. $\mathfrak{Q}$ bewegt sich, wenn man nur eine der Größen L, C und R ändert, jedesmal auf einem Kreise. Wir wollen nur den Kreis betrachten, der sich ergibt, wenn man L eliminiert. Zunächst ist

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{R^2 + (c - l)^2}\cdot P^2.$$

Daher

$$\frac{x^2 + y^2}{y} = -\frac{c}{R}\cdot P,$$

oder

$$R(x^2 + y^2) + cPy = 0 \quad \ldots \quad 60)$$

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um y_0 senkrecht zu $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ nach unten, indem man

$$y = y_1 + y_0$$

setzt, so wird mit

$$y_0 = -\frac{c}{2R}\cdot P$$

$$R(x^2 + y_1^2) = \frac{c^2}{4R}\cdot P^2 \quad \ldots \quad 61)$$

und man erhält für den Halbmesser r des Kreises, der $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{A}$ berührt

$$r = \frac{c}{2R}P = \frac{P}{2\omega CR} \quad \ldots \quad 62)$$

Auf dem so bestimmten Kreise bewegt sich $\mathfrak{Q}$, wenn L allein geändert wird. Wenn L = o ist, so ist

$$\frac{x}{y} = -\frac{c}{R} = -\frac{1}{\omega CR}.$$

Punkt $\mathfrak{Q}$ fällt dann, Abb. 16, in einen Punkt $\mathfrak{Q}_0$, der auf dem über $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ geschlagenen Halbkreise liegt, wie es ja auch sein muß, weil jetzt nur wahrer Widerstand und Kapazität zwischen A und B vorhanden sind. Der Halbmesser r ist um so größer, je kleiner der Widerstand R und die Kreisfrequenz ω sind. Verschwindet der Widerstand R

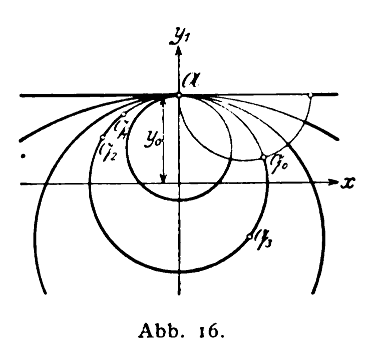


Abb. 16.

ganz, so bewegt sich $\mathfrak{Q}$ auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten unendlichen Geraden außerhalb der Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, wie schon früher am Schlusse von Beispiel B 1 gefunden war. Wächst L von Null beginnend, so wird zunächst der Zahlenwert von y größer, $\mathfrak{Q}$ bewegt sich also von $\mathfrak{Q}_0$ in der Richtung des Uhrzeigers. Wenn $L = \infty$ wird, erreicht $\mathfrak{Q}$ den Punkt $\mathfrak{A}$.

Enthält die Induktionsspule Eisen, so gelten diese Betrachtungen näherungsweise. Wenn man die Magnetisierung des Eisens steigert, nimmt die Selbstinduktivität bei gleichbleibender Windungszahl ab, der Punkt bewegt sich also etwa von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$. Wird dabei ein Grenzwert überschritten, so ändert sich die mittlere Selbstinduktivität fast sprungweise und $\mathfrak{Q}_0$ springt etwa von $\mathfrak{Q}_2$ nach $\mathfrak{Q}_3$. Es sind daher im allgemeinen zwei Gleichgewichtszustände möglich, wie zuerst Herr O. Martienssen gezeigt hat[1]). Befindet man sich z. B. bei dem Gleichgewichtszustand $\mathfrak{Q}_3$ und steigert man die Spannung $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, so tritt sprungweise der Gleichgewichtszustand in der Gegend von $\mathfrak{Q}_3$ ein und bleibt bestehen, auch wenn man die Spannung $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ wieder auf den alten Wert bringt. Die Kurven sind in diesem Falle keine Kreise mehr, da sich, wie auch Herr Martienssen bemerkt, der wirksame Widerstand mit der Magnetisierung ändert.

[1]) O. Martienssen, „Über einen neuen Frequenzmesser der Siemens & Halske-A. G.", ETZ 1910, S. 204; derselbe: „Über neue Resonanzerscheinungen in Wechselstromkreisen", Physikal. Zeitschr. 1910, S. 448; Biermanns: Archiv für Elektrotechnik 1915, S. 345; Petersen, ETZ 1915, S. 353; Diskussion im El. Verein, ETZ 1916, S. 148 u. 252. Eine Bestimmung der Gleichgewichtszustände nach der topographischen Methode wird vom Verfasser in der ETZ erscheinen.



Untersuchungen über die möglichen Fehlerquellen bei Stromwandlern.

Von

Emil Wirz, Zürich.

1. Einleitung und Allgemeines.

In den letzten Jahren haben sich in der Elektrotechnik mancherlei Wandlungen vollzogen, welche teilweise zu durchgreifenden Änderungen in der Konstruktion von Maschinen und Apparaten führten und im Bau von Kraftwerken und der Verteilung der elektrischen Energie eine umfassende Neuorientierung erforderte, wodurch auch eine Umgestaltung der in Frage kommenden Meßtechnik notwendig wurde.

Solange die Spannungen, Ströme und Leistungen in den Zentralen noch verhältnismäßig kleine Werte erreichten und zudem das Gleichstromsystem verwendet wurde, bot die Messung der maßgebenden Faktoren keine besonderen Schwierigkeiten, da mit Hilfe von Vorschalt- und Parallelwiderständen die Ströme und Spannungen auf das gewünschte zulässige Maß herabgesetzt werden konnten, wenn auch dabei manchmal ganz enorme Energieverluste mit in den Kauf genommen werden mußten.

Wesentlich anders gestalteten sich jedoch die Verhältnisse, als man langsam das Gleichstromsystem mit dem Wechselstromsystem vertauschte, zu immer größeren Leistungen überging und schließlich infolge der besseren Übertragungsmöglichkeit auf große Entfernungen immer höhere Betriebsspannungen wählte. Hierbei konnte dann mit einfachen Vor- uud Parallelwiderständen nichts mehr ausgerichtet werden, da einesteils solche Widerstände zu große Dimensionen annehmen würden und andernteils die erforderlichen hohen Betriebsspannungen damit nicht mehr von den Meßinstrumenten ferngehalten werden können und dadurch eine stetige Gefahr für das Betriebs- und Bedienungspersonal bilden. Man war deshalb gezwungen, hier zu anderen Mitteln zu greifen, um die maßgebenden Größen ohne Schwierigkeiten messen zu können und fand die zweckmäßigste Lösung in der Anwendung des Transformationsprinzips, indem die zur Messung nötigen Ströme und Spannungen mittelst Meßwandler auf eine für normale Meßinstrumente gebräuchliche Größe transformiert werden und zugleich noch die Hochspannung von den eigentlichen Meßinstrumenten ferngehalten wird. So einfach einerseits diese Meßwandler sind, so sind doch andererseits damit wieder gewisse Komplikationen und Fehlerquellen verbunden, die teils im Transformationsprinzip selber und teils in der Kupplung der verschiedensten Stromkreise miteinander ihre Ursache haben. Obschon man anfänglich sich ohne große Bedenken über diese Komplikationen und Fehlerquellen hinwegsetzte, da sie zu geringfügig schienen, kam man doch im Laufe der Zeit auf dieselben wieder zurück, indem es sich eben im Betriebe herausstellte, daß diese Erscheinungen nicht so kurzerhand zu vernachlässigen sind.

Dazu mag auch das immer größer werdende Interesse an einer möglichst rationellen Ausnutzung der elektrischen Energie beigetragen haben, da eben heute die Wirtschaftlichkeit einer Zentrale ausschlaggebend ist und diese nur einwandfrei nachgewiesen werden kann, wenn die verwendeten Apparate hinreichend genau ihren Zweck erfüllen.

Es hat deshalb auch nicht in den letzten Jahren an Vorschriften für die Genauigkeit derartiger Meßapparate gefehlt, welche von Jahr zu Jahr auf Grund von Beobachtungen und Untersuchungen verbessert und verschärft wurden und eigentlich so richtig zeigen, daß man der Meßtechnik als Grundlage für die Rentabilitäts- und Wirtschaft-



lichkeitsrechnung das regste Interesse entgegen bringt. Aber alle diese Vorschriften erfüllen jedoch erst dann ganz ihren Zweck, wenn man sicher weiß, daß dieselben nicht nur auf dem Prüfstand, sondern auch im Betriebe sicher erfüllt sind, d. h. solche Apparate unter den festgelegten Bedingungen unter allen Umständen befriedigend arbeiten.

Das ist nun allerdings nicht immer der Fall, weil man sich nur zu leicht der Täuschung hingibt, daß die auf dem Prüfstand erhaltenen Fehler nicht wesentlich überschritten werden. Man sieht also bereits bei solchen Vorschriften gewisse Abweichungen vor, über deren Tragweite und Größe man jedoch vielfach nicht im klaren ist. Wenn man dies auch nicht auf alle im Betriebe vorkommenden Meßapparate ausdehnen darf, so gilt es jedoch in erhöhtem Maße bei Meßwandlern, da dieselben im Betriebe durch Erscheinungen beeinflußt werden, die man auf dem Prüfstand nur sehr schwer oder meist gar nicht nachahmen kann und zudem die Verhältnisse im Betriebe nicht stabil, sondern zeitlichen, periodischen und nicht periodischen Veränderungen unterworfen sind, über deren Wirkungen man vielfach völlig im unklaren ist.

Wohl ist von den maßgebenden Werken und Prüfanstalten schon reichliches Material gesammelt worden, jedoch scheint diese hoch wichtige Materie noch viel zu wenig gesichtet und noch viel weniger theoretisch geklärt zu sein, um allgemeine Schlüsse daraus ziehen zu können oder sogar allgemeingültige Normen für die Prüfung und die Konstruktion aufstellen zu können. Auch in der Literatur ist über Meßwandler herzlich wenig zu finden, trotzdem jeder Betriebsleiter einer Zentrale zur Genüge weiß, daß solche Meßtransformatoren nicht immer einwandfrei arbeiten und bisweilen sogar zu erheblichen Störungen und Fehlern Anlaß geben. Offenbar findet diese spärliche Literatur ihre Erklärung in einer gewissen Art falscher Scheu, möglichst keine schlechten Betriebserfahrungen zu veröffentlichen, um sich damit nicht zu mißkreditieren oder der liefernden Firma nicht zu nahe zu treten, wodurch aber der Allgemeinheit ein ungemein großer Schaden zugefügt wird und das betreffende Werk selber darunter zu leiden hat.

Mit der folgenden Arbeit soll deshalb versucht werden, das wenige in der Literatur vorhandene Material zu sichten und die vom Verfasser in den letzten Jahren gemachten Erfahrungen und Beobachtungen, soweit sie die Fehler und Fehlerquellen der Stromwandler betreffen, theoretisch und teilweise auch experimentell zu untersuchen und dabei die von den Prüfämtern aufgestellten Bedingungen einer besonderen Nachprüfung zu unterziehen, um gewisse Richtlinien für die Prüfung und Konstruktion zu erhalten. Die Spannungswandler sollen einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

In bezug auf die verschieden Zwecke, zu welchen Stromwandler praktisch verwendet werden, kann man zwei Hauptgruppen unterscheiden, die sich voneinander hauptsächlich durch die Art der Anforderungen unterscheiden und dadurch in ihrem konstruktiven und wirtschaftlichen Aufbau voneinander verschieden sein können, nämlich:

I. Gruppe: Stromwandler, bei denen nur das Übersetzungsverhältnis der Ströme und die Fernhaltung der Hochspannung von den Meßapparaten maßgebend ist, und

II. Gruppe: Stromwandler, bei denen außer dem Übersetzungsverhältnis und der Fernhaltung der Hochspannung noch die Phasenabweichung zwischen Primär- und Sekundärstrom sowie die Phasenverschiebung im Primär- und Sekundärkreis ausschlaggebend ist.

Die zweite Gruppe kann dann ihrer Natur nach wiederum in die zwei Abteilungen getrennt werden:

a) Technische Stromwandler, die dauernd im betreffenden Stromkreis liegen und dauernd unter Strom und Spannung sind, und

b) Kontroll- und Präzisionsstromwandler, die nur vorübergehend eingeschaltet werden.



Die erste Gruppe von Stromwandlern, bei welchen nur das Übersetzungsverhältnis der Ströme und die Fernhaltung der Hochspannung von den Meßinstrumenten maßgebend ist, kommt nur dann in Frage, wenn Ströme gemessen werden sollen oder der Stromwandler nur dazu dient, gewisse Arten von Schalt-, Regulier- und Signalapparate zu betätigen. In diesem Falle ist in der Regel die Phasenverschiebung zwischen Primär- und Sekundärstrom mehr oder weniger belanglos und es braucht deshalb der Stromwandler nur auf das richtige Übersetzungsverhältnis abgestimmt zu werden. Dies bringt namentlich einige konstruktive Vorteile mit sich, da das Übersetzungsverhältnis und die Phasenabweichung bezüglich der Dimensionierung eines Stromwandlers in einem gewissen Gegensatze zueinander stehen und sich namentlich durch nicht unbeträchtliche Materialersparnisse bemerkbar macht. Gerade Materialersparnisse und die damit verbundene Preisfrage spielt ja auch im Stromwandlerbau eine einschneidende Rolle, welcher sich nur zu oft die Genauigkeit unterordnen muß.

Die Stromwandler der zweiten Gruppe, bei welchen außer dem Übersetzungsverhältnis und der Fernhaltung der Hochspannung auch noch die Phasenabweichung der Ströme maßgebend ist, dienen mittelst Zählern und Leistungsmessern zu Arbeits- und Leistungsmessungen und erfordern deshalb bezüglich der Genauigkeit die größte Aufmerksamkeit, da die Phasenabweichung zwischen Primär- und Sekundärstrom einen namhaften Teil des gesamten Fehlers ausmachen kann, besonders wenn der Netzleistungsfaktor wesentlich von der Einheit abweicht. Die unter a) und b) genannten Abteilungen der Gruppe II unterscheiden sich wiederum voneinander: durch die Anforderungen an die Genauigkeit, da naturgemäß ein Präzisions- und Kontrollapparat eine größere Genauigkeit besitzen muß als ein solcher, der ständig allen möglichen Einflüssen ausgesetzt ist und stets unter Strom und Spannung steht, und 2. durch ihren konstruktiven Aufbau, da ein transportabler Apparat ein geringeres Gewicht besitzen muß und außerdem meist auf verschiedene Stromstärken umschaltbar ist und leicht transportabel sein soll, was alles beim stationären Apparat meist gar nicht in Betracht kommt. Genau genommen müßten daher für jede Gruppe die Fehlerquellen getrennt untersucht werden, da verhältnismäßig kleine Änderungen in der Konstruktion wesentliche Fehler bedingen können und nicht selten zu Begleiterscheinungen Anlaß geben, die auf dem Prüfstand nur sehr schwer oder gar nicht festgestellt werden können, dann aber im Betriebe sich in allen möglichen Formen äußern und in erster Linie die Meßgenauigkeit stark in Mitleidenschaft ziehen. Auf solche Erscheinungen und ihre Tragweite hat der Verfasser bereits vor einiger Zeit hingewiesen[1]) und gezeigt, wie der Fehler nur zu leicht an einem falschen Ort gesucht und wie durch unzweckmäßige Gegenmaßnahmen das Übel nur verschlimmert als verbessert wird. Auf alle Einzelheiten dieser Kategorien von Stromwandlern hier einzugehen, würde jedoch zu weit führen und auch den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, so daß wir im folgenden nur die Grundzüge dieser Fehlererscheinungen untersuchen und die geeigneten Gegenmaßnahmen besprechen wollen.

2. Einteilung der Fehler und die Grundgleichungen eines Stromwandlers.

Wir können ganz allgemein die bei einem Stromwandler auftretenden Fehler und Fehlerquellen in zwei Kategorien teilen, nämlich in solche, die dem Transformationsprinzip und den zum Bau der Stromwandler verwendeten Materialien anhaften, und in solche, die durch äußere Einflüsse hervorgerufen werden. Trotzdem wir allgemein geneigt sind, die anhaftenden Fehler als die weit wichtigeren anzunehmen, so zeigen uns jedoch neuere Untersuchungen, daß unter Umständen die durch äußere Einflüsse her-

---

[1]) Siehe ETZ 1915, S. 450 sowie Briefe hierzu ETZ 1916, S. 70, 294 und 491 und ebenso Bulletin des SEV. 1915, S. 121.



vorgerufenen Fehler weit größer und viel ernsterer Natur als die inneren Fehler sind und deshalb meist nicht beachtet wurden, weil unsere heutigen Strom- und Spannungswandler-Prüfeinrichtungen höchst unvollkommen sind. Zudem finden die Nachprüfungen solcher Meßapparate meist unter ganz anderen Bedingungen statt, als sie nachher im Betriebe arbeiten müssen. Es ist deshalb unbedingt notwendig, daß hier diese Prüfbestimmungen eine Revision erfahren und sehr zu begrüßen wäre es, wenn namentlich die großen Elektrizitätswerke weit mehr wie bisher zu experimentellen Untersuchungen und Nachprüfungen von Störungen und Fehlerquellen schreiten würden, da sich in der Regel an Ort und Stelle solche Untersuchungen viel besser, mit weniger Kosten und Zeitaufwand ausführen lassen und ein zuverlässigeres Urteil gestatten, als wenn dies im Laboratorium geschieht, wo wohl nie die wirklichen Verhältnisse der Praxis nachgebildet werden können.

Die inneren Fehlerquellen, d. h. die dem Transformationsprinzip anhaftenden Fehler waren bereits mehrfach Gegenstand von Veröffentlichungen und sollen hier zuerst behandelt werden[1]).

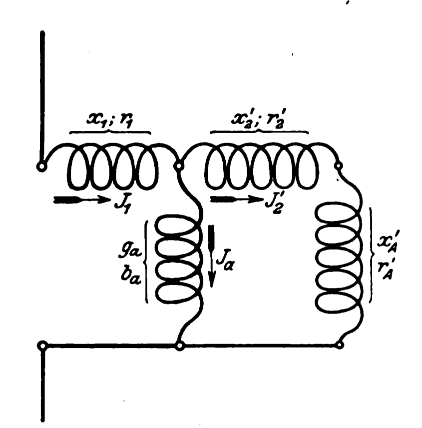


Abb. 1. Ersatzschaltung eines Stromwandlers.

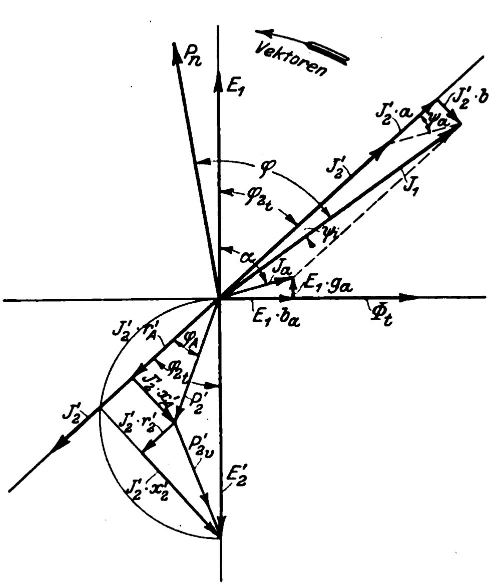


Abb. 2. Allgemeines Stromwandlerdiagramm.

Zur Untersuchung dieser inneren Fehlerquellen sollen hier zuerst die Grundgleichungen für einen Stromwandler aufgestellt werden, wie sie ähnlich vom Verfasser bereits in seiner Arbeit über die Berechnung der Stromwandler aufgestellt wurden.

In Abb. 1 sei die Ersatzschaltung für den Stromwandler aufgezeichnet und es bedeute darin J_1 den Primärstrom oder Netzstrom, x_1 und r_1 die Reaktanz und den Widerstand der Primärwicklung, J_a den Magnetisierungsstrom, dessen Konduktanz g_a und dessen Suszeptanz b_a ist. Infolge der Magnetisierung wird daher im Sekundärkreis der Strom J_2 fließen, entsprechend dem im Schema eingezeichneten reduzierten

[1]) Die wichtigsten diesen Gegenstand behandelnden Arbeiten sind: Görner, Stromwandler, Schweiz. Elektrotechn. Zeitschr. 1906, S. 434 u. ff.. — Keinath, Untersuchungen an Meßtransformatoren. Dissertation. München 1909. — L. T. Robinson, Electr. measurements on circuits requiring current and potential transformers, Proc. Amer. Instit. of Electr. Eng., Bd. 28, S. 981, 1909. — P. G. Agnew, A study of the current transformer with particular reference to iron loss, Bull. of the bur. of stand, Bd. 7, S. 423. — M. G. Lloyd and P. G. Agnew, The regulation of potential transformers and magnetising current, Bull. of the bur. of stand, Bd. 6, S. 273, 1910. — E. Orlich, Über Strom- und Spannungswandler, Helios, 1912. — E. Wirz, Ein Beitrag zur Theorie und Berechnung der Stromwandler, Bulletin des Schweiz. Elektrotechn. Vereins, 1913, S. 365. — Mark L. Harned, Operating Characteristics of Current Transformers, Electrical World, Bd. 67, S. 869, 1916.

Sekundärstrom J_2'. In Abb. 1 bedeute dann ferner x_2' und r_2' auf Primär reduzierte Reaktanz und Widerstand der Sekundärwicklung und ebenso x_A' und r_A' auf Primär reduzierte Reaktanz und Widerstand des äußeren sekundären Belastungsstromkreises.

Wenden wir nun für einen Augenblick die symbolische Schreibweise mit Rechtsdrehung der Vektoren an, wobei $+j$ einer Drehung um 90^0 im Sinne der Voreilung und $-j$ einer Drehung um 90^0 im Sinne der Nacheilung entspricht, so muß aus der Abb. 1 sich der totale primäre Strom ergeben zu

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2' + \mathfrak{J}_a \quad \ldots \quad 1)$$

Aus dem allgemeinen Transformatordiagramm (Abb. 2) läßt sich dann leicht zeigen, daß der Magnetisierungsstrom dargestellt werden kann durch die Beziehung

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_2'(a - jb) \quad \ldots \quad 2)$$

so daß damit der primäre Strom den Wert annimmt

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2'(1 + a - jb) \quad \ldots \quad 3)$$

oder in reellen Werten ausgedrückt

$$J_1 = J_2' \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} \quad \ldots \quad 4)$$

Drücken wir nun noch den Magnetisierungsstrom J_a als Funktion der EMK E_1, der Suszeptanz b_a und der Konduktanz g_a in bezug auf die Spannungsachse $E_1 E_2'$ aus, so ergibt schließlich die Umrechnung auf den Sekundärstrom als Achse für a und b die Werte:

$$\left.\begin{aligned} a &= (r_2' + r_A')\, g_a + (x_2' + x_A')\, b_a \\ b &= (x_2' + x_A')\, g_a - (r_2' + r_A')\, b_a \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5)$$

Damit wird dann das absolute Übersetzungsverhältnis

$$p_i = \frac{J_1}{J_2'} = \sqrt{[1 + (r_2' + r_A')\, g_a + (x_2' + x_A')\, b_a]^2 + [(x_2' + x_A')\, g_a - (r_2' + r_A')\, b_a]^2} \quad . \; . \; 6)$$

oder, indem wir noch den reduzierten Sekundärstrom ausdrücken, ist dann schließlich das wirkliche Übersetzungsverhältnis

$$u_i = \frac{J_1}{J_2} = \frac{w_2}{w_1} \sqrt{[1 + (r_2' + r_A')\, g_a + (x_2' + x_A')\, b_a]^2 + [(x_2' + x_A')\, g_a - (r_2' + r_A')\, b_a]^2} \quad . \; . \; 7)$$

Auf dieselbe Weise läßt sich aus dem Diagramm der Abb. 2 und den Gl. 2) und 3) der Phasenweichungswinkel ψ_i zwischen den Strömen J_2' und J_1 ermitteln. Für diesen ist dann

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{b}{1 + a} = \frac{(x_2' + x_A')\, g_a - (r_2' + r_A')\, b_a}{1 + (x_2' + x_A')\, b_a + (r_2' + r_A')\, g_a} \quad \ldots \quad 8)$$

Wie diese Beziehungen vorerst allgemein zeigen, ist sowohl das Übersetzungsverhältnis als auch die Phasenabweichung von der Magnetisierung und von der sekundären Belastungsimpedanz abhängig. Da jedoch die Faktoren g_a und b_a wiederum eine Funktion des Sekundärstromes und der totalen sekundären Impedanz sind, so können die Verhältnisse am besten dadurch untersucht werden, daß wir die auftretenden Fehler und Abweichungen einmal bei konstanter totaler Sekundärimpedanz und veränderlichem Sekundär- und Primärstrom untersuchen und ein zweites Mal bei veränderlicher totaler Sekundärimpedanz und konstantem Sekundärstrom.

Im ersteren Falle, wenn also x_A' und r_A' konstante Faktoren sind, können die Gl. 6), 7) und 8) noch etwas umgeformt werden.

Gehen wir zuerst von Gl. 4) aus und nehmen den Faktor $(1 + a)^2$ aus der Wurzel heraus, so läßt sich mit Hilfe der Gl. 8) der absolute Übersetzungsfaktor p_i auch schreiben



$$p_1 = (1 + a)\sqrt{1 + \left(\frac{b}{1 + a}\right)^2} = (1 + a)\sqrt{1 + tg^2 \psi_1} = \frac{1 + a}{\cos \psi_1} \quad . \; . \; . \; . \quad 9)$$

woraus hauptsächlich die Abhängigkeit des absoluten Übersetzungsfaktors von der Winkelabweichung hervorgeht und uns zeigt, daß bei kleiner Winkelabweichung der Übersetzungsfaktor durch dieselbe fast nicht beeinflußt wird.

Dividieren wir schließlich noch in Gl. 8) sämtliche Glieder von Zähler und Nenner durch $(r_2' + r_A') g_a$, so stellt dann nach dem allgemeinen Stromwandlerdiagramm der Abb. 2

$$\frac{x_2' + x_A'}{r_2' + r_A'} = tg\, \varphi_{2t} \qquad \text{und ferner} \qquad \frac{b_a}{g_a} = tg\, \alpha \text{ dar.}$$

Damit geht die Gl. 8) über in

$$tg\, \psi_1 = \frac{tg\, \varphi_{2t} - tg\, \alpha}{\frac{1}{(r_2' + r_A') g_a} + 1 + tg\, \varphi_{2t} \cdot tg\, \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

Auf dieselbe Weise erhält man dann schließlich für den absoluten Übersetzungsfaktor p_1 und das Übersetzungsverhältnis u_1 die Beziehungen:

$$p_1 = \frac{1 + (r_2' + r_A') g_a \cdot (1 + tg\, \varphi_{2t} \cdot tg\, \alpha)}{\cos \psi_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

$$u_1 = \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{1 + (r_2' + r_A') g_a \cdot (1 + tg\, \varphi_{2t} \cdot tg\, \alpha)}{\cos \psi_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Diese drei Gleichungen leisten nun außerordentlich wertvolle Dienste bei der Untersuchung der einzelnen Fehlerquellen, da aus ihnen so ziemlich alles Wissenswerte der internen Fehlerquellen, ausschließlich derjenigen Erscheinungen infolge der Kurvenform und der Sättigung ermittelt werden kann.

Wie diese drei Beziehungen ergeben, ist die Winkelabweichung und das Übersetzungsverhältnis von der Größe der totalen Phasenverschiebung im Sekundärkreis, von der Phasenverschiebung des Magnetisierungsstromes gegenüber der primären EMK E_1, von dem totalen Widerstand des Sekundärkreises und von der Konduktanz g_a der Magnetisierung abhängig.

Für einen stationären Stromwandler, welcher einmal im Betrieb ist, sind der totale sekundäre Widerstand und die totale sekundäre Phasenverschiebung konstante Faktoren und es treten daher nur $tg\, \alpha$ und g_a als veränderliche Größen auf. Bei Kontroll- und Präzisionsstromwandlern dagegen ändert sich je nach der Art der Messung die Belastung im Sekundärkreis, so daß dort auch die Abhängigkeit von der Belastung erforderlich wird. Wir werden uns deshalb im Folgenden zuerst auf den einfacheren Fall mit konstanter Sekundärbelastung beschränken und nun zuerst noch zeigen, was für ein Zusammenhang zwischen der Magnetisierung und den Faktoren g_a und b_a besteht.

Wie bereits früher in der Arbeit über die Stromwandlerberechnung gezeigt wurde, sind g_a und b_a von den Dimensionen des Eisenkörpers, von der totalen Amperewindungszahl und von der Verlust- und Magnetisierungskurve des verwendeten Eisenbleches abhängig. Zudem spielt auch die Art der Zusammensetzung des Eisenkörpers eine gewisse Rolle.

Für einen vollkommen geschlossenen Eisenkern, welcher überall gleichen Querschnitt besitzt, gelten die einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} g_a &= \frac{l_{ei}\, w_{ei}\, \gamma_{ei}\, 10^{+13}}{q_{ei}\, w_1^2 (4{,}44\, f\, B_{max})^2} \\ b_a &= \frac{l_{ei}\, a w_{ei}\, 10^{+8}}{\sqrt{2}\, q_{ei}\, w_1^2\, 4{,}44\, f\, B_{max}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13)$$

worin l_{ei} die mittlere Kraftlinienlänge im Eisen, q_{ei} der Eisenquerschnitt, w_1 die primäre Windungszahl, f die Frequenz, B_{max} die Eiseninduktion, γ_{ei} das spezifische Gewicht des Eisens, w_{ei} der Verlust pro Kilogramm Eisen in Watt und $a w_{ei}$ die Amperewindungszahl pro cm Kraftlinienlänge im Eisen bedeuten.

Da sich die Eisenverluste aus den Hysterese- und Wirbelstromverlusten zusammensetzen, so wird die Abhängigkeit von g_a von der Induktion B_{max} verschiedenartig sein, je nachdem die Hysterese- oder die Wirbelstromverluste überwiegen. Im allgemeinen ist die Form der g_a-Kurve hyperbolischer Natur, kann jedoch, wenn die Hystereseverluste sehr klein gegenüber den Wirbelstromverlusten werden, wie dies bei chemisch reinem Eisen und bei Eisenkobaltlegierungen der Fall ist, geradlinige Form annehmen. Die Form der b_a-Kurve dagegen hängt ausschließlich von der statischen Magnetisierungskurve ab und besitzt ungefähr im Knie der Magnetisierungskurve ihren kleinsten Wert, welcher jedoch für Stromwandler nicht in Betracht kommt, da man hier bei viel kleineren Werten der Induktion arbeitet.

Sind im Eisenkörper noch Stoßfugen vorhanden, wie solche namentlich bei größeren Stromwandlertypen nicht vermieden werden können, so sind außerdem bei der Suszeptanz b_a die Amperewindungen für diese Stoßfugen zu berücksichtigen. Durch die Stoßfugen tritt aber zudem eine Erhöhung der Eisenverluste in der Nähe der Stoßfugen auf, so daß dadurch die gesamten Eisenverluste etwas größer werden und in Gl. 13) etwa um 6 bis 8% höhere Verluste einzusetzen sind.

Mit Berücksichtigung der Stoßfugen ist dann die Suszeptanz

$$b_a = \frac{l_{ei}\, a w_{ei} + 0{,}8\, \alpha_s\, \delta_0\, B_{max}}{\sqrt{2}\, q_{ei}\, w_1^2\, 4{,}44\, f\, B_{max}} \cdot 10^8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

worin α_s die Anzahl der Stoßfugen und δ_0 die äquivalente Luftstrecke einschließlich der Papierzwischenlage in cm bedeuten.

Hierin ist jedoch, wie bereits in der früheren Arbeit gezeigt wurde, δ_0 von der Eiseninduktion abhängig und nimmt verschiedene Werte an, je nachdem es sich um verzapfte, um bearbeitete oder unbearbeitete unter Druck stehende Stoßfugen handelt. Diese Stoßfugen-Amperewindungszahlen dürfen beim Stromwandler niemals vernachlässigt werden, da sie unter Umständen einen erheblichen Teil von den gesamten Eisen-Amperewindungen ausmachen können. Hierauf wird weiter unten noch näher eingegangen.

Wird der Eisenkörper aus Wirtschaftlichkeitsgründen so konstruiert, daß er an verschiedenen Stellen verschieden großen Querschnitt, also auch verschieden große Eisenbeanspruchungen besitzt, so müssen für jedes Stück die Verluste und AW-Zahlen pro cm Kraftlinienlänge für die betreffenden Eiseninduktionen getrennt ermittelt werden.

In diesem Falle erhalten wir dann für die Konduktanz und die Suszeptanz die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} g_a &= \frac{l_{ei1}\, q_{ei1}\, w_{ei1} + l_{ei2}\, q_{ei2}\, w_{2ei} + l_{ei3}\, q_{ei3}\, w_{3ei} + \cdots}{q^2_{eik}\, w_1^2\, (4{,}44\, f\, B_{max})^2} \cdot \gamma_{ei} \cdot 10^{13} \\ b_a &= \frac{l_{ei1}\, a w_{ei1} + l_{ei2}\, a w_{ei2} + l_{ei3}\, a w_{ei3} + \ldots 0{,}8\, \alpha_s\, \delta_0\, B_{max}}{\sqrt{2}\, w_1^2\, q_{eik}\, 4{,}44\, f\, B_{max}} \cdot 10^8 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 15)$$

Hierin haben die einzelnen Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in Gl. 14) und 13), nur beziehen sie sich entsprechend den Indizes auf die einzelnen Kernstücke. q_{eik} bedeutet den aktiven Kernquerschnitt.

Wie uns Gl. 15) aussagt, können wir offenbar durch ganz verschiedene Dimensionierungen des Eisenkörpers dieselben qualitativen magnetischen Eigenschaften erhalten, wie wenn wir dem Eisenkörper überall gleichen Querschnitt geben, nur wird dabei das Material besser ausgenützt, so daß damit eine wesentliche Materialersparnis zu erwarten ist.



Legen wir nun unseren Betrachtungen über die Fehlerquellen, die allein von der Eisenmagnetisierung herrühren, einen vollkommen geschlossenen Eisenkern zugrunde, so können wir daran am zweckmäßigsten die Verhältnisse studieren, da dann nur wenige veränderliche Größen auftreten.

Durch Gl. 10), 11) und 12) haben wir kennen gelernt, daß das Übersetzungsverhältnis und die Winkelabweichung hauptsächlich von dem Phasenverschiebungswinkel α zwischen dem Magnetisierungsstrom und seiner Wattkomponente, sowie von der Veränderlichkeit und Größe der Konduktanz g_a abhängig ist. Für den Winkel α ergibt sich nun für einen vollständig geschlossenen Eisenkern aus Gl. 13:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_a}{g_a} = \frac{a w_{ei}\, 4{,}44\, f\, B_{max}\, 10^{-5}}{w_{ei}\, \gamma_{ei}\, \sqrt{2}} = \frac{a w_{ei}}{w_{ei}} \cdot B_{max} \cdot \frac{\pi f}{\gamma_{ei}} \cdot 10^{-5} \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

d. h. bei einem vollkommen geschlossenen Eisenkern ist die Größe dieses Winkels ganz unabhängig von den Dimensionen des Eisenkernes und nur abhängig von der Magnetisierungs- und Verlustkurve, beziehungsweise von der Induktion bei konstanter Frequenz.

In diesem Falle tritt deshalb bei konstanter Frequenz nur als veränderlicher Faktor

$$\frac{a w_{ei}}{w_{ei}} B_{max} = \frac{f_1(B)}{f_2(B)} B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

auf, welcher je nach der Gesetzmäßigkeit, die die $a w_{ei}$- und w_{ei}-Kurve befolgen einen verschiedenartigen Verlauf nehmen kann. So z. B. zeigt dieser Faktor bei gewöhnlichem Dynamoblech, bei verschieden legierten Blechen, bei Eisen-Kobalt-Legierungen und bei annähernd reinem Eisen als Funktion der Eiseninduktion ein voneinander ganz abweichendes Verhalten. Gewöhnliches Dynamoblech gibt bei den bei Stromwandlern üblichen Induktionen eine teilweise nach abwärts und teilweise nach aufwärts stark gekrümmte Kurve, während legierte Bleche, Eisen-Kobalt-Legierungen und annähernd reines Eisen Kurven ergeben, die sich mehr und mehr einer geraden Linie nähern. Diese Erscheinungen sind außerordentlich wichtig für die Fehlerkurven der Stromwandler, da durch sie der charakteristische Verlauf derselben und damit die Größe der auftretenden Fehler bestimmt wird. Dies trifft jedoch nur so lange zu, als keine Stoßfugen oder sonstige Luftstrecken und auch keine Sättigungsstege im Eisenkörper vorhanden sind. Sind solche vorhanden, so wird die Kurve für $\operatorname{tg}\alpha$ meist für sonst vorzügliche Blechqualitäten derart geändert, daß sie sich stark derjenigen einer minderwertigen Blechqualität nähert, weil durch die Stoßfugen, wie Gl. 14) und 15) zeigen, die Amperewindungszahl pro cm Kraftlinienlänge rapid zunimmt. Auf diese Erscheinungen werden wir weiter unten noch speziell zu sprechen kommen und wollen uns vorerst nur mit unseren Betrachtungen auf einen vollkommen geschlossenen Eisenkern beschränken.

3. Interne Fehlererscheinungen und Diskussion der Hauptgleichungen.

a) Einfluß der Magnetisierungs- und Verlustkurve. Wir untersuchen zunächst den Einfluß der Magnetisierungskurve und der Verlustkurve. Da man heute wohl allgemein im Stromwandlerbau nur hochlegierte Eisenbleche verwendet, so legen wir unseren Untersuchungen in der Hauptsache nur solche zugrunde, werden jedoch an gegebener Stelle auch den Einfluß anderer Blechqualitäten zum Vergleiche besprechen.

In Abb. 3 sind die statistische Magnetisierungskurve und die Verlustkurve für legiertes Blech von 0,5 mm Stärke mit einer Verlustziffer $v_{10} = 1{,}75$ Watt/kg (Kurve 2 und II), sowie diejenigen für gewöhnliches Dynamoblech (Kurve 1 und I) als Funktion der Eiseninduktion bei 50 Perioden bis etwa $B_{max} = 5000$ Maxwell/cm² aufgezeichnet.

Vergleichen wir vorerst nur kurz die beiden Magnetisierungskurven miteinander, so zeigt schon Abb. 3, daß offenbar die aus Gl. 16) berechneten Werte für den Winkel α



für beide Blechsorten einen ganz verschiedenen Verlauf nehmen müssen und daß dieser Winkel um so kleiner wird, je kleiner für die betreffende Induktion die aw_{el}-Zahlen sind und je mehr sich die aw_{el}-Kurve der Abszissenachse nähert. Zudem spielt auch der Verlauf der Magnetisierungskurve eine enorm wichtige Rolle und da zeigt uns Abb. 3, daß offenbar der Verlauf derselben bei legiertem Blech bedeutend günstiger ist, als bei gewöhnlichem Dynamoblech und daher bei ersterem sich bessere Fehlerkurven ergeben müssen.

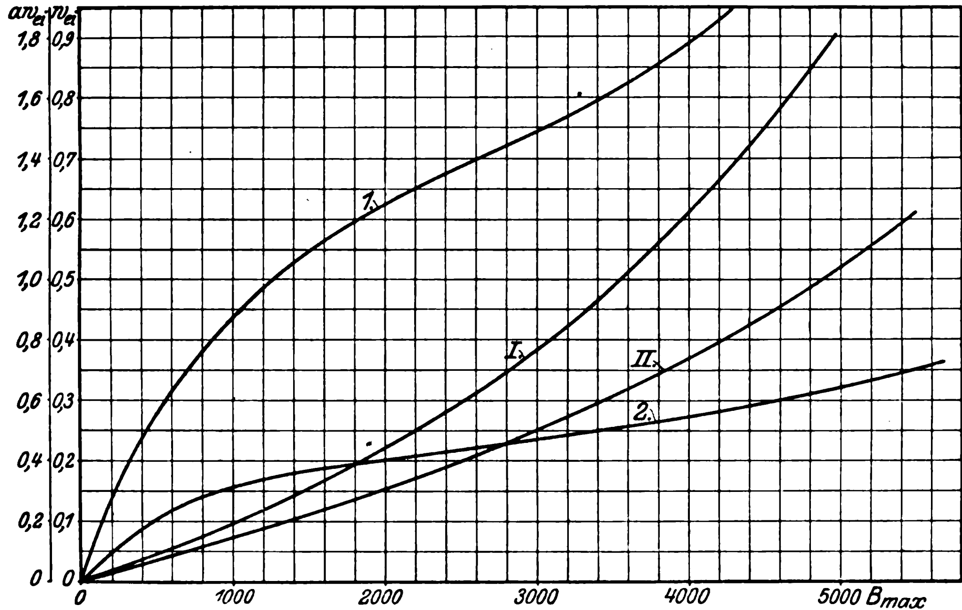


Abb. 3. Verlust- und Magnetisierungskurven für gewöhnliches und legiertes Blech bei 50 Perioden.
Kurve I, 1: Verlust- und Magnetisierungskurven für gewöhnliches Blech.
Kurve II, 2: Verlust- und Magnetisierungskurven für legiertes Blech.

Wir berechnen nun aus Gl. 16) für einen stoßfugenlosen Eisenkern und für legiertes Blech die Größe von $\operatorname{tg} \alpha$ und zwar für 50 und 25 Perioden und erhalten folgende Tabelle. In der Tabelle sind außerdem einige Werte für gewöhnliches Dynamoblech zum Vergleiche bei 50 Perioden eingetragen.

Tabelle I.

B_{max}	leg. Blech 50 Perioden					leg. Blech 25 Perioden				gewöhnl. Blech 50 Perioden			
	$a w_{el}$	w_{el}	$\frac{a w_{el}}{w_{el}} B$	$\operatorname{tg} \alpha$	α^0	w_{el}	$\frac{a w_{el}}{w_{el}} B$	$\operatorname{tg} \alpha$	α^0	$a w_{el}$	w_{el}	$\frac{a w_{el}}{w_{el}} B$	$\operatorname{tg} \alpha$
50	0,025	0,0027	463,7	0,0964	5° 30,4′	0,0013	961	0,10	5° 43′				
100	0,045	0,0062	720	0,1497	8° 30,7′	0,003	1500	0,157	8° 55,3′	0,155	0,01	1550	0,312
200	0,000	0,0125	1400	0,2915	16° 15′	0,0055	3270	0,3425	18° 54,4′				
400	0,165	0,027	2445	0,509	26° 58,6′	0,011	6000	0,625	32° 0,3′	0,48	0,036	3335	1,0725
600	0,225	0,040	3375	0,7025	35° 5,2′	0,0175	7720	0,803	38° 46′				
800	0,275	0,055	4000	0,833	39° 47,7′	0,026	8455	0,880	41° 21′	0,765	0,075	8160	1,642
1000	0,310	0,070	4430	0,923	42° 42,2′	0,034	9120	0,948	43° 29,8′	0,87	0,0975	8925	1,793
1250	0,3425	0,090	4760	0,991	44° 44,6′	0,045	9520	0,990	44° 42,8′				
1500	0,366	0,110	4995	1,0385	46° 4′	0,056	9810	1,02	45° 33,3′	1,095	0,155	10600	2,135
1750	0,385	0,130	5180	1,078	47° 6,7′	0,068	9910	1,031	45° 51,6′				
2000	0,405	0,1525	5310	1,103	47° 50′	0,080	10120	1,052	46° 26,7′	1,26	0,22	11460	2,305
2500	0,433	0,20	5410	1,125	48° 21,7′	0,1045	10360	1,078	47° —				
3000	0,467	0,25	5605	1,167	49° 24,3′	0,1325	10575	1,10	47° 43′	1,545	0,378	12260	2,465
4000	0,545	0,3675	5940	1,236	51° 1,3′	0,190	11475	1,1925	50° 0,7′	1,860	0,605	12300	2,475
5000	0,640	0,517	6190	1,288	52° 10′	0,250	12800	1,332	53° 6,2′	2,265	0,907	12480	2,517

Tragen wir diese Werte für tg α und α als Funktion der Induktion auf, so erhalten wir die in Abb. 4 aufgezeichneten Kurven. Auf den ersten Blick zeigen diese wiederum einen ähnlichen Verlauf wie die Magnetisierungskurven der Abb. 3, daß heißt mit andern Worten, daß dieser Winkel α in seinem Verlauf durch die Magnetisierungskurve bestimmt wird. Auffallend ist die starke Abnahme dieses Winkels bei kleinen Induktionen, wodurch auch unbedingt eine starke Beeinflussung der Fehlerkurven bei kleinen Induktionen eintreten muß. Dies geht ja auch ohne weiteres aus den Gl. 10), 11) und 12) hervor, worin tg α eine sehr große Rolle spielt, jedoch hat auch der Eisenverlust einen sehr großen Einfluß auf die Größe dieses Winkels, indem ein kleiner Eisenverlust den Wert für tg α vergrößert und ein großer Verlust ihn verkleinert.

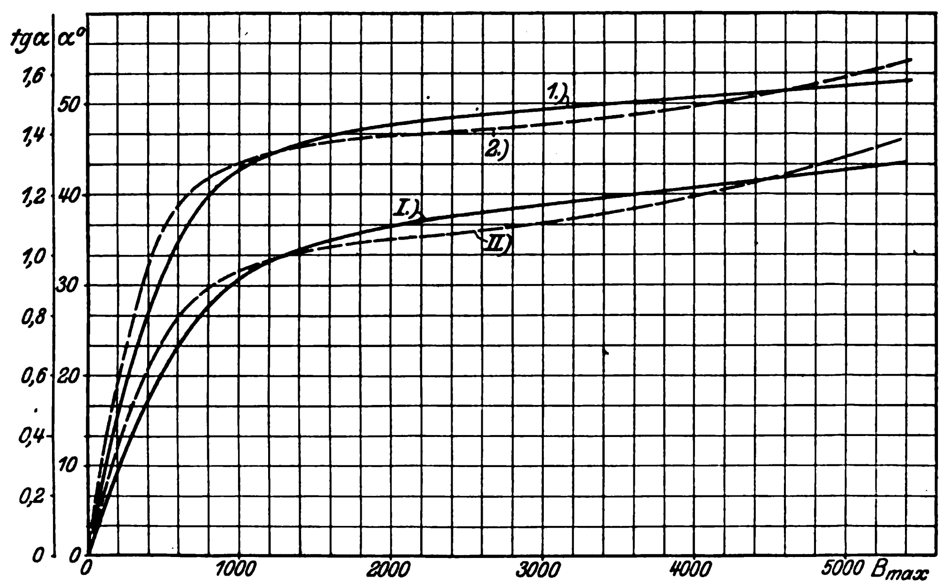


Abb. 4. **Abhängigkeit des Phasenwinkels α als Funktion der Induktion B.**

Kurve 1: α „ I: tg α } bei 50 Perioden — Kurve 2: α „ II: tg α } bei 25 Perioden.

Man könnte sich daher nach den Kurven der Abb. 4 und der Gl. 16) sehr leicht zu dem Trugschlusse verleiten lassen, daß gerade dieser Winkel α nach Verlauf und Größe allein für die Größe der auftretenden Fehler maßgebend sei. Dies ist jedoch, wie eine nähere Untersuchung zeigt, nicht der Fall, da als zweite veränderliche Größe in diesen Gleichungen die Konduktanz g_a der Primärwicklung auftritt, die auch von den Eisenverlusten und der Induktion abhängt. Soviel zeigen uns aber doch die Kurven der Abb. 4, daß wir bei einem neu zu entwerfenden Stromwandler die Eiseninduktion nicht ganz beliebig wählen dürfen, sondern stets darauf bedacht sein müssen, daß der Stromwandler normal bei einer solchen Induktion innerhalb eines Meßbereiches arbeitet, bei welcher dieser Winkel α die kleinste Veränderung erleidet und dies tritt nach Abb. 4 bei einer Eisenbeanspruchung $B_{max} \gtreqless 800$ Maxwell/cm² ein. Über $B_{max} = 5000$ Maxwell/cm² wird man schon aus Sättigungsgründen nicht gehen dürfen, da oberhalb diesem Wert der Stromwandler wiederum zu große Fehler ergeben würde und zudem der beträchtliche Mehraufwand an Material schon bei kleineren Eisenbeanspruchungen Halt gebietet.

Nun steht aber die Wahl der Eiseninduktion auch mit der Größe der totalen Amperewindungszahl eines Stromwandlers im engen Zusammenhange und diese bewirkt mit zunehmender Größe wiederum eine Reduktion der Konduktanz g_a, so daß dadurch sowohl der Übersetzungsfehler als auch die Winkelabweichung verbessert wird und



deshalb auch, wie die Kurven der Abb. 4, für eine höhere Eisenbeanspruchung sprechen. Dem steht jedoch, wie bereits oben erwähnt wurde, der wirtschaftliche Aufbau eines Stromwandlers stark im Wege, da es für eine marktfähige Type nicht gleichgültig ist, ob günstige Fehlerverhältnisse bei einer Materialverschwendung oder bei einer guten Materialausnützung erreicht werden.

Gerade diese Erscheinungen zwingen uns die Fehlerquellen nach allen nur möglichen Richtungen zu untersuchen, damit wir Klarheit bekommen, welche Maßnahmen wir von Fall zu Fall zu ergreifen haben.

Wie uns nun weiter die Gl. 10) bis 12) lehren, hängt noch eine weitere Erscheinung mit diesem Winkel α zusammen, indem die Winkelabweichung bei kleiner sekundärer Phasenverschiebung φ_{2t} stärker in Mitleidenschaft gezogen wird, als das Übersetzungsverhältnis. Bei großen totalen sekundären Phasenverschiebungen φ_{2t} dagegen wird die Beeinflussung beider sehr groß. Diese Abweichungen können jedoch, wie die Erfahrung lehrt, durch eine Vergrößerung der totalen Amperewindungszahl auf Kosten des wirtschaftlichen Aufbaues wieder herabgesetzt werden, da mit zunehmender Amperewindungszahl die Eiseninduktion zunimmt und nach Gl. 13) die Konduktanz g_a mit dem Quadrate der Windungszahl reduziert wird. Diese Verbesserung der Fehler geschieht daher nicht allein mit dem Winkel α, da von etwa $B_{max} = 1000$ Maxwell/cm² an aufwärts derselbe nur sehr wenig zunimmt, so daß wir zunächst die Abhängigkeit der Konduktanz g_a von der Eiseninduktion untersuchen müssen.

Wir setzen zu diesem Zwecke wiederum einen vollständig geschlossenen Eisenkern voraus und legen unseren Betrachtungen Gl. 13) zugrunde.

Bei unseren bisherigen Untersuchungen haben wir stillschweigend sinusförmige Kurvenform der Spannungskurve vorausgesetzt und wollen nun im folgenden auch eine beliebige Kurvenform in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen. An den Gl. 13) bis 16) ändert sich in der Hauptsache nur der Faktor 4,44, da wir nunmehr an seine Stelle den Faktor $4 \cdot f_\varepsilon$ setzen müssen, wenn f_ε den Formfaktor der Kurvenform bedeutet. Damit wird aber auch nach Gl. 16) der Winkel α mit der Größe dieses Formfaktors geändert, da die Suszeptanz b_a umgekehrt proportional dem Formfaktor und die Konduktanz g_a umgekehrt proportional dem Quadrate des Formfaktors ist. Wir wollen uns aber vorerst nicht auf diese Abhängigkeit einlassen, da wir später beim Einfluß der Periodenzahl darauf zurückkommen werden und es uns nur darum zu tun ist, allgemein gültige Gleichungen aufzustellen.

Für eine ganz beliebige Kurvenform ist daher jetzt die Größe der Konduktanz bestimmt durch:

$$g_a = \frac{l_{ei}\, w_{ei}\, \gamma_{ei}\, 10^{13}}{q_{ei}\, w_1^{\,2} (4\, f_\varepsilon\, f\, B_{max})^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 18)$$

Wie die vorhergehenden Untersuchungen gezeigt haben, ist in der Regel die Abhängigkeit der Übersetzungsfehler und der Winkelabweichung von der Größe der Induktion hauptsächlich durch die Konduktanz g_a bedingt.

Wir untersuchen deshalb zuerst in Gl. 18) den Zusammenhang zwischen den Eisenverlusten w_{ei} pro kg Eisen und der Eiseninduktion B_{max}.

Da sich die gesamten Eisenverluste zusammensetzen aus den Hysterese- und den Wirbelstromverlusten, so können wir für w_{ei} setzen

$$w_{ei} = w_h + w_w = \sigma_h \left(\frac{f}{100}\right) \left(\frac{B_{max}}{1000}\right)^{1,6} \cdot \frac{1}{\gamma_{ei}} + \sigma_w \left(\varDelta \frac{f}{100} \frac{f_\varepsilon \cdot B_{max}}{1000}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{ei}} \quad . \; . \; . \; 19)$$

worin $\varDelta =$ die Blechstärke bedeutet.

Setzen wir diesen Wert in Gl. 18) ein, so ergibt sich schließlich für die Konduktanz g_a die Beziehung:

$$g_a = \frac{l_{ei}}{q_{ei}\, w_1^{\,2}} \cdot \left(\frac{\sigma_h\, 10^{6,8}}{16\, f_\varepsilon^2\, f\, B_{max}^{0,4}} + \frac{\sigma_w\, \varDelta^2\, 10^3}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 20)$$

Hierin bedeuten dann die Faktoren σ_h und σ_w die Hysterese- und Wirbelstromkonstanten, die beide etwas von der Induktion abhängen, jedoch können wir dieselben bei den bei Stromwandlern üblichen Induktionen und Periodenzahlen als annähernd konstant ansehen.

Aus Gl. 20) folgt daher, daß sich die Konduktanz g_a aus zwei Teilen zusammensetzt, nämlich aus einem annähernd konstanten Teil, welcher von den Wirbelströmen im Eisen herrührt und aus einem von der Hysterese im Eisen herrührenden Teil. Nun wissen wir auch bereits, daß diejenigen Verluste, welche durch die Hysterese hervorgerufen werden, in der Regel bedeutend größer sind als diejenigen, welche durch die Wirbelströme verursacht werden. Ferner wissen wir auch, daß das Steinmetzsche Gesetz, welches uns angibt, daß der Hystereseverlust ungefähr proportional mit der 1,6ten Potenz der Induktion wächst, nicht über den ganzen Verlauf der Magnetisierungskurve zutrifft und zudem auch noch von der Beschaffenheit des Materials nicht unerheblich abhängt, so daß durch eine zweckmäßige Wahl der Eiseninduktion und des Materials die Abhängigkeit der Konduktanz g_a in ganz verschiedener Richtung beeinflußt werden kann. Betrachten wir einmal Gl. 20) etwas näher, so sehen wir, daß der von der Hysterese herrührende Teil mit zunehmender Induktion abnimmt und der von den Wirbelströmen herrührende Teil scheinbar konstant bleibt, oder wenn er sich verändert, mit zunehmender Induktion zunimmt.

Diese Erscheinung ist von außerordentlich großer Bedeutung für die Fehler bei einem Stromwandler, da sich offenbar diese beiden Teile derart aufeinander abstimmen lassen, daß im Bereiche bestimmter Induktionen die Konduktanz g_a sich nur wenig ändert oder sogar vollständig konstant bleibt. Auf diese Erscheinung weist bereits Agnew[1]) und später auch Orlich[2]) hin, jedoch ohne die Verhältnisse rechnerisch oder experimentell abzuklären, indem diese Autoren einfach angeben, daß hierbei nur das Gesetz der Hysterese, welches in der Hauptsache die Verluste befolgen, ausschlaggebend sei. Dies trifft jedoch nur so lange zu, wie Gl. 20) zeigt, solange die Wirbelstromverluste im Eisen vernachlässigbar klein gegenüber den Hystereseverlusten und dieselben zudem annähernd konstant sind, wie dies ungefähr bei vollkommen geschlossenem Eisenkern aus sehr dünnen Blechen der Fall ist. Sind dagegen Stoßfugen vorhanden, so werden dadurch die Wirbelstromverluste ganz wesentlich erhöht, und der Wirbelstromfaktor σ_w ändert sich dann mit der Induktion entsprechend der Stoßfugenzusammensetzung derart, daß er mit zunehmender Induktion zunimmt oder unter Umständen sogar abnimmt.

Wir können daher beim Stromwandler sowohl durch die Qualität des verwendeten Eisenbleches als auch durch die Konstruktion des Eisenkörpers bzw. der Stoßfugen die Fehlerverhältnisse in ganz verschiedenen Richtungen beeinflussen, so daß es unter Beachtung aller dieser magnetischen Eigenschaften möglich sein muß, praktisch genügend gute Fehlerkurven zu erhalten. Dies ist um so mehr der Fall, als es in neuester Zeit gelungen ist, solche ferromagnetische Materialien herzustellen, die äußerst kleine Hystereseverluste aufweisen, wie z. B. hochlegierte Transformatorenbleche, Elektrolyteisen und einige Eisen-Kobalt-Legierungen, bei welch letzteren außerdem noch die Hystereseverluste bei kleinen Induktionen nicht mit der 1,6ten Potenz der Induktion wachsen, sondern ihr Exponent näher bei 2 liegt, was wiederum nach Gl. 20) ein Vorteil bedeutet. Wir werden auf diese Erscheinungen noch mehrfach bei den Fehlerkurven verschiedener Stromwandler zu sprechen kommen.

Wir können nun diese Abhängigkeit der Konduktanz g_a von der Größe der Induktion am besten an einem Rechnungsbeispiel zeigen, indem wir die Verlustkurven der Abb. 3 für legiertes und gewöhnliches Blech zugrunde legen und für einen gege-

[1]) Orlich, Über Strom- und Spannungswandler, Helios, 1912, Sonderdruck S. 21.
[2]) Agnew, Bull. of the bur. of stand., Bd. 7, S. 439ff, 1911.



benen Eisenkern und eine beliebige Windungszahl bei sinusförmiger Spannungskurve g_a als Funktion der Induktion berechnen. Da nun aber in den späteren Rechnungen für die Fehlerkurven nach den Gl. 10) bis 12) g_a in Verbindung mit dem totalen reduzierten Sekundärwiderstand $r_{2t}' = r_2' + r_A'$ vorkommt und je nach der Größe des Primärstroms, für welchen der Stromwandler bestimmt ist, sich die primäre Windungszahl ändert, ist es zweckmäßig, die Koduktanz g_a auf das Sekundärsystem zu reduzieren, da die Stromwandler meistens für eine konstante Sekundärstromstärke gebaut werden, wodurch innerhalb ein und derselben totalen Amperewindungszahl die sekundäre Windungszahl konstant bleibt.

Es ist dann

$$g_a r_{2t}' = g_a'' r_{2t}, \quad \text{da} \quad r_{2t}' = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 r_{2t} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 (r_2 + r_A)$$

ist, so daß nun ähnlich wie in Gl. 13) g_a'' wird

$$g_a'' = \frac{l_{ei}\, w_{ei}\, \gamma_{ei}\, 10^{13}}{q_{ei}\, w_2^2 (4{,}44\, f B_{max})^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

An Stelle von w_1 tritt also nur die sekundäre Windungszahl w_2, sonst ändert sich der übrige Ausdruck nicht.

Für unser Beispiel wählen wir einen Stromwandler mit einem Querschnitt von $q_{ei} = 7{,}35$ cm² und einer mittleren Kraftlinienlänge von $l_{ei} = 35{,}6$ cm. Ferner legen wir der Rechnung die Windungszahlen $w_2 = 80$ und $w_2 = 240$ Windungen entsprechend den Amperewindungszahlen $AW_t = 400$ und 1200 bei 5 Ampere Sekundärstrom zugrunde und beschränken uns auf die Frequenz 50.

Dann ist nach Gl. 20) der Ausdruck vor der Klammer

$$\text{bei } w_2 = 80 \text{ Wdg.} \quad \frac{l_{ei}}{q_{ei}\, w_2^2} = 7{,}57 \cdot 10^{-4}$$

und

$$\text{bei } w_2 = 240 \text{ Wdg.} \quad \frac{l_{ei}}{q_{ei}\, w_2^2} = 8{,}41 \cdot 10^{-5}.$$

Nehmen wir eine Blechstärke von $\Delta = 0{,}5$ mm an und einen Wirbelstromfaktor $\sigma_w = 0{,}45$ für legierte Bleche und $\sigma_w = 1{,}4$ für gewöhnliche Bleche, so wird der konstante Teil der Konduktanz g_a'', welcher von den Wirbelströmen herrührt:

bei $w_2 = 80$ Wdg. $k_w = 0{,}005325$ für leg. Bleche und $k_w = 0{,}01656$ für gew. Bleche,
bei $w_2 = 240$ Wdg. $k_w = 0{,}000592$ für leg. Bleche und $k_w = 0{,}00184$ für gew. Bleche.

Bezeichnen wir ebenso mit k_h denjenigen Teil der Konduktanz g_a'', welcher von der Hysterese herrührt, so ergibt sich für diesen Teil und die ganze Konduktanz g_a', folgende Tabelle.

Tabelle II.

B	Legiertes Blech				Gewöhnliches Blech	
	g_a'' für $w_2 = 80$	k_h für $w_2 = 80$	g_a'' für $w_2 = 240$	k_h für $w_2 = 240$	g_a'' für $w_2 = 240$	k_h für $w_2 = 240$
50	1,2525	1,2471	0,1391	0,1385		
100	0,725	0,7197	0,0805	0,0799		
200	0,3625	0,3572	0,0403	0,0397	0,058	0,05616
400	0,196	0,1907	0,02177	0,02118		
600	0,1288	0,1235	0,0143	0,01371		
800	0,0998	0,09447	0,01108	0,01049		
1000	0,0811	0,07577	0,00901	0,008418	0,01223	0,01039
1500	0,0568	0,05147	0,0063	0,005708		
2000	0,04274	0,03741	0,004745	0,004153		
2500	0,0371	0,03177	0,00412	0,003528	0,00721	0,00537
3000	0,03225	0,02692	0,00358	0,002988		
4000	0,02565	0,02032	0,00296	0,002368		
5000	0,024	0,01867	0,002665	0,002073	0,00567	0,00383

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, bilden die Hystereseverluste den weitaus größeren Teil von g_a'' und bei kleinen Induktionen verschwindet sogar der von den Wirbelströmen im Eisen herrührende Teil fast vollständig. Da aber in Wirklichkeit σ_w etwas von der Induktion abhängt, d. h. mit derselben zunimmt, so folgt daraus, daß die Wirbelstromverluste die Konduktanz g_a'' nicht wesentlich im günstigen Sinne beeinflussen können, sondern in der Hauptsache nur eine Vergrößerung derselben bedingen, was nach Gl. 10) bis 12) eine Vergrößerung der Fehler bei gleicher totaler Amperewindungszahl verursachen würde.

Gerade in dieser Richtung wurde früher sehr häufig versucht, die Fehlerkurven zu verbessern, wie namentlich ältere Stromwandlertypen zeigen, indem man durch künstliche Vergrößerung der Wirbelstromverluste den ungünstigen Einfluß der Hystereseverluste herabzusetzen versuchte, jedoch, wie es scheint, ohne allzu großen Erfolg, da dadurch wiederum eine nicht unwesentliche Vergrößerung der Konduktanz hervorgerufen wird, welche wiederum nur durch eine größere Amperewindungszahl ausgeglichen werden kann.

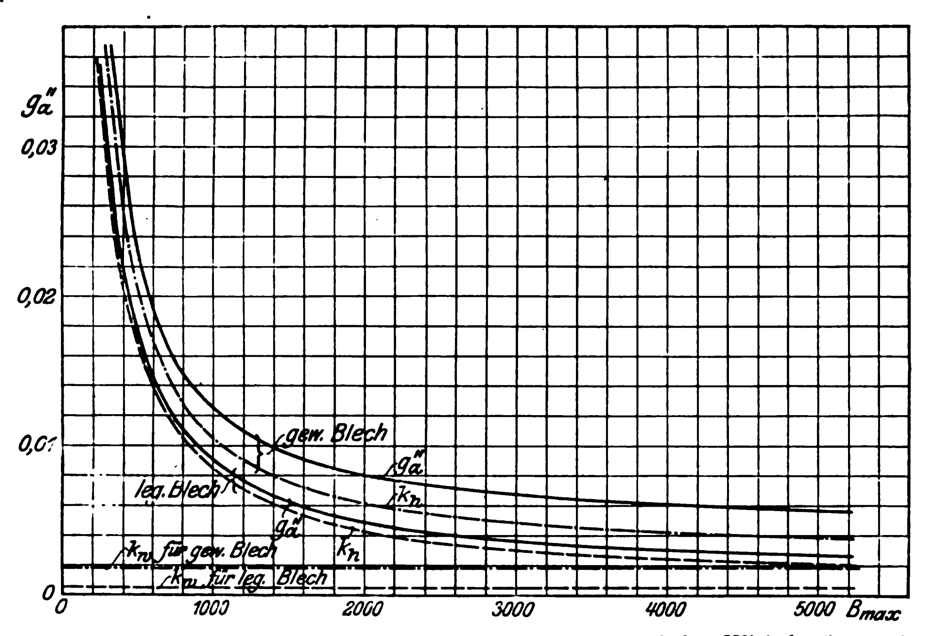


Abb. 5. Abhängigkeit der Konduktanz g_a'' von der Hysterese und den Wirbelströmen als Funktion der Induktion B für gewöhnliches und legiertes Blech.

Diese letztere Erscheinung geht auch deutlich aus der Tabelle II hervor, indem dort die Konduktanz g_a'' für die Windungszahlen $w_2 = 80$ und $w_2 = 240$ bei legiertem Blech im letzteren Falle auf den 9. Teil derjenigen bei 80 Windungen herabsinkt, wobei jedoch der Verlauf als Funktion der Induktion nicht geändert wird. Wir können daher stets die Fehlerkurven durch Vergrößern der Windungszahlen verbessern, wenn nicht wirtschaftliche Momente dies verbieten. Auch die bei gewöhnlichen Dynamoblechen auftretende größere Konduktanz kann durch eine größere Windungszahl zum Teil wieder ausgeglichen werden, jedoch ist ihr Verlauf in Abhängigkeit der Induktion ein etwas anderer wie bei legierten Blechen, und vor allen Dingen ist hierbei der Verlauf des Winkels α ein so verschiedener, daß auch eine große Windungszahl den ungünstigen Verlauf der Fehlerkurven nicht wesentlich zu verbessern vermag.

Wir erkennen daher schon jetzt, daß der Verlauf der Fehlerkurven in der Hauptsache durch die Hystereseverluste bedingt ist, da diese wiederum den Verlauf der



Magnetisierungskurven und damit den Verlauf und die Größe des Winkels α und der Konduktanz g_a'' bestimmen.

In Abb. 5 sind zum Vergleich die Konduktanzen der Tabelle II für legiertes und gewöhnliches Blech bei $w_2 = 240$ Windungen als Funktion der Induktion dargestellt und zeigen recht deutlich sowohl den Einfluß der Hysterese als auch der Wirbelströme.

Gehen wir nunmehr noch einen Schritt weiter und ermitteln für denselben Stromwandler, wie oben die Konduktanz ermittelt wurde, auch nach Gl. 10) und 11) die Winkelabweichung ψ_1 und den absoluten Übersetzungsfaktor p_1 für die Windungszahlen $w_2 = 80$ und $w_2 = 240$ Windungen, wobei wir jedoch in beiden Fällen eine konstante totale Sekundärreaktanz z_{2t} bei verschiedenen sekundären Phasenverschiebungen φ_{2t} voraussetzen wollen, da dieser Fall wohl am häufigsten in der Praxis vorkommt und, wie die Gl. 10) und 11) zeigen, die Winkelabweichung und der Übersetzungsfaktor stark von der sekundären Phasenverschiebung abhängt.

Wir wollen jedoch dabei unsere Betrachtungen nicht nur auf positive Phasenverschiebungen ausdehnen, sondern auch auf negative, d. h. auf kapazitive Belastungen, da bekanntlich sehr häufig als Leitungen zwischen der Sekundärwicklung des Stromwandlers und den Anschlußapparaten Kabel verwendet werden, deren Kapazität unter Umständen über die Induktivität des Sekundärstromkreises überwiegen kann.

Wir legen unserem Rechnungsbeispiel eine konstante Sekundärreaktanz von $z_{2t} = 2,5$ Ohm zugrunde und erhalten dann zunächst für die verschiedenen Phasenwinkel folgende Werte für den ohmschen und induktiven Widerstand des Sekundärkreises, indem die Impedanz z_{2t} ausgedrückt werden kann durch

$$z_{2t} = \sqrt{r^2_{2t} + x^2_{2t}} = r_{2t}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{2t}} = \frac{r_{2t}}{\cos \varphi_{2t}},$$

oder auch

$$z_{2t} = x_{2t}\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2} = \frac{x_{2t}}{\sin \varphi_2 t}.$$

Tabelle III.

φ_{2t}	$\operatorname{tg}\varphi_{2t}$	$\cos\varphi_{2t}$	$\sin\varphi_{2t}$	z_{2t}	r_{2t}	x_{2t}
+ 90°	+ ∞	0	1		0	2,5
+ 60°	+ 1,732	0,5	0,866		1,25	2,165
+ 30°	+ 0,5774	0,866	0,50		2,165	1,25
0°	0	1	0	2,5	2,5	0
− 30°	− 0,5774	0,866	0,50		2,165	− 1,25
− 60°	− 1,732	0,50	0,866		1,25	− 2,165
− 90°	− ∞	0	1		0	− 2,5

Mit diesen Werten berechnen wir nun ferner bei den verschiedenen Phasenwinkeln φ_{2t} die Faktoren $r_{2t}\,g_a''$, $\frac{1}{r_{2t}\,g_a''}$ und $\operatorname{tg}\varphi_{2t}\operatorname{tg}\alpha$ als Funktion der Induktion B_{max} bei 50 Perioden und für legiertes Blech. Dabei lassen wir jedoch den Phasenwinkel $\varphi_{2t} = -90^0$, d. h. reine kapazitive Belastung weg, da eine solche wohl nie vorkommt und auch kein besonderes theoretisches Interesse bietet. Dagegen besitzt reine induktive Belastung, also $\varphi_{2t} = +90^0$, als Grenzwert schon mehr Interesse und liegt in einigen Fällen mit besonderen Schaltungen praktisch vor.

Für diesen Fall kann jedoch der Übersetzungsfaktor p_1 und die Winkelabweichung ψ_1 nicht direkt aus Gl. 10) und 11) ermittelt werden, sondern es sind die Gl. 6) und 8) zu Hilfe zu nehmen, da $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$ ist.

Da ferner nach Tabelle III $r_{2t} = 0$ ist, so ist auch $r_{2t}\,g_a'' = 0$, so daß nach einiger Umrechnung wird

Tabelle IV

für $w_2 = 80$ Windungen.

B	tg α	$\varphi_{2t} = 0$			$\varphi_{2t} = \pm 30^0$			$\varphi_{2t} = \pm 60^0$			$\varphi_{2t} = \pm 90^0$		
		$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$x_{2t} g_a''$	$\frac{1}{x_{2t} g_a''}$	$x_{2t} g_a''$ tg α
100	0,1497	1,813	0,551		1,572	0,5642	0,0864	0,906	1,1025	0,2595	1,813	0,551	0,2717
200	0,2915	0,907	1,101		0,786	1,2715	0,1683	0,454	2,20	0,505	0,907	1,101	0,2642
400	0,509	0,490	2,04		0,425	2,354	0,294	0,2452	4,077	0,8825	0,490	2,04	0,2496
600	0,7025	0,322	3,102		0,2795	3,578	0,4055	0,1620	6,171	1,217	0,322	3,102	0,2261
800	0,833	0,2497	4,00		0,2162	4,623	0,481	0,1248	8,005	1,443	0,2497	4,00	0,2078
1000	0,923	0,2025	4,930	0	0,1758	5,684	0,533	0,10135	9,870	1,599	0,2025	4,93	0,187
1500	1,0385	0,1420	7,040		0,1233	8,100	0,599	0,07105	14,075	1,799	0,142	7,04	0,1474
2000	1,103	0,1068	9,360		0,09265	10,79	0,637	0.05345	18,70	1,910	0,1068	9,36	0,118
3000	1,167	0,0807	12,39		0,06995	14,29	0,673	0,04035	24,79	2,020	0,0807	12,39	0,09415
4000	1,236	0,0642	15,58		0,05565	17,96	0,713	0,0321	31,17	2,140	0,0642	15,58	0,07935
5000	1,288	0,060	16,65		0,05205	19,205	0,744	0,030	33,33	2,232	0,060	16,65	0,0773

Tabelle V

für $w_2 = 240$ Windungen.

B	tg α	$\varphi_{2t} = 0$			$\varphi_{2t} = \pm 30^0$			$\varphi_{2t} = \pm 60^0$			$\varphi_{2t} = \pm 90^0$		
		$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$r_{2t} g_a''$	$\frac{1}{r_{2t} g_a''}$	tg φ_{2t} tg α	$x_{2t} g_a''$	$\frac{1}{x_{2t} g_a''}$	$x_{2t} g_a''$ tg α
100	0,1497	0,2014	4,966		0,1744	5,735	0,0864	0,1007	9,925	0,2595	0,2014	4,966	0,03015
200	0,2915	0,10078	9,924		0,0874	11,425	0,1683	0,0504	19,81	0,505	0,10078	9,924	0,02935
400	0,509	0,0544	18,375		0,04715	21,20	0,2940	0,0272	36,78	0,8825	0,0544	18,375	0,02771
600	0,7025	0,03576	27,98		0,0310	32,21	0,4055	0,01787	55,9	1,217	0,03576	27,98	0,02513
800	0,833	0,02772	36,05		0,024	41,65	0,481	0,0138	72,2	1,443	0,02772	36,05	0,0231
1000	0,923	0,02252	44,4	0	0,0195	51,27	0,533	0,01125	88,8	1,599	0,02252	44,4	0,02078
1500	1,0385	0,01574	63,5		0.01365	73,30	0,599	0,00787	126,9	1,799	0,01574	63,5	0,01636
2000	1,103	0,01187	84,25		0,01028	97,25	0,637	0,00593	168,5	1,910	0,01187	84,25	0,0131
3000	1,167	0,00896	111,6		0,00776	128,8	0,673	0,00447	223,1	2,02	0,00896	111,6	0,01045
4000	1,236	0,0074	135,0		0,00642	155,9	0,713	0,00370	270,0	2,14	0,0074	135,0	0,00915
5000	1,288	0,00666	150,0		0,00577	173,0	0,744	0,00333	300,0	2,232	0,00666	150,0	0,008595

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_1 &= \frac{1}{\pm\frac{1}{x_{2t}\,g_a''}+\operatorname{tg}\alpha} \\ p_1 &= \frac{1\pm x_{2t}\,g_a''\operatorname{tg}\alpha}{\cos\psi_1} \end{aligned}\right\} \text{für } \varphi_{2t}=\pm 90^0 \quad . \; . \; . \; . \quad 22)$$

In den Tabellen IV und V für die Windungszahlen $w_2 = 80$ und 240 sind deshalb für $\varphi_{2t} = \pm 90^0$ die Werte $x_{2t}\,g_a''$ bzw. $\frac{1}{x_{2t}\,g_a''}$ und $x_{2t}\,g_a''\operatorname{tg}\alpha$ an Stelle von $r_{2t}\,g_a''$, $\frac{1}{x_{2t}\,g_a''}$ und $\operatorname{tg}\varphi_{2t}\operatorname{tg}\alpha$ berechnet worden.

Beide Tabellen zeigen schon recht deutlich den Einfluß der Faktoren $r_{2t}\,g_a''$, $\frac{1}{r_{2t}\,g_a''}$ und $\operatorname{tg}\varphi_{2t}\operatorname{tg}\alpha$ mit zunehmender Windungszahl in Abhängigkeit der Induktion. Den Tabellen wurden nur die Induktionen zwischen den Werten $B_{max} = 100$ bis 5000 Maxwell/cm² zugrunde gelegt, da die meisten Stromwandler mit solchen Induktionen arbeiten. Wir werden jedoch weiter unten sehen, daß gerade für $w_2 = 80$ Windungen bei der angenommenen Belastung höhere Induktionen auftreten, d. h. diese Windungszahl für diese Belastung nicht mehr ausreicht.

Mit Hilfe der Werte dieser zwei Tabellen IV und V läßt sich nun ohne weiteres aus Gl. 10), 11) und 22) der absolute Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung berechnen. Die so erhaltenen Werte sind für die Windungszahlen $w_2 = 80$ und $w_2 = 240$ in Abb. 6, 7, 8 und 9 in Kurvenform als Funktion der Induktion aufgetragen.

Sehen wir zunächst vom Einfluß der totalen sekundären Phasenverschiebung φ_{2t} ab, so erkennen wir, wenn wir die entsprechenden Kurven für legiertes Blech der Abb. 5 zum Vergleiche heranziehen, daß sowohl der Verlauf der Winkelabweichung ψ_1, als auch des absoluten Übersetzungsfaktors p_1 fast ausschließlich vom Gesetz der Hysterese beherrscht wird, d. h. daß diese Faktoren mit abnehmender Induktion einen hyperähnlichen Verlauf nehmen. Wie beide Tabellen weiter zeigen, ist dies sowohl bei kleinen, als auch bei großen Windungszahlen der Fall; bei beiden äußert sich ein Unterschied nur hinsichtlich der Größe der auftretenden Abweichungen. Z. B. ändert sich für $w_2 = 80$ Windungen und $\varphi_{2t} = +60^0$ der absolute Übersetzungsfaktor zwischen den Induktionen 1500 und 5000 bezogen auf den letzteren Wert um $\frac{1{,}2 - 1{,}1}{1{,}1}\cdot 100 = 9{,}08\,^0/_0$, dagegen für $w_2 = 240$ Wdg. nur um

$$\frac{1{,}0215 - 1{,}011}{1{,}011}\cdot 100 = 1{,}04\,^0/_0.$$

Bei beiden Windungszahlen ist jedoch der Verlauf der Kurven der gleiche.

Genau im gleichen Maße tritt auch bei der Winkelabweichung mit zunehmender Windungszahl nur eine prozentuale Abnahme derselben ein, dagegen wird ihr Verlauf als Funktion der Induktion dadurch nicht geändert, wie deutlich die Kurven der Abb. 6 und 8 zeigen.

In diesen vier Kurventafeln kann nun auch an Stelle der Eiseninduktion B_{max} die Größe des Sekundärstromes J_2 angegeben werden.

Da für beide Windungszahlen die gleiche sekundäre Belastung angenommen wurde, so ist die induzierte sekundäre E. M. K. $E_2 = J_2\,z_{2t}$ für beide gleich groß. Dann ergeben sich für die entsprechenden Werte des Sekundärstromes die in der Tabelle VI zusammengestellten Werte der zugehörigen Induktionen.



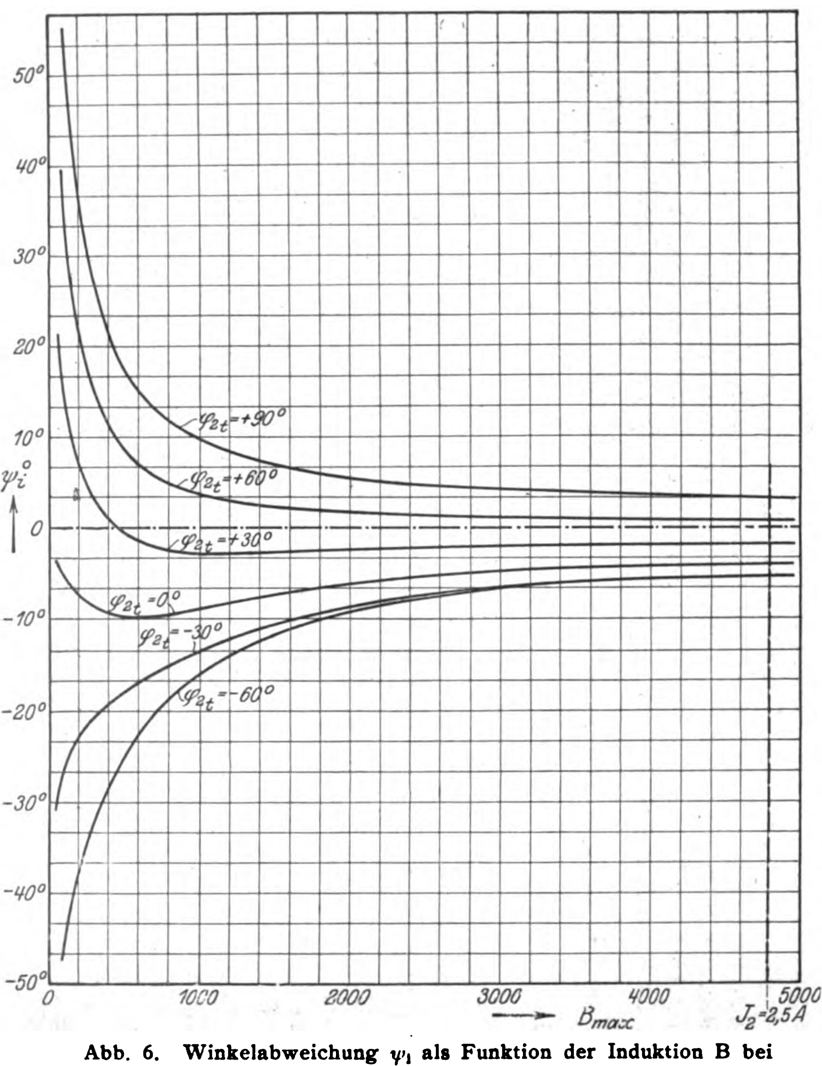


Abb. 6. Winkelabweichung ψ_i als Funktion der Induktion B bei verschiedenen Phasenverschiebungen φ_{2t}.
Sekundäre Windungszahl $w_2 = 80$.

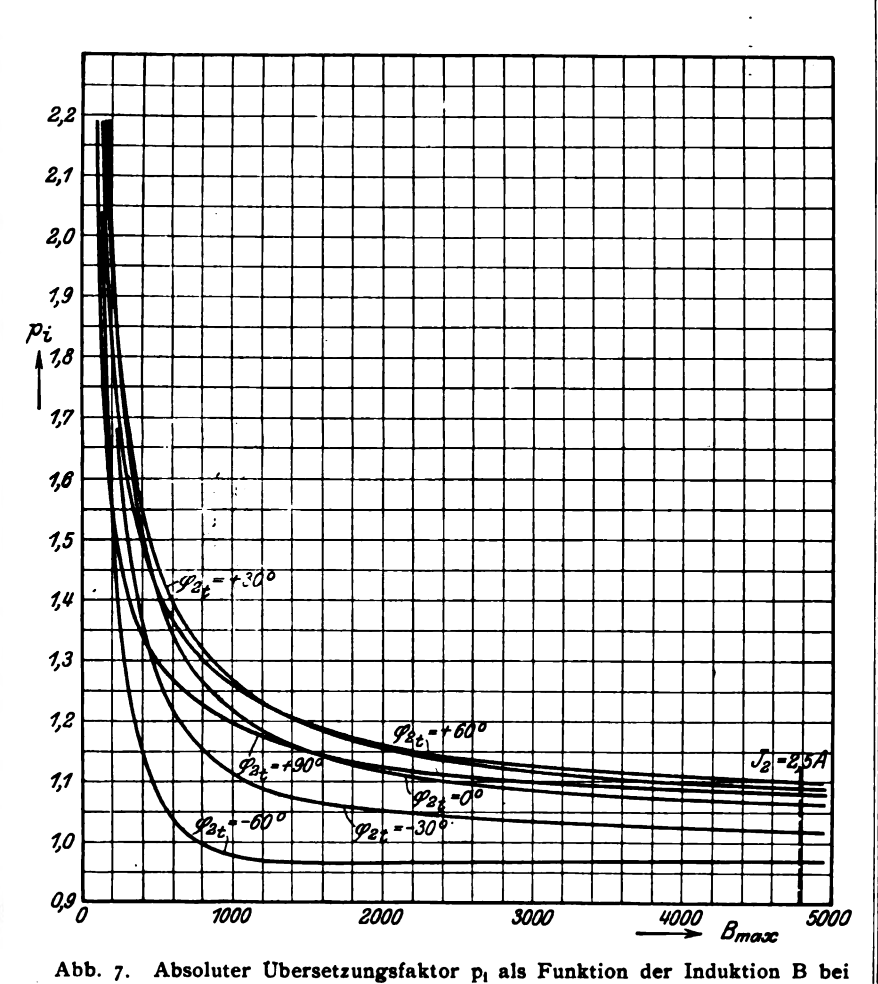


Abb. 7. Absoluter Übersetzungsfaktor p_i als Funktion der Induktion B bei verschiedenen Phasenverschiebungen φ_{2t}.
Windungszahl $w_2 = 80$ sekundär.

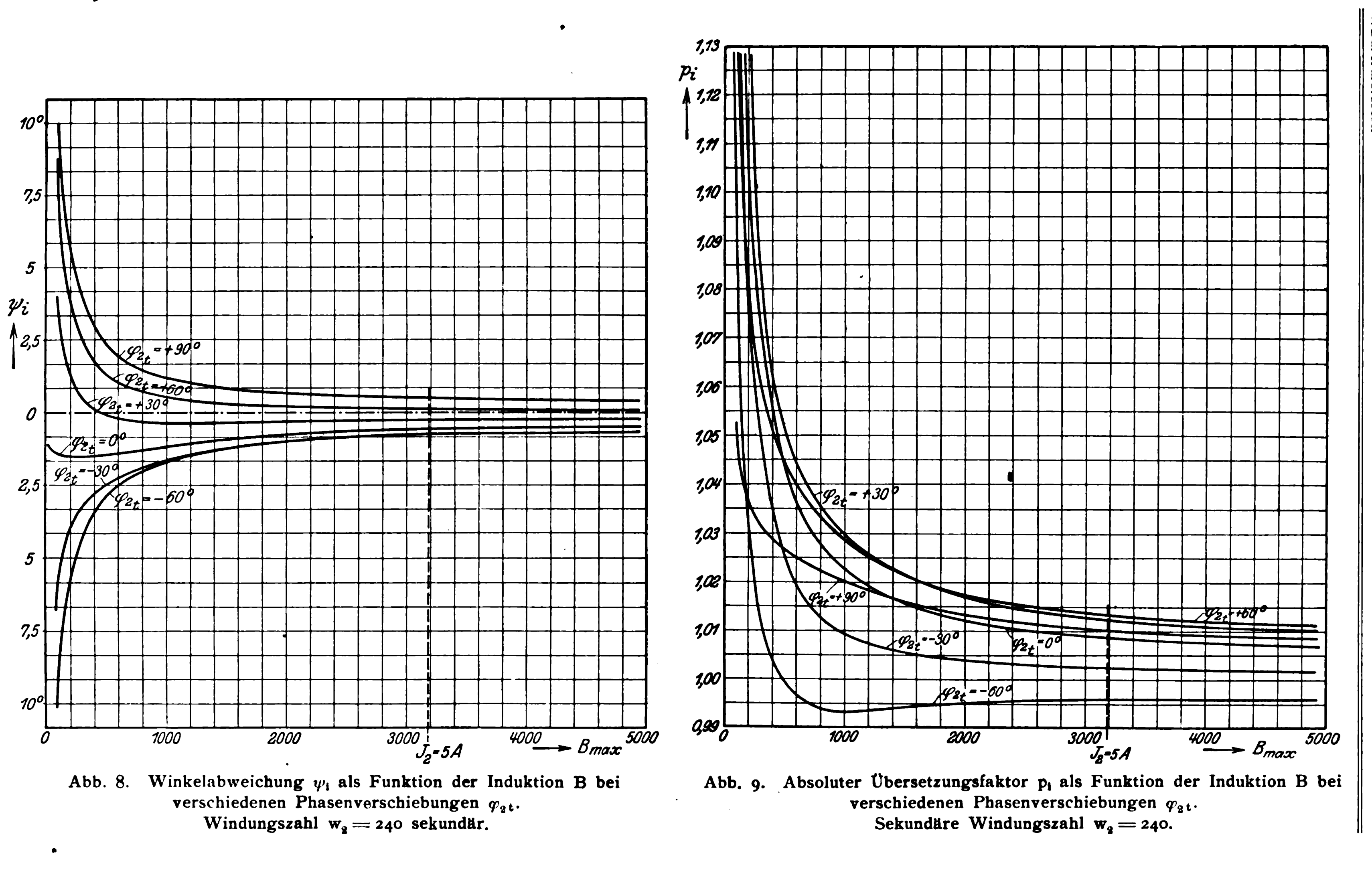


Abb. 8. Winkelabweichung ψ_i als Funktion der Induktion B bei verschiedenen Phasenverschiebungen φ_{2t}.
Windungszahl $w_2 = 240$ sekundär.

Abb. 9. Absoluter Übersetzungsfaktor p_i als Funktion der Induktion B bei verschiedenen Phasenverschiebungen φ_{2t}.
Sekundäre Windungszahl $w_2 = 240$.

Tabelle VI.

J_2	$J_2 z_{2t}$	B_{max} für $w_2 = 80$	B_{max} für $w_2 = 240$
0,25	0,625	478	159,3
0,50	1,25	957	319
1,0	2,5	1913	638
2,0	5,0	3820	1273
2,5	6,25	4780	1593
3,0	7,5	5740	1912
4,0	10,0	7650	2550
5,0	12,5	9570	3190

Wie aus dieser Tabelle zu ersehen ist, erreicht die Induktion im Stromwandler mit $w_2 + 80$ Windungen für $J_2 = 5$ Amp. bei dieser Sekundärbelastung unzulässig große Werte, d. h., für diese Belastung reicht die angenommene Amperewindungszahl 400 nicht mehr aus. Das geht übrigens auch aus den Kurven der Abb. 6 und 7 für den Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung hervor, da diese für kleine Induktionen viel zu große Abweichungen ergeben. Der Stromwandler für $w_2 = 240$ Windungen dagegen würde für diese Belastung gerade noch knapp gehen. Beide Beispiele zeigen deshalb sehr gut, wie stark gerade die prozentualen Fehler durch eine Vergrößerung der totalen Amperewindungszahl vermindert werden können, zeigen jedoch auch, daß damit der Verlauf der Fehlerkurven nur unwesentlich oder meist gar nicht beeinflußt wird. Wir können deshalb unsere folgenden Untersuchungen nur auf eine Windungszahl beschränken, nämlich auf $w_2 = 240$ Wdg., da sich dann an diesem Stromwandler alle noch zu besprechenden Fehlerquellen behandeln lassen.

Wir kehren nun nochmals kurz zum Einfluß der Eisenverluste auf die Fehlerkurven zurück, da wir bereits früher bei den Hauptgleichungen eines Stromwandlers kennen gelernt haben, daß sich dieselben in zweifacher Art äußern. Die Gl. 10) bis 12) haben uns gezeigt, daß das Übersetzungsverhältnis und die Winkelabweichung infolge der Eisenverluste durch den Phasenwinkel α, zwischen dem Magnetisierungsstrom und seiner Wattkomponente, und durch die Konduktanz g_a beeinflußt wird.

Wir haben auch bereits in Tabelle I die Größenordnung dieses Winkels α für legiertes Blech und einen stoßfugenlosen Eisenkern festgestellt und ferner kennen gelernt, daß derselbe in diesem Falle vollkommen unabhängig von der Windungszahl, dem Eisenquerschnitt und der mittleren Kraftlinienlänge im Eisen ist, dagegen bestimmt wird durch die Form der Magnetisierungskurve und die Größe der Eisenverluste pro Kilogramm Eisen. Für die Konduktanz g_a dagegen haben wir in Gl. 20) und in Tabelle III festgestellt, daß diese fast ausschließlich nur durch das Gesetz der Hysterese beherrscht wird und aller Wahrscheinlichkeit nach auch den Verlauf und die Größe der Fehlerkurven bestimmt. Wir können jedoch aus allen diesen bis jetzt durchgeführten Untersuchungen noch nicht feststellen, von welcher Größenordnung die Abweichungen beider Faktoren sind, da beide stets gleichzeitig ihren Einfluß geltend machen. Für die Konstruktion und die Beurteilung eines Stromwandlers spielt aber gerade die genaue Kenntnis aller Einflüsse auf die Fehlerkurven eine enorm wichtige Rolle, so daß wir auch bei unserem Rechnungsbeispiel mit $w_2 = 240$ Windungen die Größenordnung dieser beiden Einflüsse feststellen müssen. Dies kann auf sehr einfache Weise geschehen, indem wir bei einer beliebigen sekundären Phasenverschiebung φ_{2t} einmal den Winkel α konstant lassen und ein zweites Mal die Konduktanz g_a und für beide Fälle die Kurven für die Winkelabweichung und den absoluten Übersetzungsfaktor als Funktion der Induktion im Eisen ermitteln.

Wir gehen zu diesem Zwecke von einer konstanten sekundären Phasenverschiebung $\varphi_{2t} = +60^0$ aus, da dieser Fall praktisch wohl am häufigsten bei allen gangbaren



Stromwandlertypen ungefähr zutrifft[1]) und wählen zuerst für einen konstanten Winkel α den Wert bei $B = 1500$ Maxwell/cm², also $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}0385$ entsprechend dem Winkel $\alpha = 46^0\, 4'$ und berechnen nun bei veränderlicher Konduktanz g_a'' damit die Winkelabweichung und den Übersetzungsfaktor. Ebenso nehmen wir für eine konstante Konduktanz g_a'' aus der Tabelle V die entsprechenden Werte bei $B_{max} = 1500$ Maxwell/cm², nämlich für

$$\frac{1}{r_{2t}\, g_a''} = 126{,}9 = \text{konstant und}$$

$$r_{2t}\, g_a'' = 0{,}007876 = \text{konstant.}$$

Damit ergeben sich dann die in der Tabelle VII zusammengestellten Werte.

Tabelle VII.

B_{max}	$\alpha = 46^0\, 4' =$ konstant			$g_a'' =$ konstant		
	$\operatorname{tg} \varphi_i$	ψ_i	p_i	$\operatorname{tg} \psi_i$	ψ_i	p_i
200	0,03063	1° 45,3′	1,1415	0,01121	38,7′	1,01187
400	0,01751	1° 0′	1,07625	0,00954	33′	1,01483
600	0,0118	40,7′	1,05052	0,00803	27,7′	1,01745
800	0,00925	32′	1,0388	0,00700	24,1′	1,01925
1000	0,00757	26,1′	1,03155	0,0063	22′	1,02045
1500	0,00535	18,4′	1,02205	0,0054	18,6′	1,02205
2000	0,00405	14′	1,0166	0,0049	17′	1,02292
3000	0,00307	10,6′	1,01253	0,0044	15,2′	1,02378
4000	0,00254	8,75′	1,01036	0,00386	13,3′	1,02475
5000	0,00229	7,9′	1,00933	0,00346	12′	1,02544

Tragen wir nun diese Werte wiederum in Kurvenform als Funktion der Induktion auf, so erhalten wir schließlich die in Abb. 10 aufgetragenen Kurven. In diesem Kurvenblatt sind ebenfalls die normalen Kurven für ψ_i und p_i der Abb. 8 und 9 für $\varphi_{2t} = + 60^0$ zum Vergleiche eingetragen und geben so ein gutes Bild über den Einfluß dieser beiden Faktoren. Wie diese Kurven ganz allgemein zeigen, wird die Winkelabweichung und der Übersetzungsfaktor durch α und g_a in ganz verschiedener Weise beeinflußt. So z. B. erfährt der Übersetzungsfaktor bei kleinen Induktionen mit konstantem Winkel α eine erhebliche Zunahme, dagegen bei höheren Induktionen eine ganz unerhebliche Abnahme. Daraus folgt deshalb, daß der Verlauf des Übersetzungsfaktors als Funktion der Induktion um so günstiger wird, je mehr sich bei kleinen Induktionen der Winkel α verändert. Ein vollkommen konstanter Winkel α ist daher, so lange die Konduktanz g_a veränderlich ist, nicht erwünscht, da α und g_a einander beim Übersetzungsfaktor entgegenwirken und sich mehr oder weniger dadurch kompensieren können.

Im Gegensatze dazu steht das Verhalten der Winkelabweichung. Hier ruft ein konstanter Winkel α bei veränderlicher Konduktanz g_a stets eine Verbesserung der Winkelabweichung hervor, so daß in diesem Falle immer eine möglichst geringe Veränderlichkeit dieses Winkels α anzustreben ist und auch mehr oder weniger durch die Wahl des magnetischen Materiales erreicht werden kann.

Wesentlich verschieden verhält sich eine konstante Konduktanz g_a bei einem veränderlichen Winkel α. In diesem Falle wird sowohl der Verlauf der Winkelabweichung, als auch des Übersetzungsfaktors um so günstiger, je mehr sich g_a einem konstanten Wert nähert. Wird schließlich $g_a =$ konstant, so erhält der Übersetzungsfaktor den gleichen Verlauf wie die Magnetisierungskurve und die Kurven für $\operatorname{tg} \alpha$ und α der

[1]) Meist liegt sogar der Winkel φ_{2t} unter normalen Verhältnissen noch wesentlich höher und kann gelegentlich Werte bis zu 75^0 erreichen, je nach der Schaltung und der Sekundärbelastung. Bei kleiner Amperewindungszahl ist φ_{2t} meist kleiner als 45^0.



Abb. 4, d. h. mit abnehmender Induktion nimmt der Übersetzungsfaktor bei konstanter Konduktanz nicht mehr zu, sondern ab. Die Winkelabweichung dagegen behält ihren früheren Verlauf mehr oder weniger bei, weil auch noch die senkundäre Phasenverschiebung mitbestimmend wirkt.

Wir erhalten daher aus diesen Untersuchungen auch die Bestätigung der bereits früher getanen Äußerungen, daß der Verlauf der Fehlerkurven fast zum größten Teil durch die Konduktanz der Magnetisierung bestimmt wird, also die Abhängigkeit der Eisenverluste von der Induktion einen viel größeren Einfluß ausübt, als der Verlauf der Magnetisierungskurve, beziehungsweise des Phasenwinkels α zwischen dem Magnetisierungsstrom und seiner Wattkomponente.

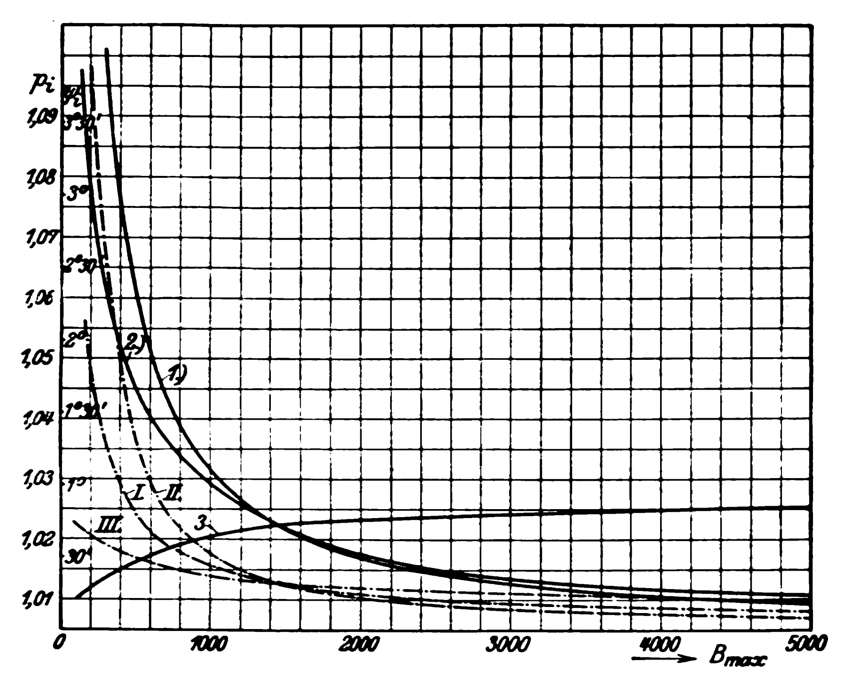


Abb. 10. Absoluter Übersetzungsfaktor p_1 und Winkelabweichung ψ_1 unter verschiedenen Bedingungen als Funktion der Induktion B.

Kurve 1: α = konstant; g_a'' = veränderlich
" 2: α und g_a'' veränderlich
" 3: α = veränderlich; g_a'' = konstant
} Übersetzungsfaktor p_1 für $\varphi_{2t} = +60^0$ und $z_{2t} = 2,5\ \Omega$.

" I: α = konstant; g_a'' = veränderlich
" II: α und g_a veränderlich
" III: α = veränderlich; g_a'' = konstant
} Winkelabweichung ψ_1 für $\varphi_{2t} = -60^0$ und $z_{2t} = 2,5\ \Omega$.

Aber auch der Einfluß des Verlaufes der Magnetisierungskurve darf nicht vernachlässigt werden, da dadurch gerade die Winkelabweichung ganz erheblich beeinflußt wird. Dieser Einfluß macht sich namentlich bei kleinen sekundären Phasenverschiebungen und bei kleinen Induktionen sehr stark bemerkbar, wie aus den Kurven der Abb. 6 und 8 zu ersehen ist. Bei einem Neuentwurf eines Stromwandlers muß deshalb gerade auf die Größe und den Verlauf der Konduktanz das größte Gewicht gelegt werden. Die Größe der Konduktanz kann aber nach Gl. 20) verändert werden, entweder durch die Windungszahl oder durch entsprechende Wahl der Eisenabmessungen und der Verlauf derselben wird nur allein durch das Gesetz der Hysterese bestimmt, welches die Eisenverluste befolgen. Aber gerade mit den Eisenabmessungen wird meist in falscher Richtung vorgegangen, indem in der Regel nur der Eisenquerschnitt

herangezogen wird, dagegen die mittlere Kraftlinienlänge im Eisen nur in ganz seltenen Fällen zur Korrektur benutzt wird.

Das mag seinen Grund darin haben, daß eine Änderung in der mittleren Kraftlinienlänge viel zu große Änderungen in den gesamten Abmessungen des Stromwandlers hervorrufen würde, während dies bei einer Änderung des Eisenquerschnittes nicht der Fall ist. Die Wirkungen, welche jedoch in beiden Fällen verursacht werden, sind so verschieden voneinander, daß sie auch hier Erwähnung verdienen.

Betrachten wir einen Augenblick Gl. 14) für die Suszeptanz und Gl. 20) für die Konduktanz etwas näher, so ergibt sich, daß eine Verkürzung oder Verlängerung der mittleren Kraftlinienlänge sowohl auf die Suszeptanz als auch auf die Konduktanz im gleichen Maße einwirkt, so daß dadurch, wie Gl. 16) zeigt, der Winkel α nicht verändert wird. Nun verursacht aber eine Änderung der mittleren Kraftlinienlänge bei der Sekundärwicklung ungefähr im selben Maße eine Änderung des induktiven und ohmschen Widerstandes, so daß sich dadurch auch der Phasenwinkel φ_{2t} nur sehr wenig oder gar nicht ändert. Bei der Winkelabweichung Gl. 10) und beim Übersetzungsfaktor Gl. 11) kommt aber nun als einzige Veränderliche die Konduktanz g_a vor und diese erleidet, auch wenn die Eiseninduktion konstant bleibt, bei einer Verkürzung oder einer Verlängerung der mittleren Kraftlinienlänge eine Verkleinerung oder Vergrößerung, so daß im ersten Falle die Winkelabweichung und der Übersetzungsfaktor eine erhebliche Verbesserung und im letzteren Falle eine erhebliche Verschlechterung erleiden muß.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei einer Änderung des Eisenquerschnitts. Hierbei ändern sich die Konduktanz und Suszeptanz nicht im gleichen Maße. da sich die Induktionsverhältnisse im Eisen mit dem Querschnitt ändern. So z. B' bewirkt eine Vergrößerung des Eisenquerschnittes auf den doppelten Wert bei gleichbleibender Belastung nur die halbe Eiseninduktion, wodurch sich die Konduktanz weit stärker ändert als die Suszeptanz, so daß sich in diesem Falle naturgemäß auch der Winkel α ändern muß. Nun bedingt aber ferner ein größerer Eisenquerschnitt auch eine erhebliche Widerstandszunahme der Sekundärwicklung, wobei der induktive Widerstand nur unwesentlich zunimmt, so daß auch der Phasenwinkel φ_{2t} eine nicht unerhebliche Abnahme erfährt. Hierdurch wird aber die Winkelabweichung nach Gl. 10) bedeutend stärker beeinflußt als nach Gl. 11) der Übersetzungsfaktor, weil sich bei letzterem die Konduktanz g_a und die Phasenwinkel φ_{2t} und α mehr oder weniger das Gleichgewicht halten.

Diese Ansicht bestätigt sich auch tatsächlich durch Versuche, wie die folgenden experimentellen Untersuchungen an zwei Stromwandlern für 50/5 Amp. bei 400 Amperewindungen zeigen. Beim einen Stromwandler betrug der Eisenquerschnitt $q_{ei} = 7{,}35\ cm^2$ und beim andern $q_{ei} = 14{,}5\ cm^2$, also ungefähr den doppelten Wert des ersten. Bei beiden war die mittlere Kraftlinienlänge $l_{ei} = 35{,}6$ cm und die Windungszahlen $w_1 = 8$ und $w_2 = 80$ Windungen. Die Untersuchungen wurden bei 50 Perioden durchgeführt und die Belastung auf der Sekundärseite bildete nur ein Hitzdrahtstrommesser und die feststehenden Spulen des zweiten Wattmeters. Die feststehenden Spulen des ersten Wattmeters waren in Reihe mit der Primärwicklung des Stromwandlers geschaltet, währenddem die beweglichen Spulen beider Wattmeter in Reihe an einer Hilfsstromquelle von ca. 150 Volt lagen, deren Kurvenform ziemlich genau mit derjenigen des Hauptstromes übereinstimmte. Die Phasenfehler der Wattmeter wurden durch Eichung derselben ermittelt, so daß die Winkelabweichung der Stomwandler ziemlich genau durch Einstellung der Ströme mittelst Phasenschieber ermittelt werden konnte.

Die so erhaltenen Werte der Winkelabweichung und des absoluten Übersetzungsfaktors sind in Kurvenform in Abb. 11 aufgetragen und die eingezeichneten Punkte stellen die aufgenommenen Werte dar.

Dabei ergab sich nun, daß bei beiden Stromwandlern der absolute Übersetzungsfaktor ziemlich genau übereinstimmt, dagegen wie bereits oben klargelegt wurde, die



Winkelabweichung bei beiden verschieden große Werte annimmt. Wie ferner Abb. 11 zeigt, wird durch eine Vergrößerung des Querschnittes die Winkelabweichung erheblich verbessert, jedoch steht diese Verbesserung in gar keinem Verhältnis zu dem dadurch verursachten Mehraufwand an Material. Durch den doppelten Eisenquerschnitt steigt nicht nur das Eisengewicht, sondern auch ganz gewaltig das Kupfergewicht, weil eben dadurch auch der mittlere Durchmesser der Wicklungen größer geworden ist.

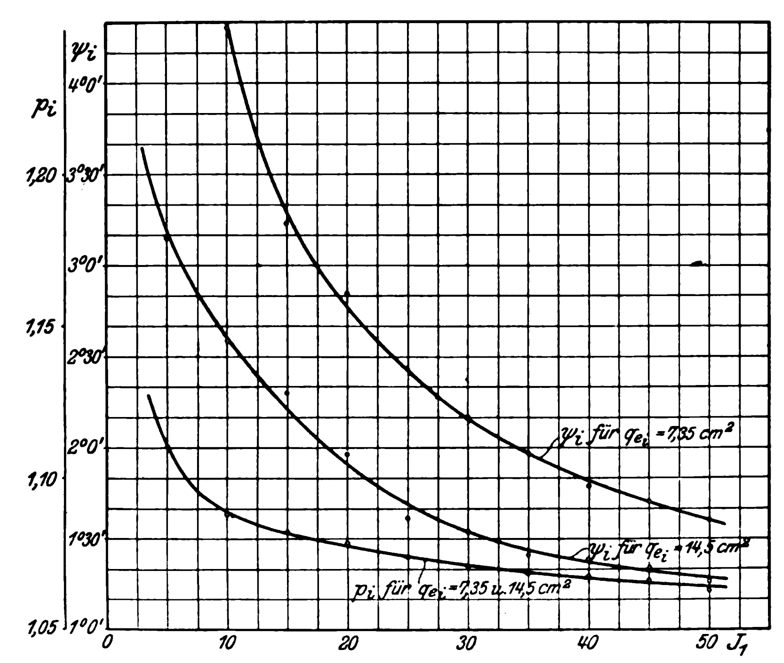


Abb. 11. Übersetzungsfaktor p_i und Winkelabweichung ψ_i eines Stromwandlers von 50/5 Amp. und 400 AW für $q_{ei} = 7,35$ cm² und $q_{ei} = 14,5$ cm² Eisenquerschnitt.

Die Theorie stimmt also hier mit dem Versuch vollkommen überein und zeigt recht deutlich, daß von einer allzu starken Querschnittsvergrößerung nicht die erhofften Erfolge zu erwarten sind. Wohl wird dagegen namentlich von seiten der Konstrukteure geltend gemacht, daß ein kleiner Eisenquerschnitt eine starke Verzerrung der Kurvenform auf der Sekundärseite bedinge und deshalb ein möglichst großer Eisenquerschnitt notwendig sei, jedoch hält auch diese Annahme einer genaueren Untersuchung nicht stand, wenn wir von vornherein dafür sorgen, daß beim untersten Meßbereich der Magnetisierungsstrom noch in einem ganz bestimmten Verhältnis zum gesamten Primärstrom steht. Man ist übrigens viel zu ängstlich gerade über den Einfluß des Magnetisierungsstromes auf die Kurvenform, da wir offenbar gerade hierüber noch viel zu wenig aufgeklärt sind, jedoch lassen sich die Verhältnisse durch eine zweckmäßige und folgerichtige Dimensionierung ganz normal und einwandfrei fast für alle vorkommenden Beanspruchungen gestalten.

Auf gleiche Weise könnte auch mit der mittleren Kraftlinienlänge nachgewiesen werden, daß durch eine Änderung derselben der Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung in gleicher Weise beeinflußt werden, solange die aktive Schenkellänge nicht allzu stark verändert wird. Eine sehr starke Verlängerung derselben würde dagegen eine wesentliche Verringerung der Reaktanz der Sekundärwicklung bedingen und damit würde die Winkelabweichung stärker als der Übersetzungsfaktor beeinflußt werden. Wir sehen also auch hieraus, daß durch eine zweckmäßige Konstruktion die Fehler eines Stromwandlers herabgesetzt werden können, wenn wir alle Fehlereinflüsse in Betracht ziehen.



Durch alle diese Untersuchungen sind aber die durch die magnetischen Eigenschaften des verwendeten Eisens verursachten Fehler noch nicht völlig abgeklärt, da auch noch weitere Einflüsse teils innerer und teils äußerer Natur darauf einwirken. Als reine interne Fehlerquelle sind noch die Stoßfugen anzusehen, dagegen sind die Einflüsse der Periodenzahl, der Kurvenform, des primären Netzleistungsfaktors, der sekundären Phasenverschiebung und der Sekundärbelastung mehr oder weniger als externe Fehlerquellen zu betrachten, da dieselben größtenteils durch äußere Einflüsse hervorgerufen werden.

b) Einfluß der Stoßfugen. Im folgenden wollen wir deshalb noch den Einfluß der Stoßfugen einer genaueren Untersuchung unterziehen, da dieselben namentlich bei größeren Typen aus Fabrikationsgründen nicht mehr gut umgangen werden können. Wie wir bereits früher in Gl. 14) kennen gelernt haben, verursachen die Stoßfugen, gleichviel welcher Art sie auch sind, stets eine Vermehrung der Erregeramperewindungen, wodurch in erster Linie die Suszeptanz der Magnetisierung betroffen wird, indem dieselbe dadurch vergrößert wird. In der Regel ist aber damit stets auch eine Vergrößerung der gesamten Eisenverluste, insbesondere der Wirbelstromverluste verbunden, die durch den Verlauf der magnetischen Kraftlinien in und um die Stoßfugen bedingt sind. Diese zusätzlichen Verluste sind natürlich um so kleiner, je dünner die verwendeten Bleche und je besser die Stoßfugen durchgebildet sind. Da man im Stromwandlerbau in der Regel Bleche von 0,5 mm Dicke und weniger verwendet und man zudem den Stoßfugen die größte Aufmerksamkeit schenkt, so wollen wir bei den folgenden Untersuchungen diese zusätzlichen Verluste vernachlässigen, da diese zudem nicht durch Rechnung, sondern nur durch Schätzung berücksichtigt werden können. Nach Gl. 14) erfahren nun die wattlosen Amperewindungen durch die Luftamperewindungen der Stoßfugen eine Erhöhung von der Größe $0{,}8\, \delta_0 \alpha_s B_{max}$, die jedoch nicht linear von der Eiseninduktion abhängen, da die äquivalente Luftstrecke δ_0 auch wiederum von der Induktion und zudem von der Stoßfugenbeschaffenheit abhängt. Über diese Abhängigkeit von δ_0 liegen bereits zuverlässige Versuchswerte in der Literatur vor; wir wollen im folgenden die bereits vom Verfasser in seiner früheren Arbeit über die Berechnung der Stromwandler zusammengestellten und in Kurvenform aufgetragenen Werte benutzen, wie sie von Ewing und Bohle[1]) experimentell ermittelt wurden. Für $B_{max} = 0$ ist δ_0 gleich der Papierstärke zwischen den Stoßfugen und für alle übrigen Werte von $B_{max} > 0$ nimmt δ_0 langsam bei allen Stoßfugenarten zu und erreicht schließlich bei etwa $B_{max} = 12000$ Maxwell/cm² einen konstanten Wert. Dieser Wert ist am größten bei unbearbeiteten Stoßfugen ohne Druck und am kleinsten bei verzapften Stoßfugen. Für die bei Stromwandlern üblichen Induktionen nimmt δ_0 bei verzapften Stoßfugen annähernd linear zu, dagegen bei allen andern zuerst schneller und dann langsam zu. Da bei Stromwandlern wohl am meisten verzapfte und bearbeitete unter Druck stehende Stoßfugen verwendet werden, wollen wir im folgenden nur diese beiden Stoßfugenarten berücksichtigen und rechnen nun bei einigen Eisenbeanspruchungen die Werte für den Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung nach. Wir legen dabei unserer Rechnung wieder denselben Stromwandler wie früher mit $w_2 = 240$ Windungen zugrunde. Dabei wollen wir jedoch unsere Betrachtungen nur auf eine totale sekundäre Phasenverschiebung von $\varphi_{2t} = 60^0$ ausdehnen, da die Verhältnisse bei allen übrigen gleich liegen. Bei der äquivalenten Luftstrecke δ_0 setzen wir ferner voraus, daß keine besondere Papierzwischenlage in den Stoßfugen vorhanden ist, jedoch wollen wir eine um 50% höhere Luftstrecke einsetzen, wie wir sie aus den Kurven für die entsprechende Stoßfugenart und Induktion erhalten, da durch Gratbildung und Unebenheiten dieselbe praktisch doch größer ausfallen wird, wie die Kurven

[1]) Ewing und Bohle, Journ. of the Inst. of El. Eng. 1908 und auch E. Wirz, Theorie und Berechnung der Stromwandler, Bull. des S. E. V. 1913, S. 379.



angeben. Ferner soll, wie schon oben erwähnt wurde, von den durch die Stoßfugen hervorgerufenen Verlusten abgesehen werden. Damit erhalten wir dann folgende Tabellen für die einzelnen Faktoren des Stromwandlers.

Tabelle VIII.

B_{max}	aw_{0l}	aw_{el}	g_a''	$g_a'' \cdot r_{2t}$	$\frac{1}{g_a'' \cdot r_{2t}}$
250	0,11	0,016	0,033	0,0413	24,2
500	0,20	0,034	0,0175	0,0219	45,6
1000	0,31	0,0704	0,00901	0,01125	88,8
2500	0,433	0,20	0,00409	0,00512	195,1
5000	0,64	0,517	0,00266	0,00333	300,0

Tabelle IX.

B_{max}	δ_0	aw_e	aw_t	b_a''	$tg\,\alpha$	α^0
Stoßfugen verzapft						
250	0,000169	0,0019	0,1119	0,01199	0,364	20° 0′
500	0,000337	0,00758	0,20758	0,0111	0,6345	32° 23,7′
1000	0,000675	0,03036	0,34036	0,00912	1,011	45° 18,3′
2500	0,0018	0,2023	0,6353	0,00681	1,661	58° 57,2′
5000	0,003075	0,692	1,332	0,00714	2,68	69° 32′
Stoßfugen bearbeitet und unter Druck						
250	0,00046	0,00517	0,11517	0,01233	0,374	20° 30,3′
500	0,0009	0,0202	0,2202	0,01179	0,674	33° 58 8′
1000	0,001575	0,07076	0,38076	0,0102	1,1325	48° 34,2′
2500	0,0036	0,405	0,838	0,00899	2,197	65° 31,8′
5000	0,0048	1,078	1,718	0,0092	3,455	73° 51′

Mit diesen Werten ergeben sich nun schließlich die Werte für die Winkelabweichung und den Übersetzungsfaktor.

Tabelle X.

B_{max}	Stoßfugen verzapft				Stoßfugen bearbeitet			
	$tg\,\varphi_{2t}\,tg\,\alpha$	$tg\,\psi'_1$	ψ'_1	p_1	$tg\,\varphi_{2t}\,tg\,\alpha$	$tg\,\psi'_1$	ψ'_1	p_1
250	0,631	0,053	+ 3° 2′	1,069	0,648	0,0525	+ 3° 0,4′	1,070
500	1,099	0,02308	+ 1° 19,2′	1,0461	1,1675	0,0221	+ 1° 16′	1,048
1000	1,753	0,00787	+ 27,1′	1,03099	1,960	0,00653	+ 22,5′	1,0334
2500	2,880	0,00035	+ 1,2′	1,01985	3,805	0,00232	— 8′	1,0246
5000	4,640	0,0031	— 10,7′	1,0188	5,985	0,00562	— 19,4	1,02326

Tragen wir nun diese Werte für den Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung als Funktion der Induktion auf und ziehen wir ferner zum Vergleiche diejenigen der Abb. 8 u. 9 für einen stoßfugenlosen Eisenkern und für $\varphi_{2t} = 60^0$ heran, so erhalten wir die in Abb. 12 aufgezeichneten Kurven.

Wie diese Kurven zeigen, bedingen die Stoßfugen stets eine Vergrößerung des absoluten Übersetzungsfaktors, wie dies übrigens auch die vergrößerte Erregeramperewindungszahl voraussehen ließ, dagegen erfährt die Winkelabweichung mit zunehmender Induktion eine Abnahme. Diese Zu- und Abnahmen sind ferner, wie die Kurven zeigen, größer bei bearbeiteten unter Druck stehenden Stoßfugen, als bei verzapften

Stoßfugen, so daß offenbar in allen Fällen, wo nur allein das Übersetzungsverhältnis ausschlaggebend ist, den letzteren der Vorzug zu geben ist.

Wie daher diese Untersuchungen zeigen, verursachen die Stoßfugen stets in bezug auf das Übersetzungsverhältnis eine Vergrößerung der Fehler, da sowohl der Verlauf als auch die Größe des Übersetzungsfaktors durch dieselben ungünstig beeinflußt wird. Dem gegenüber erfährt die Winkelabweichung eine geringe Verbesserung, die jedoch kaum stark in Betracht kommen dürfte. Wir haben nun bei diesen Nachrechnungen die durch die Stoßfugen verursachten Verluste vernachlässigt und wollen nun auch dieselben kurz in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

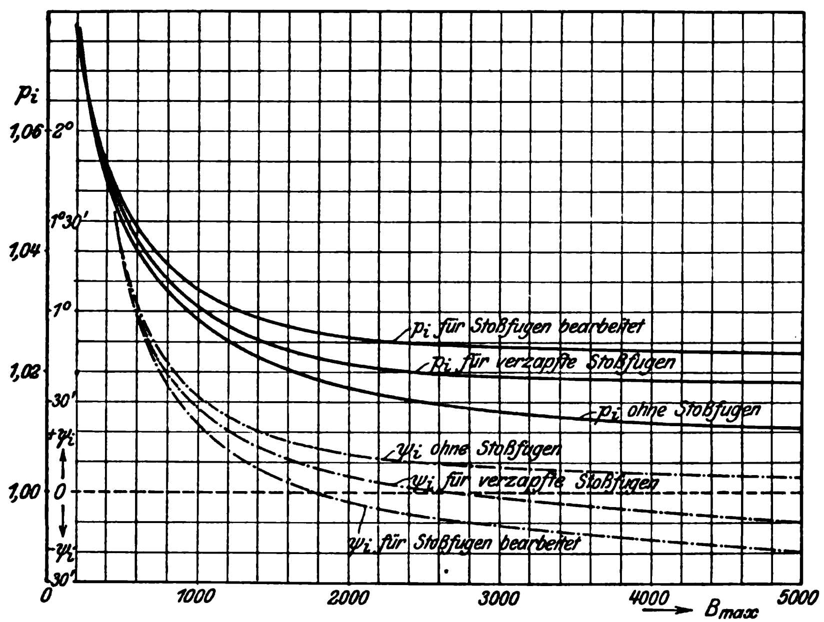


Abb. 12. Winkelabweichung und Übersetzungsfaktor mit und ohne Stoßfugen als Funktion der Eisenbeanspruchung bei 50 Perioden und einer totalen sekundären Phasenverschiebung $\varphi_{2t} = +60^0$.

Wie wir bereits in den Gl. 10), 11) und 20) kennen gelernt haben, bewirkt eine Vergrößerung der Verluste stets eine Vergrößerung der Winkelabweichung und des Übersetzungsfaktors. Dadurch wird aber wiederum der günstige Einfluß der Stoßfugen auf die Winkelabweichung mehr oder weniger aufgehoben, und es kann sogar der Fall eintreten, daß dieselbe eine erhebliche Verschlechterung erleidet. Beim Übersetzungsfaktor verursachen jedoch die erhöhten Verluste stets eine Zunahme desselben, d. h. eine Vergrößerung der Übersetzungsfehler. Nun steht aber bereits aus Versuchen fest, daß die Stoßfugen stets eine Erhöhung der Eisenverluste bis zu $30^0/_0$ und mehr bewirken, so daß die in den obigen Tabellen berechneten Werte in Wirklichkeit noch erheblich ungünstiger werden. Ziehen wir ferner in Betracht, daß durch mechanische Beanspruchungen aller Art, z. B. bei Masseisolation durch Arbeiten der Isoliermasse, die Stoßfugen leicht locker und auseinander getrieben werden, wodurch wiederum erhöhte Verluste und Fehler entstehen, so folgt aus unseren Untersuchungen, daß die Stoßfugen stets eine Herabsetzung der Meßgenauigkeit beim Stromwandler bedingen und dieselben deshalb stets mit Vorsicht zu behandeln sind und wenn möglich vermieden werden sollten.

Ein stoßfugenloser Eisenkern ist jedoch schon aus Fabrikationsgründen nur bei kleinen Stromwandlern möglich, bei größeren Typen verbietet dies der wirtschaftliche und konstruktive Aufbau schon von selbst, so daß uns nur übrig bleibt, bei der Her-

stellung der Stromwandler darauf zu sehen, daß ein Lockerwerden der Stoßfugen von vornherein ausgeschlossen wird und damit die zusätzlichen Verluste auf ein Minimum beschränkt werden. Bei größeren Stromwandlertypen spielen die Stoßfugen nicht mehr dieselbe Rolle wie bei kleinen Typen, da mit der Zunahme der mittleren Kraftlinienlänge im Eisen ihr Einfluß immer mehr verschwindet. Dasselbe ist natürlich auch bei zunehmender Windungszahl der Fall, da mit der Zunahme derselben die gesamten Fehler abnehmen und dadurch diejenigen der Stoßfugen dagegen immer mehr verschwinden.

4. Externe Fehlerquellen und Fehlererscheinungen.

a) Einfluß der Periodenzahl. Mit diesen Untersuchungen haben wir nun zur Hauptsache die internen Fehlerquellen besprochen, soweit sie sich getrennt von den äußeren Einflüssen behandeln lassen und also nur vom konstruktiven Aufbau und der Beschaffenheit des verwendeten Materials abhängen.

Wir gehen nun im folgenden zum Einfluß der Periodenzahl über, welcher eigentlich streng genommen im Zusammenhange mit den Eisenerscheinungen zu behandeln wäre, da wir bereits bei den Kurven für die Phasenverschiebung α in Tabelle I und Abb. 4 gesehen haben, daß eine Periodenzahländerung stets auch eine Änderung dieses Winkels und ebenso eine Änderung der Konduktanz g_a verursacht. Wie uns Gl. 20) gezeigt hat, bewirkt eine Periodenzahländerung hauptsächlich nur eine Änderung der Hystereseverluste, und zwar derart, daß mit abnehmender Periodenzahl die Konduktanz g_a zunimmt. Da ferner nach der Kurve für $\operatorname{tg}\alpha$ und α der Abb. 4 bei 25 Perioden diese Faktoren bei kleinen Induktionen etwas zu- und bei höheren Induktionen etwas abnehmen, so folgt zunächst daraus, daß offenbar der Übersetzungsfaktor ungleich stärker durch eine Periodenzahländerung berührt wird als die Winkelabweichung. Nun steht aber gerade die ungleiche Beeinflussung der Konduktanz und der Suszeptanz durch die Periodenzahl im engen Zusammenhange mit der Kurvenform des Magnetisierungsstromes und damit auch mit derjenigen des Sekundärstromes, so daß eigentlich ihr ein Einfluß zusammen mit der Abhängigkeit von der Kurvenform behandelt werden müßte. Wir wollen jedoch hier beide Erscheinungen für sich behandeln, da gerade beim Stromwandler Änderungen in der Kurvenform ganz verschiedener Herkunft sein können und sich nicht ohne weiteres mit der Periodenzahl zusammen behandeln lassen, trotzdem man die Kurvenform nach der Periodenzahl aufteilt. Um nun wiederum die Abhängigkeit von der Periodenzahl ihrer Größe nach feststellen zu können, rechnen wir an demselben Stromwandler wie früher bei verschiedenen Periodenzahlen den Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung nach. Für 50 Perioden benutzen wir die Werte der Tabelle VII für $w_2 = 240$ Windungen und für $\varphi_{2t} = 30^0$ und 60^0 und rechnen nun am einfachsten die entsprechenden Werte bei 25 Perioden nach, da uns bereits in Tabelle I die Werte für $\operatorname{tg}\alpha$ bekannt sind, und erhalten folgende Tabellen:

Tabelle XI.

$w_2 = 240$ Windungen und 25 Perioden.

B_{max}	aw_{ei}	w_{ei}	$\operatorname{tg}\alpha$	α^0	g_a''
200	0,50	0,0055	0,3405	$18^0\,48,4'$	0,0708
600	0,225	0,0175	0,803	$38^0\,46'$	0,02504
1000	0,31	0,034	0,948	$43^0\,29,8'$	0,0175
2500	0,433	0,1045	1,0775	$47^0\,9,2'$	0,008615
5000	0,640	0,25	1,332	$53^0\,6,2'$	0,005155

Mit diesen Werten ergibt sich schließlich der Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung bei 25 Perioden und $\varphi_{2t} = 30^0$ und 60^0.



Tabelle XII.

$\varphi_{2t} = 30^0$.

B_{max}	$g_a'' r_{2t}$	$\frac{1}{g_a'' r_{2t}}$	$tg\,\varphi_{2t}\,tg\,\alpha$	$tg\,\psi_i$	ψ_i	p_i
200	0,1533	6,52	0,1965	+ 0,0307	+ 1° 35,6′	1,184
600	0,0543	18,4	0,464	− 0,0113	− 39′	1,0796
1000	0,03794	26,38	0,5475	− 0,01328	− 45,4′	1,05875
2500	0,01864	53,65	0,6225	− 0,00905	− 31,2′	1,03025
5000	0,01116	89,6	0,7695	− 0,00826	− 28,5′	1,01975

Tabelle XIII.

$\varphi_{2t} = 60^0$.

B_{max}	$g_a'' r_{2t}$	$\frac{1}{g_a'' r_{2t}}$	$tg\,\varphi_{2t}\,tg\,\alpha$	$tg\,\psi_i$	ψ_i	p_i
200	0,0886	11,29	0,59	0,108	6° 10′	1,148
600	0,03134	31,95	1,39	0,02703	1° 33′	1,075
1000	0,0219	47,8	1,6425	0,01553	53,6′	1,058
2500	0,01077	92,9	1,867	0,00684	23,6′	1,0309
5000	0,00644	155,1	2,305	0,00252	8,7′	1,02127

Diese Werte tragen wir nun ebenfalls mit den entsprechenden Werten bei 50 Perioden als Funktion der Induktion auf und erhalten die in Abb. 13 und 14 aufgezeichneten Kurven.

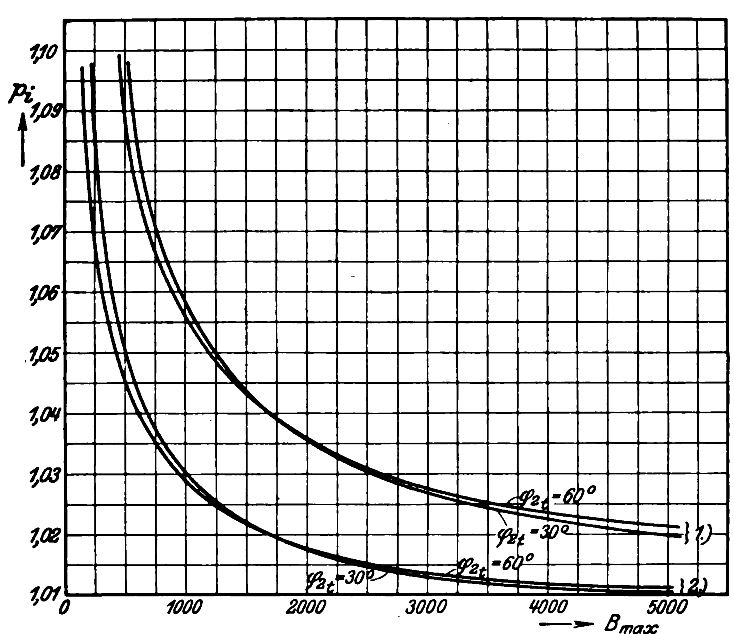


Abb. 13. Übersetzungsfaktor als Funktion der Eiseninduktion bei 50 und 25 Perioden und $\varphi_{2t} = +30^0$ und $+60^0$. Kurven 1: 25 Perioden. Kurven 2: 50 Perioden.

Wie wir zunächst aus diesen Kurven ersehen können, bewirkt eine Periodenzahländerung sowohl eine Beeinflussung der Winkelabweichung als auch des Übersetzungsfaktors, und zwar derart, daß einer Periodenzahlabnahme stets eine Zunahme und einer Periodenzahlzunahme stets eine Abnahme derselben entspricht. Hierbei ist auch die Beeinflussung des Übersetzungsfaktors bedeutend stärker als diejenige der Winkel-

abweichung und ferner hat die sekundäre Phasenverschiebung φ_{2t} keinen Einfluß auf dieselbe, da bei $\varphi_{2t} = 30^0$ und 60^0 ungefähr dieselbe Beeinflussung auftritt, wie die Abb. 13 und 14 zeigen.

Rechnen wir nun noch an unserem Stromwandler z. B. bei einer Induktion von $B_{max} = 1000$ Maxwell/cm² und $\varphi_{2t} = 60^0$ die Größenordnung der Abweichung zwischen 50 und 25 Perioden nach, so ergibt sich ein Fehler zwischen beiden Werten von

$$\Delta_{pi} = \frac{1{,}058 - 1{,}0292}{1{,}0292} 100 = 2{,}23\,^0/_0,$$

bezogen auf den Wert bei 50 Perioden. Bei kleineren Induktionen nimmt dieser Wert noch zu und bei größeren Induktionen nimmt er etwas ab. Bei noch kleineren Periodenzahlen als 25 nimmt dementsprechend der prozentuale Fehler noch mehr zu. Würden wir nun auf dieselbe Weise auch noch den Übersetzungsfaktor und die Winkel-

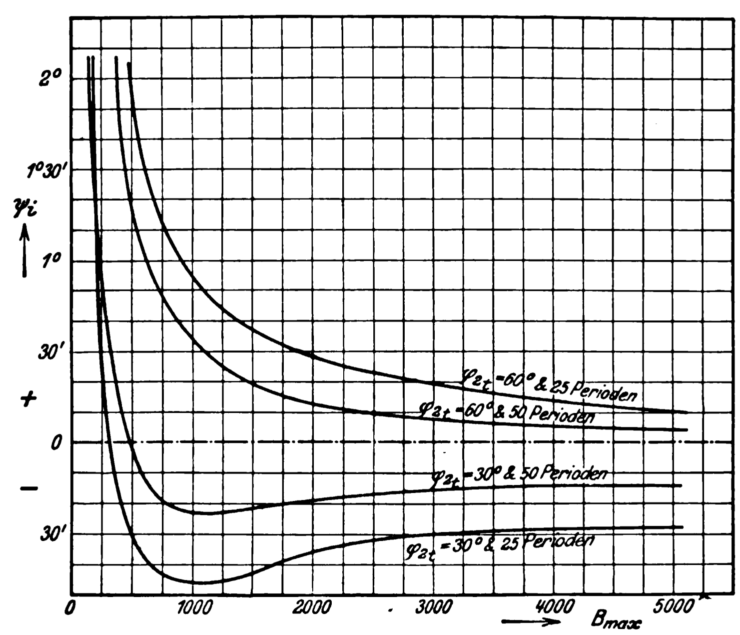


Abb. 14. **Winkelabweichung als Funktion der Eiseninduktion bei 50 und 25 Perioden und einer sekundären Phasenverschiebung $\varphi_{2t} = +30^0$ und $+60^0$.**

abweichung für größere Periodenzahlen als 50 berechnen, z. B. für 75 Perioden, so ergibt sich das eigentümliche Resultat, daß mit steigender Periodenzahl die Beeinflussung nicht im gleichen Maße abnimmt, wie dieselbe mit fallender Periodenzahl zunimmt. Darüber gibt uns auch bereits die Gl. 20) Aufschluß, da nach jener Beziehung derjenige Teil der Konduktanz g_a, welcher von der Hysterese abhängt, die Periodenzahl im Quadrat im Nenner enthält und daher mit fallender Periodenzahl schneller zu- als mit steigender abnimmt. Ein Stromwandler ist deshalb viel weniger empfindlich gegenüber höheren Periodenzahlen als gegenüber niederen, so daß wir gerade bei Präzisions- und Kontrollstromwandlern, die für verschiedene Periodenzahlen bestimmt sind, auf diese Erscheinung besonders Rücksicht nehmen müssen. Wenn wir z. B. einen Stromwandler für 15 bis 50 Perioden zu dimensionieren haben, so dürfen wir, wenn die Fehler bei extremen Periodenzahlen nicht zu hoch ausfallen sollen, denselben nicht für 50 Perioden und auch nicht für 15 Perioden dimensionieren, sondern er muß für eine mittlere Periodenzahl dimensioniert werden. Dabei fällt natürlich auch diejenige Periodenzahl am meisten ins Gewicht, bei welcher der Strom-



wandler am häufigsten arbeitet, deshalb muß die Dimensionierung nach jener Richtung geschehen.

Aus Gl. 20) können wir nun noch ferner ersehen, wie wir den Einfluß der Periodenzahl am einfachsten reduzieren können. Offenbar besteht hier die einzige Möglichkeit, diesen Einfluß zu mildern, darin, daß wir solche Stromwandler, die starken Periodenzahlenänderungen ausgesetzt sind, mit einer möglichst großen Amperewindungszahl versehen, denn je größer die magnetisierende Amperewindungszahl ist, desto kleiner sind die gesamten Fehler und damit die Fehleränderungen infolge einer veränderlichen Periodenzahl. Diese Erscheinung ist wiederum außerordentlich wichtig für Präzisionsstromwandler, denn mit je weniger Amperewindungen wir solche ausführen, desto stärker wirken Periodenzahländerungen auf die Größe der Fehler ein.

Bei diesen Untersuchungen über den Einfluß der Periodenzahl auf die Abweichungen eines Stromwandlers haben wir bisher angenommen, daß nur allein die Verluste durch dieselbe beeinflußt werden, dagegen die Amperewindungszahl pro cm Kraftlinienlänge keine oder nur unwesentliche Veränderungen bei gleichbleibender Induktion erleidet. In Wirklichkeit tritt aber auch eine Beeinflussung der letzteren ein, so daß dadurch die Fehler zum Teil größer und zum Teil kleiner werden.

Wir wollen deshalb im folgenden noch an einem Stromwandler experimentell die Größenordnung der durch die Periodenzahl verursachten Fehler feststellen. Zu diesem Zwecke wurde an einem Stromwandler für 100/5 Ampere mit $AW_t = 1200$ entsprechend $w_1 = 12$ und $w_2 = 236$ Windungen das Übersetzungsverhältnis u_i als Funktion des Primärstromes J_1 bei verschiedenen Periodenzahlen ermittelt. Der Sekundärkreis war dabei nur mit einem Amperemeter belastet, da nur der Primär- und Sekundärstrom gemessen wurde. In Abb. 15 sind die aus den Strömen berechneten Werte der Übersetzungsverhältnisse als Funktion des Primärstroms aufgetragen. Wie diese Kurven zeigen, verursacht eine fallende Periodenzahl ganz bedeutend größere Abweichungen als eine steigende, und zwar tritt diese Erscheinung um so mehr hervor, je kleiner die Periodenzahl ist. Dies geht am deutlichsten aus den beiden Kurven bei 15 und 20 Perioden hervor, indem zwischen diesen beiden Kurven die Abweichungen ganz bedeutend größer sind als z. B. zwischen denjenigen bei 40 und 50 Perioden oder 50 und 60 Perioden. So beträgt z. B. bei 60% des Vollaststroms die Abweichung zwischen den Kurven bei 15 und 20 Perioden, bezogen auf die letztere Kurve,

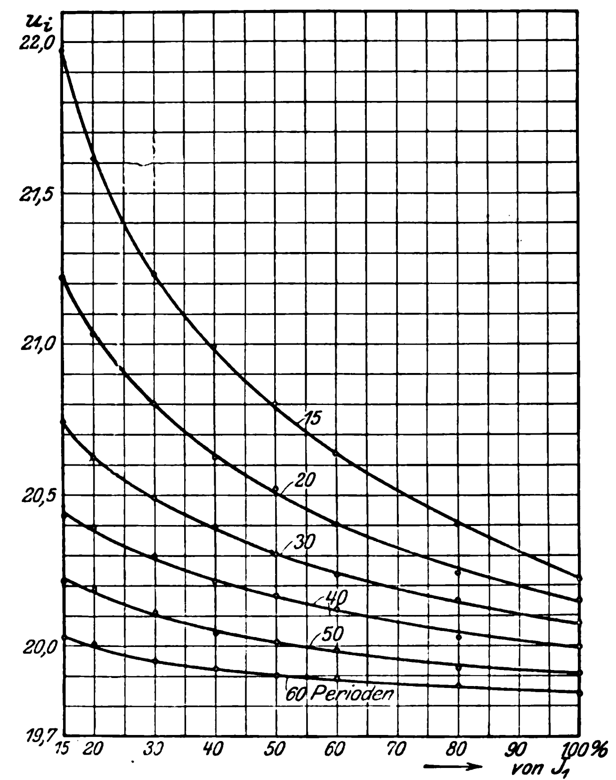


Abb. 15. Übersetzungsverhältnis eines Stromwandlers von 100/5 Amp. als Funktion des Primärstromes bei verschiedenen Periodenzahlen.
Amperewindungszahl = 1200
Windungszahlen $\frac{w_1}{w_2} = \frac{12}{236}$.

$$\Delta_{pi} = 100 \cdot \frac{20{,}64 - 20{,}4}{20{,}4} = 1{,}18\,\%,$$

dagegen zwischen den Kurven bei 40 und 50 Perioden nur

$$\Delta_{pi} = \frac{20{,}11 - 19{,}98}{19{,}98} \cdot 100 = 0{,}65\,\%,$$

bezogen auf die Kurve bei 50 Perioden, und schließlich zwischen den Kurven bei 50 und 60 Perioden ist

$$\Delta_{pi} = \frac{19{,}98 - 19{,}89}{19{,}89} \cdot 100 = 0{,}453\,\%,$$

bezogen auf die Kurve bei 60 Perioden. Bei kleineren Werten des Vollaststroms sind natürlich diese Abweichungen größer und umgekehrt bei größeren Werten kleiner und bestätigen vollauf die durch Rechnung erhaltenen Anschauungen.

Würden wir nun noch für diesen Stromwandler die entsprechenden Werte der Eiseninduktion ermitteln, so könnten wir die bei unserem früheren Stromwandler durch Rechnung ermittelten Abweichungen mit den obigen vergleichen uud damit gleichzeitig die Genauigkeit der Rechnung kontrollieren, da beide Stromwandler ungefähr die gleichen Windungszahlen und Kernabmessungen besitzen. Wir wollen jedoch davon absehen, da nicht beide Stromwandler dieselbe primäre Wicklungsanordnung besitzen und gerade der Einfluß der Periodenzahl auf die Fehler verhältnismäßig stark von den Dimensionen und der Anordnung der Primärwicklung abhängt.

Diese Erscheinung zeigte sich in außerordentlich starkem Maße bei der Untersuchung eines Stromwandlers mit 4 Meßbereichen und primärer Umschaltung, bei welchem für jeden Meßbereich eine andere Anordnung und ein anderer Leiterquerschnitt der Primärwicklung verwendet wurde. Hierbei ergaben sich die größten Abweichungen bei verschiedenen Periodenzahlen beim kleinsten Meßbereich, bei welchem sämtliche Abteilungen der Primärwicklung in Reihe geschaltet waren, dagegen ergab der folgende Meßbereich, bei welchem nur die mittlere Abteilung benutzt wurde, die günstigsten Resultate. Offenbar spielen hierbei die Streuverhältnisse und die Stromverteilung in der Primärwicklung eine sehr wichtige Rolle, denn dieselben waren gerade für die mittlere Abteilung am günstigsten. Solche Einflüsse lassen sich aber nicht mehr einwandfrei durch Rechnung feststellen, sondern können nur experimentell ermittelt werden, so daß in unserem Falle eine Nachrechnung zum Vergleiche wertlos wäre.

Auf dieselbe Weise wie die Periodenzahl wirkt auch eine verzerrte Kurvenform der angelegten Spannung auf den Stromwandler, da wir uns dieselbe aus mehreren Spannungskurven verschiedener Periodenzahlen zusammengesetzt denken. Wir werden jedoch auf diesen Einfluß erst weiter unten bei den verschiedenen Kurvenformen näher eingehen.

Diese Untersuchungen über den Einfluß der Periodenzahl ergeben deshalb das wichtige Resultat, daß die hierdurch hervorgerufenen Abweichungen ganz erheblich sind und namentlich bei Präzisions- und Kontrollstromwandlern schon bei der Dimensionierung in Betracht gezogen werden müssen. Bei Stromwandlern, welche ständig in einem und demselben Stromkreis liegen und dauernd unter Strom und Spannung sind, fallen die Fehler infolge einer Periodenzahländerung in der Regel innerhalb der Fehlergrenze, solange es sich eben nur um Änderungen einiger Perioden handelt. Die Mittel zur Milderung dieses Einflusses bestehen nur in der Erhöhung der totalen Amperewindungszahl und in einer möglichst symmetrischen Anordnung der Primär- und Sekundärwicklung.

b) Einfluß der primären und sekundären Phasenverschiebung. Wir haben bereits zu Anfang bei den Hauptgleichungen eines Stromwandlers Gl. 6) bis 12)



kennen gelernt, daß das Übersetzungsverhältnis und die Winkelabweichung außerordentlich stark von der totalen sekundären Phasenverschiebung φ_{2t} und damit auch von der Art der Sekundärbelastung abhängig ist. Aber nicht nur allein die sekundäre Phasenverschiebung wirkt auf die Fehler eines Stromwandlers ein, sondern auch die primäre Netzphasenverschiebung φ zwischen dem Netzstrom und der Netzspannung macht sich im ungünstigen Sinne bemerkbar.

Wir wollen deshalb im folgenden auch diese Einflüsse einer genaueren Untersuchung unterziehen und untersuchen zuerst den Einfluß der sekundären Phasenverschiebung φ_{2t}.

Wir haben bereits früher bei unserem Rechnungsbeispiel mit $w_2 = 80$ und 240 Windungen in Tabelle VI und VII die Winkelabweichung und den Übersetzungsfaktor bei verschiedenen sekundären Phasenverschiebungen φ_{2t} als Funktion der Induktion berechnet und kennen gelernt, daß dieser Einfluß ganz erheblich ist. In den Abb. 6 bis 9 sind diese Werte als Funktion der Induktion aufgetragen und zeigen diese Kurven eine ganz eigentümliche Abhängigkeit von φ_{2t}. Zunächst ergibt sich, daß die Winkelabweichung weniger stark durch φ_{2t} beeinflußt wird als der Übersetzungsfaktor und daß diese Beeinflussung bei großem und kleinem Phasenwinkel φ_{2t} und ebenso bei induktiver und kapazitiver Belastung in ganz verschiedener Richtung erfolgt. Auch erfolgt die Beeinflussung bei beiden Windungszahlen, bezogen auf dieselbe Eiseninduktion, genau in gleicher Weise, nur daß dabei die Größenordnung der Abweichungen bei beiden verschieden ausfällt. Würden wir die Abweichungen nicht auf dieselbe Eiseninduktion beziehen, sondern für beide Windungszahlen auf denselben Sekundärstrom, so würde sich für beide ein ganz verschiedenes Verhalten ergeben. Wir werden darauf weiter unten noch zurückkommen. Wie nun die Kurven der Abb. 6 und 9 für die Winkelabweichung zeigen, nimmt dieselbe für $\varphi_{2t} = 90^0$ bis $\varphi_{2t} = 0^0$ stetig ab und erreicht bereits bei $\varphi_{2t} = 30^0$ negative Werte, die um so größer werden, je mehr sich φ_{2t} dem Wert Null und negativen Werten nähert. Bei induktiver Belastung, d. h. für alle Werte von $\varphi_{2t} = +90^0$ bis 0^0 ist die Winkelabweichung zum Teil positiv und negativ und zum Teil ganz negativ, während dem für kapazitive Belastung, d. h. für alle Werte von $\varphi_{2t} = 0^0$ bis -90^0 dieselbe stets negativ bleibt.

Ein völlig anderes Verhalten zeigt der Übersetzungsfaktor, wie die Kurven der Abb. 7 und 9 lehren. Bei induktiver Belastung also für die Phasenwinkel $\varphi_{2t} = +90^0$ bis 0^0 nimmt der Übersetzungsfaktor zuerst zu und dann stetig ab und erreicht schließlich bei sehr großen kapazitiven Belastungen die kleinsten Werte, nämlich solche, die unterhalb dem Wert 1 liegen. Kehren wir einen Augenblick zu unserem allgemeinen Stromwandlerdiagramm zurück, so lehrt uns dasselbe, Abb. 2, daß für den Fall $p_i < 1$ die sekundäre Amperewindungszahl größer wird als die primäre, d. h. daß die für die Magnetisierung erforderlichen Amperewindungen nicht von der Primärseite, sondern von der Sekundärseite aus geliefert werden. Dazu sind aber, wie die Kurven der Abb. 7 und 9 zeigen, außerordentlich große kapazitive Belastungen notwendig, wie sie wohl kaum praktisch vorkommen werden und besitzen deshalb solche Fälle auch kein besonderes Interesse, wohl aber ist es theoretisch interessant, diese Abhängigkeit zu verfolgen. Wir können uns nun noch ein klareres Bild über diese Abhängigkeit von φ_{2t} machen, indem wir die Winkelabweichung und den Übersetzungsfaktor als Funktion dieses Phasenwinkels φ_{2t} bei verschiedenen Eiseninduktionen auftragen, wie dies z. B. für $w_2 = 240$ Windungen in Abb. 16 und 17 mit den Werten der Abb. 8 u. 9 geschehen ist. Abb. 16 zeigt diese Abhängigkeit für die Winkelabweichung und Abb. 17 für den Übersetzungsfaktor. Ein Vergleich beider Abbildungen zeigt uns nun sofort, daß hier zwischen der Winkelabweichung und dem Übersetzungsfaktor gewisse Gegensätze bestehen, indem nicht für beide gleichzeitig bei demselben Phasenwinkel φ_{2t} ein Minimum oder ein Maximum der Abweichung eintritt. Der Übersetzungsfaktor



erreicht ein Minimum in der Abweichung bei sehr großen induktiven und kapazitiven Belastungen, bzw. bei den Phasenwinkeln $\varphi_{2t} = \pm 90^0$, dagegen die Winkelabweichung nur allein bei solchen in der Nähe von $\varphi_{2t} = 0^0$.

Würden wir deshalb bei einem Stromwandler die Verhältnisse so wählen, daß die Abweichung in der Winkelabweichung ein Minimum wird, so würden wir sehr große Abweichungen im Übersetzungsfaktor zu erwarten haben und umgekehrt. Wir können daher niemals gleichzeitig für beide ein Minimum in den Abweichungen erreichen, da diese Gegensätze dem Stromwandler sozusagen angeboren sind.

Diese Kurven der Abb. 16 und 17 zeigen uns nun ferner recht deutlich, wie sich unser Stromwandler bei der angenommenen Belastung, bei verschiedenem konstanten Phasenwinkel φ_{2t} und veränderlicher Induktion verhält. Wir erkennen

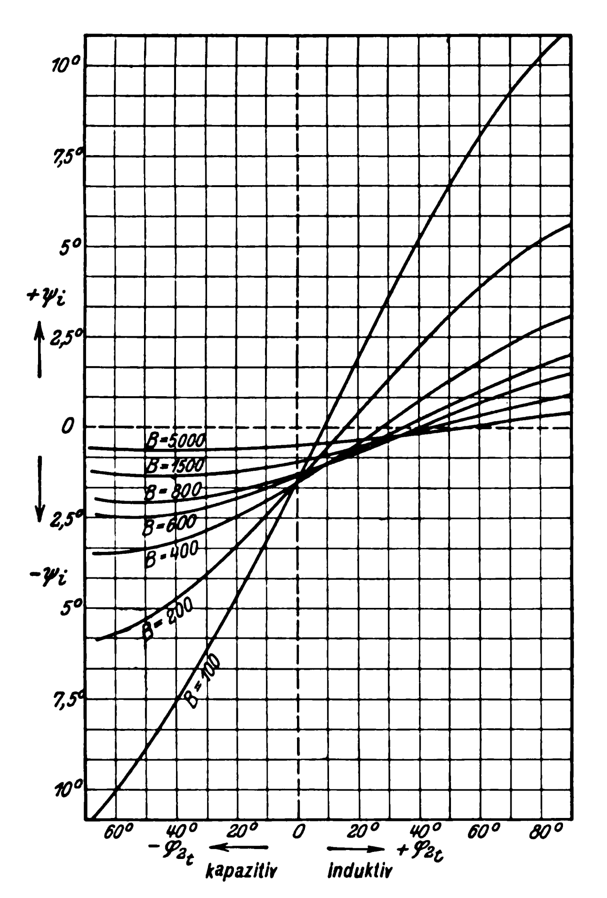


Abb. 16. Winkelabweichung ψ_i als Funktion der sekundären Phasenverschiebung φ_{2t} bei verschiedenen Eisenbeanspruchungen.

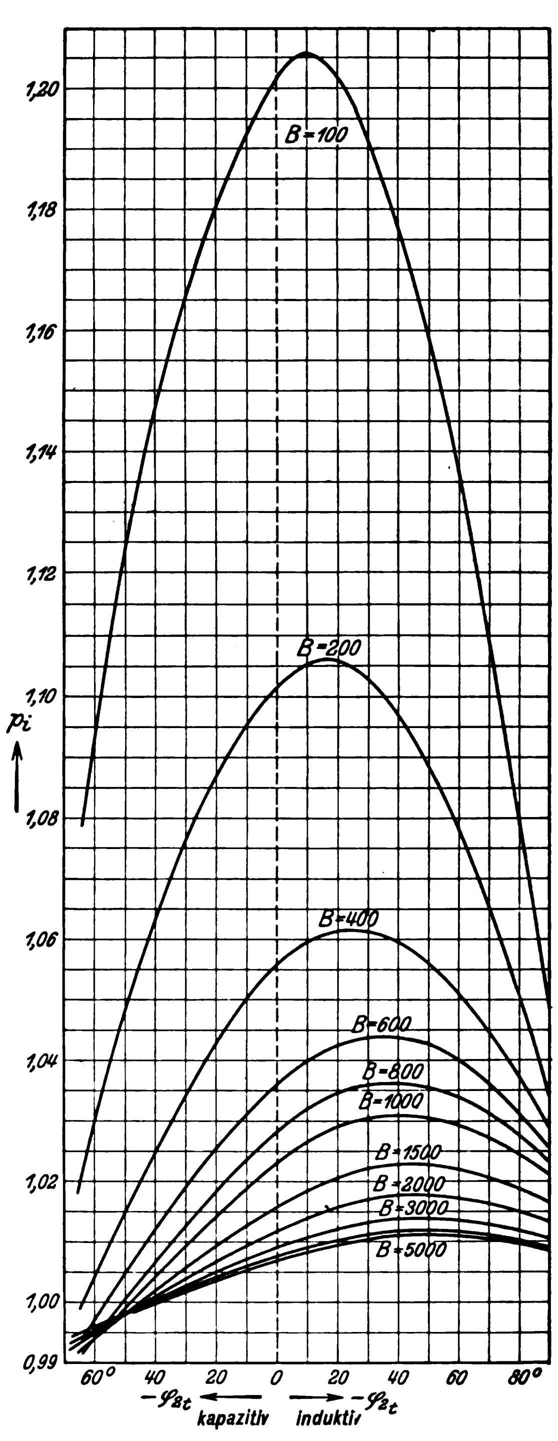


Abb. 17. Absoluter Übersetzungsfaktor p_i als Funktion der sekundären Phasenverschiebung φ_{2t} bei verschiedenen Eisenbeanspruchungen.



darin wiederum, daß die Abweichungen um so größer sind, je kleiner die Eiseninduktion ist. Dies gilt sowohl für die Winkelabweichung, als auch für den Übersetzungsfaktor, da nach früherem beide mit abnehmender Induktion zunehmen. Diese Darstellungsweise gestattet deshalb einen vorzüglichen Einblick in diese Abhängigkeit von der sekundären Phasenverschiebung und lehrt uns ferner, daß die Abhängigkeit von der Eiseninduktion beim Übersetzungsfaktor um so kleiner ist, je größer der totale sekundäre Phasenverschiebungswinkel φ_{2t} ist. Diese letztere Erscheinung bestätigt sich auch praktisch noch in einer andern Hinsicht, indem nämlich mit steigender Amperewindungszahl des Stromwandlers bei gleichbleibender Belastung φ_{2t} zunimmt, da die Reaktanz der Sekundärwicklung schneller zunimmt als der Ohmsche Widerstand, so daß nicht nur die größere Eiseninduktion, sondern auch der größere Phasenwinkel φ_{2t} eine Verbesserung des Übersetzungsfaktors bedingt.

Wir haben früher bei unserem Berechnungsbeispiel mit $w_2 = 80$ Windungen gesehen, daß bei der angenommenen totalen sekundären Impedanz $z_{2t} = 2{,}5$ Ohm die Eiseninduktion bei einem Sekundärstrom von $J_2 = 5$A beträchtlich größer wird als 5000 Maxwell/cm². In Abb. 6 und 7 haben wir aber trotzdem nur die Winkelabweichung und den Übersetzungsfaktor bis zu einer Induktion von $B_{max} = 5000$ Maxwell/cm² aufgetragen und dieselben mit denjenigen des Stromwandlers mit $w_2 = 240$ Windungen verglichen. Ein solcher Vergleich ist aber nicht zweckmäßig, sondern wir müßten richtiger die entsprechenden Werte der Winkelabweichung und des Übersetzungsfaktors für denselben Sekundärstrom miteinander vergleichen. Wir wollen deshalb im folgenden noch z. B. für einen Phasenwinkel $\varphi_{2t} = 60^0$ für beide Windungszahlen den Übersetzungsfaktor und die Winkelabweichung als Funktion des Sekundärstromes darstellen, da sich hierbei das Verhalten beider Stromwandler im richtigen Lichte zeigt. Dazu ist aber für den Stromwandler mit $w_2 = 80$ Windungen die Berechnung der Winkelabweichung und des Übersetzungsfaktors für Eiseninduktionen, die größer sind als 5000 Maxwell/cm², erforderlich, da nach der Tabelle VI bei einem Sekundärstrom von $J_2 = 5$ Ampere die Induktion $B_{max} = 9570$ Maxwell/cm² wird. Zu diesem Zwecke sind in der folgenden Tabelle für $\varphi_{2t} = 60^0$ noch die entsprechenden Werte von ψ_i und p_i für die Induktionen $B_{max} = 6000$ bis 10000 Maxwell/cm² als Ergänzung der Abb. 6 u. 7 nachgerechnet.

Tabelle XIV.

B_{max}	tg α	$g_s'' r_{2t}$	$\frac{1}{g_a'' r_{2t}}$	tg φ_{2t} tg α	tg ψ_i	ψ_i	p_i
6000	1,392	0,02796	35,8	2,414	0,00867	+ 30′	1,0954
7000	1,5325	0,02686	37,2	2,657	0,00488	+ 16,8′	1,0984
8000	1,795	0,02602	38,4	3,112	0,00148	− 5,1′	1,107
9000	2,176	0,02577	38,8	3,767	0,0102	− 35,2′	1,1227
10000	2,745	0,02537	39,4	4,76	0,02245	− 1⁰ 17′	1,146

Rechnen wir nun nach Tabelle VI für die einzelnen Eiseninduktionen die zugehörigen Werte der Sekundärströme nach und tragen dazu die entsprechenden Werte der Winkelabweichung und des Übersetzungsfaktors auf, so erhalten wir die in Abb. 18 aufgezeichneten Kurven für beide Windungszahlen und $\varphi_{2t} = 60^0$. Wie diese Kurven zeigen, ist nun der Verlauf derselben für beide Windungszahlen nicht mehr der gleiche wie in den Abb. 6 bis 9. Bei den Kurven für $w_2 = 240$ Windungen hat sich nichts geändert, da die Eiseninduktion bei $J_2 = 5$ Ampere unterhalb 5000 Maxwell/cm² blieb. Dagegen ändert sich ganz wesentlich die ψ_i- und p_i-Kurve bei höheren Induktionen. Der Übersetzungsfaktor p_i nimmt nämlich nicht, wie es zu erwarten gewesen wäre, mit zunehmender Induktion ab, sondern zu, und die Winkelabweichung ψ_i erreicht bei höheren Induktionen sehr schnell die Grenze Null und negative Werte. Wir erkennen daher aus diesen Kurven, daß der Verlauf derselben nicht mehr für beide Windungs-

zahlen derselbe ist, und daß die Verhältnisse offenbar um so ungünstiger werden, je kleiner die Windungszahlen werden. Würden wir nun noch für andere Phasenwinkel φ_{2t} dieselben Kurven berechnen, so würde sich ergeben, daß der Übersetzungsfaktor in allen Fällen mehr oder weniger denselben Verlauf nehmen würde und sich nur die Größenordnung desselben ändert. Etwas anders liegen jedoch die Verhältnisse bei der Winkelabweichung. Für noch größere Winkel als $\varphi_{2t} = 60^0$ würde mit zunehmender Induktion die Winkelabweichung nicht mehr negativ werden, sondern positiv bleiben und wie der Übersetzungsfaktor zunehmen. Für sehr kleine und negative Winkel φ_{2t} bleibt die Winkelabweichung stets negativ und nimmt mit zunehmender Induktion zuerst ab und dann zu für dieselbe Windungszahl $w_2 = 80$ Windungen. Für noch kleinere Windungszahlen würde natürlich dieselbe Erscheinung in noch stärkerem Maße hervortreten und ferner wird der Verlauf dieser Kurven ganz wesentlich beeinflußt durch unsymmetrische Streuverhältnisse und unsymmetrische Anordnungen der

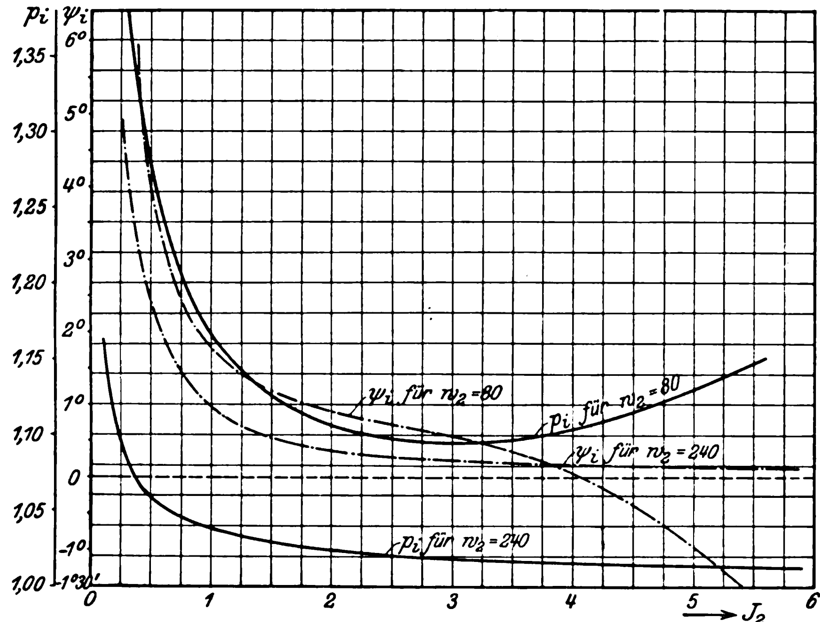


Abb. 18. Übersetzungsfaktor p_i und Winkelabweichung ψ_i eines Stromwandlers mit $w_2 = 80$ und 240 Windungen bei $\varphi_{2t} = +60^0$.

Wicklungen, wie wir bereits früher erwähnt haben. Dieselben Kurven lassen sich nicht nur durch Rechnung finden, sondern auch experimentell, jedoch wird man dabei den Phasenwinkel φ_{2t} nicht in sehr weiten Grenzen variieren können, da der Ohmsche und induktive Widerstand der Sekundärwicklung dies zum vornherein verhindern.

Diese Verhältnisse über die Abhängigkeit von der sekundären Phasenverschiebung, wie sie hier durch Rechnung dargestellt wurden, sind in neuester Zeit von Harned[1]) an drei ganz verschiedenen Stromwandlern mit verschiedenen Windungszahlen experimentell bestätigt worden.

Diese sehr wertvollen und interessanten Untersuchungen von Harned wurden an drei Stromwandlern von 150, 600 und 1500 Amperewindungen, bei den Sekundärbelastungen von 15, 36, 63 und 90 Watt und ebenso bei den Leistungsfaktoren 0,97, 0,8, 0,6 und 0,4 im äußeren Sekundärkreis durchgeführt. Diese Untersuchungen geben daher Aufschluß über das Verhalten eines Stromwandlers in Abhängigkeit der Sekun-

[1]) Mark L. Harned, Operating Characteristics of Current Transformers Electr. World, Bd. 67, S. 869, 1916.



därbelastung, der sekundären Phasenverschiebung und der Amperewindungszahl bei 60 Perioden in der Sekunde. An Stelle des Übersetzungsfaktors wurde in dieser Arbeit das Verhältnis des Sollwertes zum wahren Wert des Übersetzungsverhältnisses angegeben. Hierbei ergibt wiederum der Stromwandler mit nur 150 Amperewindungen sowohl in bezug auf die Winkelabweichung, als auch in bezug auf den Übersetzungsfaktor die größten Abweichungen, dagegen sind die Abweichungen beim Stromwandler mit 1500 Amperewindungen äußerst gering sowohl bei großen Sekundärbelastungen als auch bei großen sekundären Phasenverschiebungen.

Wie deshalb diese Untersuchungen über die Abhängigkeit von der sekundären Phasenverschiebung ergeben, ist dieser Einfluß um so größer, je kleiner die magnetisierende Amperewindungszahl ist. Diese Erscheinung ist wiederum außerordentlich wichtig bei Präzisionsstromwandlern, da hierbei ganz verschiedenartige Apparate angeschlossen werden, die unter Umständen große Fehler verursachen können. Auch bei Stromwandlern, die fest eingebaut werden, ist diese Abhängigkeit wichtig, da die sekundäre Phasenverschiebung je nach der Ausführung der Sekundärleitungen zwischen Stromwandler und Anschlußapparaten und je nach der Art der Anschlußapparate selber verschieden groß ausfallen kann und damit im Betriebe ganz andere Fehler auftreten, wie die Nachprüfungen auf dem Prüfstande ergeben. Gerade in dieser Richtung wird wohl heute noch am meisten bei Stromwandlern gesündigt, indem in der Regel nur die Größe der auftretenden sekundären Phasenverschiebung bei der Eichung und Abgleichung in Betracht gezogen wird. Gerade in bezug auf diese Abhängigkeit ist es deshalb notwendig, daß unsere Prüfbestimmungen für die Nachprüfung und Beglaubigung von Stromwandlern eine Revision erfahren, da dieselben viel zu mangelhaft sind und den wirklichen Verhältnissen in keiner Weise gerecht werden. Wir wollen im folgenden nun noch zum Einfluß des primären Leistungsfaktors übergehen und untersuchen, welche Abweichungen derselbe hervorruft. Zu diesem Zwecke müssen wir zuerst die Beziehungen aufstellen, welche zwischen der primären Leistung W_1 und derjenigen W_2 bestehen, die wir auf der Sekundärseite des Stromwandlers messen.

Ist P die primäre Netzspannung, J_1 der primäre Netzstrom und φ der Phasenwinkel zwischen beiden, so ist die Netzleistung

$$W_1 = P \cdot J_1 \cdot \cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

Die mit dem Stromwandler auf der Sekundärseite gemessene Leistung ist

$$W_2 = P \cdot J_2 \cdot \cos(\varphi \pm \psi_i) = P \cdot \frac{J_1}{u_i} (\cos\varphi \cos\psi_i \mp \sin\varphi \sin\psi_i),$$

wenn u_i das Übersetzungsverhältnis und ψ_i die Winkelabweichung des Stromwandlers ist. Das positive Vorzeichen im ersten Ausdruck gilt dann für kapazitive Belastungen und das negative für induktive.

Nehmen wir hierin $\cos\varphi$ vor die Klammer und führen aus Gl. 23) die primäre Netzleistung W_1 in diese Beziehung ein, so wird:

$$W_2 = \frac{P \cdot J_1 \cdot \cos\varphi}{u_i} (\cos\psi_i \mp \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i) = \frac{W_1}{u_i} (\cos\psi_i \mp \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i) \quad \ldots \quad 24)$$

Ist nun noch u_{is} das Soll-Übersetzungsverhältnis des Stromwandlers, so wird die auf das Primärsystem reduzierte Leistung

$$W_2' = u_{is} \cdot W_2 = \frac{u_{is}}{u_i} \cdot W_1 (\cos\psi_i \mp \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i) \quad \ldots \ldots \quad 25)$$

oder schließlich wird der Fehler in der Leistungsmessung

$$\Delta\% = \frac{W_2' - W_1}{W_1} \cdot 100 = \frac{u_{is}(\cos\psi_i \mp \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i) - u_i}{u_i} \cdot 100 \quad \ldots \quad 26)$$



Hierin gilt im Klammerausdruck das negative Vorzeichen für kapazitive und das positive Vorzeichen für induktive Belastungen.

Wie aus dieser Beziehung ohne weiteres hervorgeht, hat der primäre Leistungsfaktor einen um so größeren Einfluß auf die Fehler eines Stromwandlers, je größer die Winkelabweichung zwischen dem Primär- und Sekundärstrom ist. In Netzen oder Anlagen, wo von Natur aus der Leistungsfaktor klein ist, beziehungsweise große primäre Phasenverschiebungen vorkommen, muß deshalb bei Stromwandlern die Winkelabweichung äußerst klein gehalten werden, damit die auftretenden Fehler in zulässigen Grenzen bleiben. Dies ist natürlich auch bei Präzisionsstromwandlern der Fall, da dieselben zu Leistungsmessungen bei großen und kleinen Netzleistungsfaktoren verwendet werden und die Fehler überall in zulässigen Grenzen bleiben sollen.

Wir wollen nun im folgenden noch bei unserem Stromwandler mit $w_2 = 240$ Windungen die Größenordnung der durch den primären Leistungsfaktor verursachten Fehler nachrechnen. Wir legen unseren Betrachtungen ein Soll-Übersetzungsverhältnis $u_{i_s} = 5$ zugrunde, entsprechend den Strömen $J_1 = 25$ Ampere und $J_2 = 5$ Ampere. Dabei nehmen wir ferner an, die primäre Windungszahl betrage $w_1 = 49$ Windungen, so daß $\frac{w_2}{w_1} = 4,899$ wird und der Soll-Übersetzungsfaktor $p_{i_s} = 1,02$. In diesem Falle entfallen bei einem primären Nennstrom von $J_1 = 25$ Ampere durchschnittlich auf die Magnetisierung 25 Amperewindungen. Wir rechnen nun mit diesen Annahmen für die Netzleistungsfaktoren $\cos\varphi = 1$ und $\cos\varphi = 0,707$ entsprechend den Phasenwinkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = \mp 45^0$ und verschiedenen sekundären Phasenwinkeln φ_{2t} die zugehörigen Fehler nach. Dabei lassen wir jedoch negative φ_{2t} weg, da solche kapazitive Phasenverschiebungen wohl gar nicht oder nur sehr selten prakttisch vorkommen und die sekundäre Phasenverschiebung sich in der Regel in den Grenzen $\varphi_{2t} = + 30^0$ bis $+ 80^0$ bewegt, wobei in den unteren Grenzen bereits etwa vorhandene kapazitive Belastungen enthalten sind.

In den folgenden zwei Tabellen sind dann außer diesen Fehlern auch noch die zugehörigen Sekundärströme angegeben, damit die Fehler als Funktion derselben nachher aufgetragen werden können.

Tabelle XV.

B_{max}	J_2	Δ % für $\varphi_{2t} = 90^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 60^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 30^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 0^0$
	Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 1$; $\varphi = 0^0$				
200	0,32	− 1,827	− 5,585	− 11,18	− 7,38
400	0,63	− 0,924	− 3,023	− 3,865	− 3,345
600	0,95	− 0,566	− 1,943	− 2,26	− 1,57
800	1,25	− 0,342	− 1,356	− 1,527	− 0,80
1000	1,56	− 0,103	− 0,898	− 0,967	− 0,313
1500	2,35	+ 0,342	− 0,201	− 0,176	+ 0,391
2000	3,14	+ 0,661	+ 0,268	+ 0,312	+ 0,793
3000	4,70	+ 0,887	+ 0,638	+ 0,691	+ 1,09
4000	6,26	+ 1,075	+ 0,828	+ 0,892	+ 1,241
5000	7,84	+ 1,131	+ 0,915	+ 0,90	+ 1,322
	Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 0,707$; $\varphi = - 45^0$ kapazitiv				
200	0,32	− 11,42	− 11,975	− 13,175	− 4,94
400	0,63	− 6,225	− 6,08	− 4,16	− 0,836
600	0,95	− 4,04	− 3,652	− 1,896	+ 0,816
800	1,25	− 2,955	− 2,541	− 0,944	+ 1,453
1000	1,56	− 2,30	− 1,91	− 0,321	+ 1,711
1500	2,35	− 1,213	− 0,739	+ 0,437	+ 2,004
2000	3,14	− 0,509	− 0,099	+ 0,845	+ 2,10
3000	4,70	+ 0,056	+ 0,390	+ 1,145	+ 2,135
4000	6,26	+ 0,335	+ 0,647	+ 1,314	+ 2,159
5000	7,84	+ 0,456	+ 0,668	+ 1,321	+ 2,184

Tabelle XVI.

B_{max}	Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}707$; $\varphi = +45^0$ induktiv				
	J_2	Δ % für $\varphi_{2t} = 90^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 60^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 30^0$	Δ % für $\varphi_{2t} = 0^0$
200	0,32	+ 7,77	+ 0,7925	− 9,16	− 9,83
400	0,63	+ 4,323	+ 0,042	− 3,58	− 5,88
600	0,95	+ 3,03	− 0,226	− 2,623	− 3,96
800	1,25	+ 2,27	− 0,1687	− 2,11	− 3,08
1000	1,56	+ 2,099	+ 0,013	− 1,516	− 2,338
1500	2,35	+ 1,896	+ 0,338	− 0,79	− 1,225
2000	3,14	+ 1,84	+ 0,635	− 0,221	− 0,514
3000	4,70	+ 1,838	+ 0,886	+ 0,234	+ 0,042
4000	6,26	+ 1,813	+ 1,01	+ 0,471	+ 0,3205
5000	7,84	+ 1,803	+ 1,033	+ 0,478	+ 0,457

Wie diese Tabellen zeigen, übt der primäre Leistungsfaktor einen ganz erheblichen Einfluß auf den Verlauf und die Größe der Fehler aus. Ganz auffallend ist das Verhalten bei kapazitiver und induktiver Belastung im primären Stromkreis, da sich hierbei der Einfluß der Größe der Winkelabweichung ψ_i im richtigen Lichte zeigt. Tragen wir nun diese Werte als Funktion des Sekundärstromes auf, so erhalten wir schließlich die in den Abb. 19, 20 und 21 aufgezeichneten Kurven für $\cos\varphi = 1$ und $\cos\varphi = 0{,}707$ bei kapazitiver induktiver und rein ohmscher Belastung.

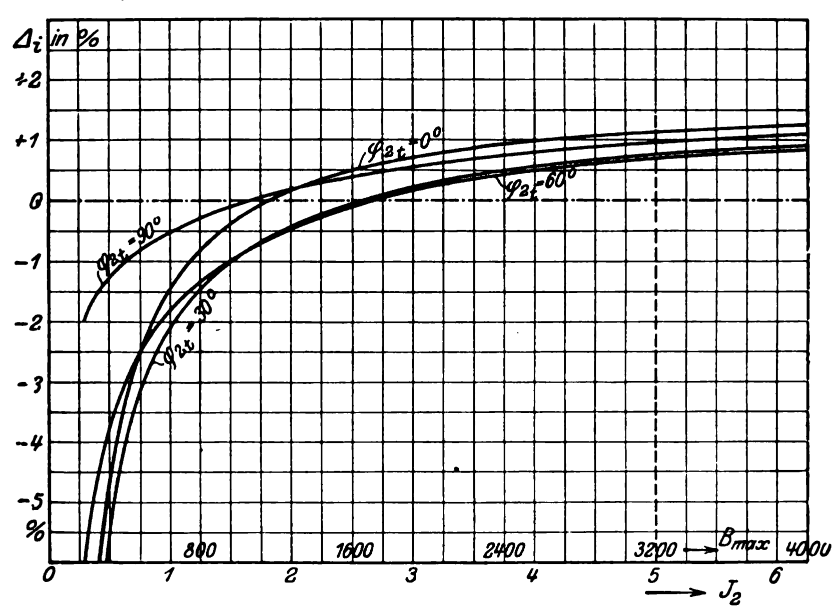


Abb. 19. Fehlerkurven als Funktion der Induktion und des Sekundärstromes. Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 1$; Soll-Übersetzungsverhältnis $u_{i s} = 5$; totale Sekundärimpedanz $Z_{2t} = 2{,}5\ \Omega$. Ströme $J_1/J_2 = 25/5$; Windungszahlen $w_1/w_2 = 49/240$.

Wie diese Kurven zunächst zeigen, werden bei ein und demselben Stromwandler bei gleichbleibender Belastung die Fehler um so größer, je kleiner der Leistungsfaktor ist. Dabei spielt aber auch die sekundäre Phasenverschiebung eine wichtige Rolle, da dadurch außerordentlich stark die Winkelabweichung und das Übersetzungsverhältnis beeinflußt wird. Wie die Kurven der Abb. 19 zeigen, wird bei einem primären Leistungsfaktor $\cos\varphi = 1$ der auftretende Fehler erst bei kleinen Strömen durch die sekundäre Phasenverschiebung stark beeinflußt. In der Nähe des Vollaststromes dagegen ist die Beeinflussung nicht sehr erheblich. Die günstigste Fehlerkurve ergibt

sich in diesem Falle bei $\varphi_{2t} = 90^0$. Das kommt daher, weil der zweite Teil des Klammerausdruckes in Gl. 26) für $\varphi = 0$ verschwindet, so daß der Einfluß der Winkelabweichung auf die Fehlerkurven nur noch sehr gering ist und bei $\varphi_{2t} = 90^0$ die Veränderlichkeit des Übersetzungsfaktors am kleinsten ist. Je kleiner φ_{2t} wird, desto größer wird die Veränderlichkeit von p_1, wie bereits in der Abb. 17 gezeigt wurde, so daß die Fehlerkurven bei kleinen Strömen immer stärker gekrümmt werden. Ganz verschieden verhalten sich die Fehlerkurven bei induktiver und kapazitiver Belastung im Netz. Bei induktiver Netzbelastung verlaufen die Fehlerkurven bei sehr großen Winkeln φ_{2t} ganz auf der positiven Seite und sind bei kleinen Strömen nach aufwärts gekrümmt, dagegen bei kleinen Winkeln φ_{2t} verlaufen sie teilweise auf der positiven und teilweise auf der negativen Seite und sind stets nach abwärts gekrümmt. Diese Erscheinung macht sich gerade sehr unangenehm fühlbar bei Präzisionsstromwandlern, da man von Fall zu Fall bei einer genauen Messung bei der entsprechenden sekun-

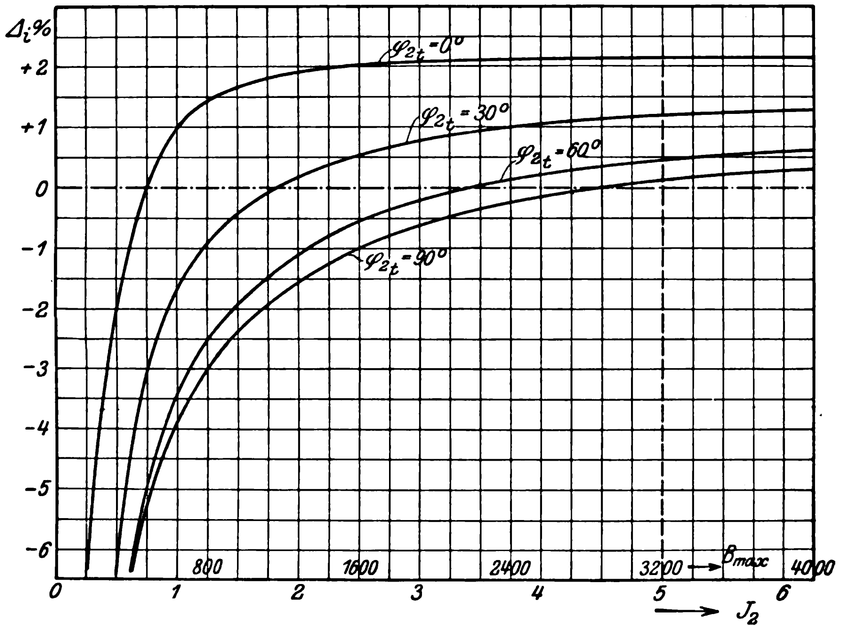


Abb. 20. Fehlerkurven als Funktion der Induktion und des Sekundärstromes. Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}707$; $\varphi = -45^0$ kapazitiv. Totale Sekundärimpedanz $Z_{2t} = 2{,}5\ \Omega$. Ströme $J_1/J_2 = 25/5$; Windungszahlen $w_1/w_2 = 49/240$. Soll-Übersetzungsverhältnis $u_{1s} = 5$.

dären Phasenverschiebung die zugehörige Fehlerkurve kennen muß, die jedoch auch wiederum von der Größe der Sekundärbelastung abhängt. Wie diese Kurven der Abb. 21 zeigen, ist bei der angenommenen Sekundärbelastung der Verlauf der Fehlerkurven am günstigsten in der Nähe von $\varphi_{2t} = 60^0$, d. h. mit sinkendem Leistungsfaktor sinkt bei induktiver Belastung auch der sekundäre Phasenwinkel für die günstigste Fehlerkurve.

Bei kapazitiver Netzbelastung schließlich sind die Fehlerkurven ausschließlich nach der negativen Seite hin gekrümmt und die günstigste Fehlerkurve tritt hierbei noch bei kleinerem φ_{2t} auf, als bei induktiver Netzlast. Diese Erscheinung wird, wie die Gl. 26) lehrt, durch die verschiedene Phasenlage der Ströme und damit durch ihr positives und negatives Vorzeichen verursacht. Wie die Abb. 20 zeigt, sind im allgemeinen die Fehler bei kapazitiver Netzlast größer als bei induktiver. Praktisch kommen aber wohl kapazitive Belastungen sehr selten vor.

Bei diesen Untersuchungen über den Einfluß des primären Netzleistungsfaktors



haben wir uns bisher nur auf eine einzige Größe der Sekundärbelastung beschränkt. Wir müßten daher unsere Betrachtungen auch noch auf kleinere und größere Sekundärbelastungen ausdehnen, um über diese Abhängigkeit ein genaues Bild zu erhalten, da auch die Größe der Sekundärlast einen bedeutenden Einfluß auf die Größe und den Verlauf der Fehler ausübt. Dabei können sich in erster Linie diejenigen Fehlerkurven bei induktiver Last ganz wesentlich verändern, welche in der Grenzzone zwischen positiv und negativ verlaufen. So z. B. wird sich in Abb. 21 die Fehlerkurve für $\varphi_{2t} = 60^0$ nach der negativen Seite hin verschieben, so daß bei kleinen Strömen diese Kurve nach abwärts gekrümmt wird. Im allgemeinen verursacht eine Verringerung der Sekundärlast stets eine Abnahme der positiven Fehler und eine Vergrößerung der Sekundärlast eine Zunahme derselben. Die negativen Fehler jedoch verhalten sich gerade umgekehrt. Wie alle diese Untersuchungen über den Einfluß des Netzleistungsfaktors zeigen, hat nicht nur der Übersetzungsfaktor, sondern auch die Winkelabweichung einen beträchtlichen Anteil an der Größe der auftretenden Fehler. Aus diesem Grunde ist es vollkommen verwerflich, nur den Fehler des Übersetzungsfaktors allein oder nur denjenigen der Winkelabweichung allein anzugeben, wie dies heute noch vielfach durch die Prüfämter geschieht, denn dadurch wird stets ein viel zu kleiner Fehler angegeben, da weder die Winkelabweichung noch der Übersetzungsfaktor konstante Größen sind.

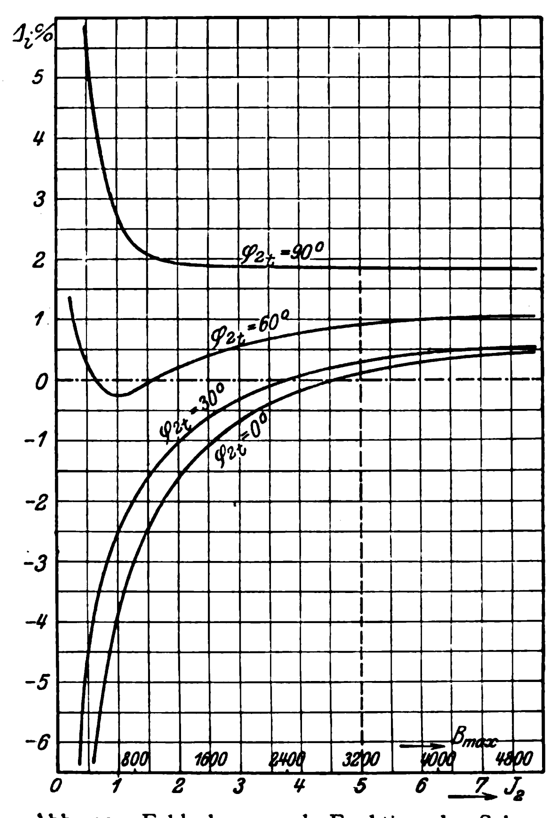


Abb. 21. Fehlerkurven als Funktion des Sekundärstromes und der Induktion. Netzleistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}707$; $\varphi = +45^0$ induktiv. Totale Sekundärreaktanz $Z_{2t} = 2{,}5\ \Omega$. Ströme $J_1/J_2 = 25/5$ A.; Windungszahlen $w_1/w_2 = 49/240$. Soll-Übersetzungsverhältnis $u_{1s} = 5$.

Wäre z. B. der Übersetzungsfaktor konstant und gleich dem Soll-Übersetzungsfaktor, also $p_i = p_{is}$, so wird auch $u_i = u_{is}$ und damit geht Gl. 26) über in

$$\Delta_{\psi i}{}^0/_0 = (\cos\psi_i \mp \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i - 1)\cdot 100 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Da meistens die Winkelabweichung verhältnismäßig klein ist, so kann bei einem guten Stromwandler unbedenklich $\cos\psi_i = 1$ gesetzt werden, und ferner darf man in diesem Falle für kleine Winkel ψ_i setzen

$$\sin\psi_i = \text{dem Bogen } \psi_i$$

oder aber

$$\sin\psi_i = \frac{\pi}{180}\cdot\psi_i{}^0,$$

dann geht Gl. 27) über in

$$\Delta_{\psi i}{}^0/_0 = \pm \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_i \cdot 100 = \pm\frac{\pi}{180}\cdot\psi_i{}^0\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot 100 \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

Oder schließlich, indem wir die Winkelabweichung in Minuten einsetzen,

$$\Delta_{\psi i}{}^0/_0 = \pm\frac{\pi}{108}\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\psi_i{}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

In Gl. 28) und 29) gilt dann das positive Vorzeichen für induktive und das negative Vorzeichen für kapazitive Belastungen.

Gerade diese letztere Beziehung findet man irrtümlicherweise heute noch in vielen Prüfattesten der Prüfämter und kann dieselbe natürlich nur dann richtige Werte über die Größe der Fehler ergeben, wenn das Übersetzungsverhältnis konstant und gleich dem Soll-Übersetzungsverhältnis ist und zudem die Winkelabweichung verhältnismäßig klein ist. Diese Bedingungen sind aber, wie die bisherigen Untersuchungen gezeigt haben, nur in sehr seltenen Fällen erfüllt, so daß Gl. 29) fast stets zu kleine Werte für die wirklichen Fehler ergibt.

Wir können das am besten zeigen, indem wir für eine bestimmte Stromstärke einmal den Fehler nach Gl. 26) und ein zweites Mal nach Gl. 29) nachrechnen und beide miteinander vergleichen. In der folgenden Tabelle sind diese Fehler z. B. für einen Sekundärstrom von $J_2 = 1,25$ A bei rein ohmscher, induktiver und kapazitiver Belastung nachgerechnet.

Tabelle XVII.

$J_2 = 1,25$ $\psi_i = 1^0\,30'$	$p_i = 1,0232$	$\varphi_{2t} = 90^0$
Belastungsart	Wirklicher Fehler nach Gl. 26)	Scheinbarer Fehler nach Gl. 29)
Rein ohmsche Belastung $\cos\varphi = 1$	$-0,342\,\%$	0
Induktive Belastung $\cos\varphi = 0,7$	$-2,27\,\%$	$+2,62\,\%$
Kapazitive Belastung $\cos\varphi = 0,707$	$-2,955\,\%$	$-2,62\,\%$
$J_2 = 1,25$ $\psi_i = +41,5'$	$p_i = 1,034$	$\varphi_{2t} = 60^0$
Rein ohmsche Belastung $\cos\varphi = 1$	$-1,356\,\%$	0
Induktive Belastung $\cos\varphi = 0,707$	$-0,169\,\%$	$+1,205\,\%$
Kapazitive Belastung $\cos\varphi = 0,707$	$-2,54\,\%$	$-1,205\,\%$
$J_2 = 1,25$ $\psi_i = -20,4'$	$p_i = 1,0358$	$\varphi_{2t} = 30^0$
Rein ohmsche Belastung $\cos\varphi = 1$	$-1,527\,\%$	0
Induktive Belastung $\cos\varphi = 0,707$	$-2,11\,\%$	$-0,593\,\%$
Kapazitive Belastung $\cos\varphi = 0,707$	$-0,944\,\%$	$+0,593\,\%$

Wie diese Tabelle zeigt, treten daher zwischen diesen beiden Arten der Fehlerberechnung ganz gewaltige Abweichungen je nach dem Phasenwinkel im Primär- und Sekundärkreis auf, so daß diese letztere Art der Fehlerberechnung vollkommen verwerflich ist und nur zu falschen Schlüssen führt. Sollen deshalb bei einem Stromwandler die Fehler angegeben werden, so muß auch gleichzeitig angegeben werden, auf welche Periodenzahl, auf welchen sekundären Phasenwinkel und auf welche Belastung sich dieselben beziehen, da sonst eine Fehlerangabe völlig zwecklos ist. Nur bei Stromwandlern, die allein zur Transformation der Ströme dienen und sekundär keine Leistungs- oder Arbeitsmesser angeschlossen sind, genügt die Angabe des Übersetzungsverhältnisses bei verschiedenen sekundären Phasenverschiebungen.

Alle diese Fehlererscheinungen infolge der primären und sekundären Phasenverschiebungen können im Betriebe mit Hochspannung noch wesentlich vergrößert werden durch die ungleichmäßige Strom- und Spannungsverteilung in den Wicklungen und durch Kapazitäts- und Ableitungserscheinungen zwischen den Wicklungen und dem Gehäuse. Diese Erscheinungen lassen sich aber auf dem normalen Stromwandlerprüfstand nicht mehr nachweisen, sondern können nur im Betriebe festgestellt werden.

Diese Einflüsse sind aber keineswegs vernachlässigbar klein, sondern können ganz gewaltige Abweichungen hervorrufen, wie der Verfasser bereits mehrfach Gelegenheit hatte festzustellen. Wenn deshalb ein Stromwandler bei einer Untersuchung auf dem Prüfstand bei allen praktisch vorkommenden primären und sekundären Phasenverschiebungen noch genügend genaue Resultate ergibt, so ist damit noch nicht gesagt, daß



dieselben auch im Betriebe erreicht werden, da wir eben solche Stromwandlerprüfungen unter ganz anderen Bedingungen vornehmen, wie sie nachher arbeiten. Es ist deshalb gerade in bezug auf die primären und sekundären Phasenverschiebungen dringend notwendig, daß unsere Prüfbestimmungen eine gründliche Revision erfahren.

c) Einfluß der sekundären Belastung. Wir haben bereits bei den bisherigen Untersuchungen kennen gelernt, daß die Größe der sekundären Belastung einen erheblichen Einfluß auf die Fehler eines Stromwandlers ausübt und daß dieser Einfluß um so stärker wird, je kleiner die Amperewindungszahl desselben ist. Wir haben ferner bei unseren bisherigen Untersuchungen konstante ohmsche, induktive und kapazitive Sekundärbelastungen angenommen und dabei die Verhältnisse bei verschiedenen sekundären Phasenverschiebungen untersucht. Bei experimentellen Untersuchungen dagegen lassen sich solche Verhältnisse nicht ohne weiteres realisieren, da wir nur die Phasenverschiebung im äußeren Sekundärkreis nach Belieben verändern können, nicht aber diejenige infolge der Streureaktanz und des Widerstandes der Sekundärwicklung, da eben dieselbe für einen gegebenen Stromwandler eine unveränderliche Größe ist. Dadurch aber lassen sich experimentell nur ganz beschränkte totale Phasenverschiebungswinkel einstellen, und zwar wiederum nur bei ganz bestimmten Sekundärbelastungen.

Würden wir nun bei experimentellen Untersuchungen sukzessive von kleinen Belastungen ausgehend dieselbe bis zu großen Belastungen ändern, so würde sich dabei auch die sekundäre Phasenverschiebung ändern, und damit haben wir nicht mehr eine reine Abhängigkeit von der Sekundärbelastung, sondern auch von der sekundären Phasenverschiebung. Wenn wir auch die Phasenverschiebung im äußeren Sekundärkreis konstant lassen, so ist damit noch lange nicht gesagt, daß dann auch die gesamte sekundäre Phasenverschiebung zwischen der induzierten EMK E_2 und dem Sekundärstrom J_2 bei veränderlicher Belastung konstant ist, sondern dieselbe wird in der Regel auch wiederum eine veränderliche Größe sein. Damit ändert sich das ganze Bild der Fehlerkurven, indem wir die Fehler nicht mehr allein als Funktion der Belastung, sondern als Funktion der Belastung und der Phasenverschiebung darstellen müßten, d. h. wir würden in diesem Falle keine Kurven, sondern Flächen erhalten, wenn wir die Fehler richtig darstellen wollen. Wir wollen jedoch hier von einer solchen Darstellungsweise absehen, da dieselbe für praktische Zwecke zu umständlich ist.

Im folgenden wollen wir deshalb an zwei verschiedenen Stromwandlern ohne Rücksicht auf die Größe der sekundären Phasenverschiebung den Einfluß der Sekundärbelastung untersuchen, indem wir unseren Betrachtungen nur rein ohmsche Belastung im Sekundärstromkreis zugrunde legen.

Der eine dieser untersuchten Stromwandler hatte einen Kernquerschnitt von $q_{ei} = 7{,}35$ cm², eine mittlere Kraftlinienlänge von $l_{ei} = 35{,}6$ cm, eine Amperewindungszahl von $AW_t = 400$ und war bestimmt für die Ströme $J_1 = 50$ und $J_2 = 5$ Amp. Der Widerstand der Sekundärwicklung ergab sich durch Messung zu $r_2 = 0{,}0691$ Ohm, und durch Rechnung wurde ferner die Reaktanz derselben bestimmt zu $x_2 = 0{,}02485$ Ohm. Der Stromwandler wurde nun auf der Sekundärseite mit den Widerständen belastet $r_{2A} = 0{,}0535$ Ohm (nur Strommesser), $r_{2A} = 0{,}344$ Ohm und $r_{2A} = 1{,}352$ Ohm. Diese Belastung entspricht dann den Klemmenspannungen $P_{2A} = 0{,}268$ Volt, $P_{2A} = 1{,}72$ Volt und $P_{2A} = 6{,}77$ Volt bei einem maximalen Sekundärstrom von $J_2 = 5$ Amp. Gemessen wurde nun bei diesem Stromwandler mittelst zweier Präzisionshitzdraht-Strommesser bei diesen Belastungen der Primär- und Sekundärstrom, und daraus wurde dann der absolute Übersetzungsfaktor berechnet. Die Winkelabweichung wurde nicht ermittelt, da kein geeigneter Leistungsmesser für die Primärseite zur Verfügung stand. Die so erhaltenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XVIII.

J_2	$r_{2A} = 0{,}035$		$r_{2A} = 0{,}344$		$r_{2A} = 1{,}352$	
	J_1	p_i	J_1	p_i	J_1	p_i
0,5	5,98	1,195	6,1	1,218	6,9	1,38
1,0	11,34	1,134	11,5	1,15	12,5	1,25
1,5	16,5	1,10	16,8	1,12	17,8	1,186
2,0	21,65	1,083	21,98	1,099	23,25	1,162
2,5	26,89	1,075	27,25	1,09	28,55	1,142
3,0	32,21	1,073	32,55	1,084	34,0	1,133
4,0	42,8	1,069	43,25	1,080	45,15	1,126
5,0	53,3	1,065	53,8	1,076	56,05	1,120

Tragen wir nun diese Werte für den Übersetzungsfaktor bei den obigen Sekundärbelastungen als Funktion des Sekundärstromes auf, so erhalten wir die in Abb. 22 aufgezeichneten Kurven. Wie diese Kurven zeigen, findet durch eine Vergrößerung der Sekundärlast nur eine fast parallele Verschiebung derselben statt, nicht aber ändert sich dabei der Verlauf derselben, solange wir nur eine rein ohmsche Belastung haben. Würden wir dabei auch induktive Belastungen in Betracht ziehen, so würden sich diese Kurven bei den verschiedenen Belastungen nicht mehr parallel verschieben, da sich dann auch in ganz erheblichem Maße die totale sekundäre Phasenverschiebung φ_{2t} bemerkbar machen würde.

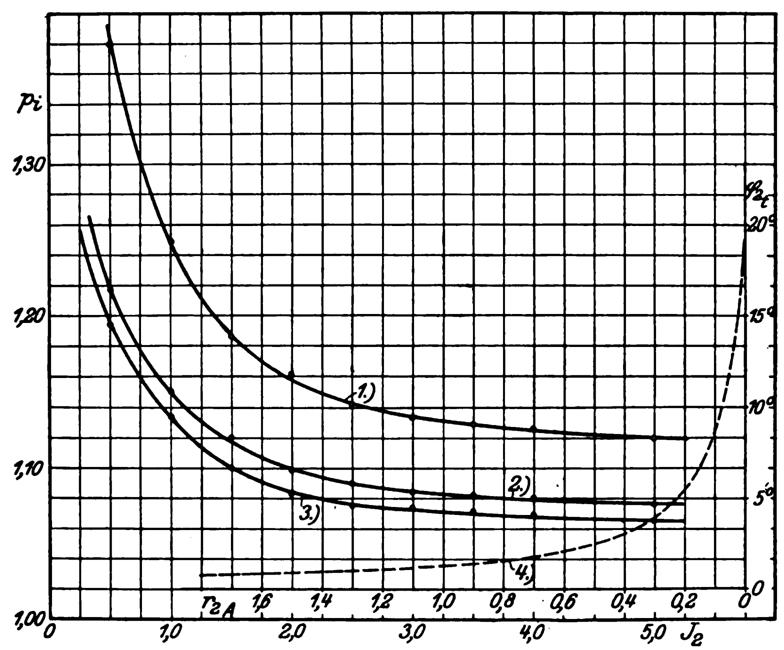


Abb. 22. Absoluter Übersetzungsfaktor p_i als Funktion des Sekundärstromes.
$AW_t = 400$; $J_1/J_2 = 50/5$ Amp.
Kurve 1: $r_{2A} = 1{,}352\ \Omega$ Kurve 3: $r_{2A} = 0{,}0535\ \Omega$
Kurve 2: $r_{2A} = 0{,}344\ \Omega$ Kurve 4: φ_{2t} als Funktion von r_{2A}.

Auffallend ist bei diesen Kurven, daß sich dieselben mit zunehmender Belastung nicht gleichmäßig verschieben, und zwar bei größeren Belastungen prozentual stärker als bei kleinen. Das hängt offenbar auch mit dem Phasenwinkel φ_{2t} zusammen, da bei kleinen Belastungen sich φ_{2t} sehr stark verändert und mit zunehmender Belastung



zuerst schnell und dann sehr langsam abnimmt. Dadurch wird die Wirkung des vergrößerten Widerstandes bei kleinen Belastungen erheblich abgeschwächt

In Abb. 22 ist auch die Abnahme dieses Winkels φ_{2t} als Funktion des Widerstandes im äußeren Sekundärkreis aufgetragen und vervollständigt damit die Abhängigkeit von der Belastung und vom Phasenwinkel φ_{2t}.

Für vollständig kurzgeschlossenen Sekundärkreis ergibt sich nach früherem

$$\operatorname{tg} \varphi_{2t} = \frac{x_2}{r_2} = \frac{0{,}02485}{0{,}0691} = 0{,}36 \quad \text{oder} \quad \varphi_{2t} = 19^0\,48'.$$

Der Winkel φ_{2t} ändert sich daher bei den Widerständen $r_{2A} = 0$ bis $1{,}352$ Ohm zwischen den Grenzwerten $\varphi_{2t} = 19^0\,48'$ bis 1^0.

Der zweite untersuchte Stromwandler hatte einen Kernquerschnitt von $q_{ei} = 16{,}7\ \text{cm}^2$ und eine mittlere Kraftlinienlänge von $l_{ei} = 57{,}2$ cm. Die Ströme waren wiederum $J_1 = 50$ und $J_2 = 5$ Ampere und die totale Amperewindungszahl 1200. Dieser Stromwandler war ein sehr veraltetes Modell, bei welchem die Eisenbleche zusammengenietet waren, so daß dadurch außerordentlich hohe Wirbelstromverluste entstehen müssen. Der Widerstand der Sekundärwicklung wurde wiederum zu $r_2 = 0{,}1904$ Ohm durch Messung bestimmt und ebenso die Reaktanz zu $x_2 = 0{,}117$ Ohm berechnet. Die Belastungswiderstände im äußeren Sekundärkreis waren schließlich $r_{2A} = 0{,}0535$ Ohm (nur Amperemeter), $r_{2A} = 1{,}4055$ Ohm und $r_{2A} = 2{,}1515$ Ohm, die bei $J_2 = 5$ Ampere den Sekundärspannungen $P_{2A} = 0{,}268$ Volt, $P_{2A} = 7{,}03$ Volt und $P_{2A} = 10{,}75$ Volt entsprechen.

An diesem Stromwandler wurde auch nur Primär- und Sekundärstrom als Funktion des Primärstromes gemessen und daraus der absolute Übersetzungsfaktor berechnet. Die so erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XIX.

J_1	$r_{2A} = 0{,}0535$		$r_{2A} = 1{,}4055$		$r_{2A} = 2{,}1515$	
	J_2	p_i	J_2	p_i	J_2	p_i
5	0,48	1,0405	0,472	1,06	0,4585	1,09
10	0,975	1,026	0,9575	1,043	0,943	1,06
15	1,475	1,0175	1,45	1,034	1,435	1,045
20	1,97	1,014	1,95	1,025	1,935	1,033
25	2,47	1,012	2,445	1,022	2,43	1,029
30	2,96	1,013	2,94	1,02	2,92	1,027
35	3,46	1,0115	3,43	1,021	3,41	1,027
40	3,95	1,0125	3,92	1,020	3,89	1,028
45	4,45	1,012	4,4	1,022	4,37	1,0295
50	4,94	1,013	4,88	1,023	4,85	1,031

Diese Werte tragen wir wieder als Funktion des Sekundärstromes auf und erhalten die in Abb. 23 aufgezeichneten Kurven.

Diese Kurven zeigen einige beachtenswerte Unterschiede gegenüber denjenigen der Abb. 22, indem dieselben mit zunehmendem Sekundärstrom von etwa 4 Ampere an aufwärts wieder aufwärts verlaufen, d. h. daß der Übersetzungsfaktor bei jeder Belastung einen Minimalwert besitzt. Diese Erscheinung kommt sonst bei Stromwandlern mit so großer Amperewindungszahl nicht mehr vor, dagegen fast immer bei sehr kleinen Amperewindungszahlen und großen Sekundärbelastungen, so daß offenbar hier nur die durch das Zusammennieten der Bleche bewirkten größeren Wirbelstromverluste diesen Verlauf der p_i-Kurven bewirken.

Beachtenswert ist ferner noch bei diesen Kurven, daß infolge der größeren Windungszahl die Sekundärreaktanz größer geworden ist und damit auch der totale sekun-

däre Phasenverschiebungswinkel erheblich höhere Werte annimmt. Dadurch verschieben sich die Kurven der einzelnen Belastungen gleichmäßiger, da bei diesen Belastungen φ_{2t} sich noch sehr stark ändert, wie die punktierte Kurve zeigt.

Wie daher diese Untersuchungen zeigen, verschieben sich die Kurven für den Übersetzungsfaktor bei rein ohmscher Belastung fast parallel. Bei ohmscher und induktiver Belastung dagegen findet keine parallele Verschiebung mehr statt. Ganz verschieden dagegen wird sich die Winkelabweichung verhalten, da bei reiner ohmscher Sekundärbelastung dieselbe sehr stark durch den Phasenwinkel φ_{2t} beeinflußt wird. Harned[1]) hat dies in seiner Arbeit an drei ganz verschiedenen Stromwandlern experimentell nachgewiesen. Die Fehlerkurven werden sich daher nicht bei verschiedenen Belastungen parallel verschieben, sondern nehmen einen ganz verschiedenen Verlauf an.

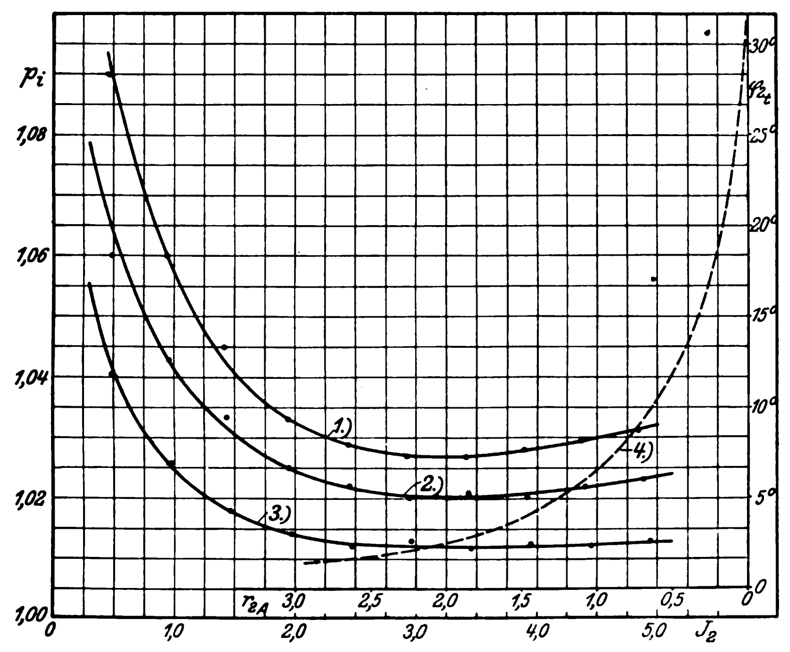


Abb. 23. Absoluter Übersetzungsfaktor p_i als Funktion des Sekundärstromes bei verschiedenen Sekundärbelastungen.

$AW_t = 1200$; $J_1/J_2 = 50/5$ Amp.

Kurve 1: $r_{2A} = 2{,}1515\ \Omega$ Kurve 3: $r_{2A} = 0{,}0535\ \Omega$
Kurve 2: $r_{2A} = 1{,}4055\ \Omega$ Kurve 4: φ_{2t} als Funktion von r_{2A}.

d) Einfluß der Kurvenform, der Remanenz und der Hochspannungs- und Sättigungserscheinungen. Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten alle wichtigen Einflüsse kennen gelernt, durch welche Fehler und Fehlererscheinungen beim Stromwandler hervorgerufen werden, und gelangen nun noch am Schlusse dieser Arbeit zu denjenigen Erscheinungen, die durch die Kurvenform des Wechselstromes und der Wechselspannung sowie durch die Remanenz des Eisens und durch Ladeerscheinungen bedingt sind.

Hierbei soll jedoch dieses Kapitel nicht wie die vorhergehenden eingehend behandelt werden, sondern es sollen vielmehr nur der Vollständigkeit halber diese überaus wichtigen und aktuellen Erscheinungen kurz besprochen werden, da dieselben später den Gegenstand einer neuen Arbeit bilden werden.

[1]) Mark L. Harned, Operating Characteristics of Current Transformers. Electrical World 1916, Bd. 67, S. 869.



Von allen diesen Erscheinungen, die in diese Kategorie gehören, finden wir in der einschlägigen Literatur nur diejenige der Kurvenform kurz besprochen, dagegen haben die Remanenz-, Sättigungs- und Ladeerscheinungen bisher beim Stromwandler noch keine nennenswerte Beachtung gefunden, trotzdem alle diese Einflüsse nicht nur im Stromwandlerbau, sondern auch im Betriebe ganz ohne Zweifel eine enorm wichtige Rolle spielen, da die hierdurch verursachten Fehler unter Umständen ein Vielfaches der bereits besprochenen ausmachen können.

Auf diese Einflüsse ist man erst in neuester Zeit aufmerksam geworden, da die immer mehr gesteigerten Betriebsspannungen Nebenerscheinungen verursachten, welche ihrerseits wieder Abwehrmaßnahmen erforderten, die Konstruktionsfehler im Stromwandler oder sonst scheinbar belanglose Einflüsse in doppelter Stärke hervortreten ließen. Dies gilt namentlich für die Ladeerscheinungen in den Wicklungen und den übrigen Metallteilen eines Stromwandlers. Aber auch die Kurvenform der Ströme hängt mit solchen Erscheinungen zusammen und kann durch dieselben verzerrt werden, so daß gewaltige Fehler entstehen, die bei der Nachprüfung auf dem normalen Prüfstande nicht vorhanden sind. Ebenso verursachen Remanenzerscheinungen im Eisen, gleichgültig ob dieselben von vornherein dem verwendeten Eisen anhaften oder durch Gleichstromfelder beliebiger Herkunft erzeugt werden, Abweichungen, die nicht mehr innerhalb der Fehlergrenze liegen. Namentlich unkonstante Remanenzerscheinungen, wie solche durch Überspannungswellen erzeugt werden, verursachen außerordentlich große Fehler, die sich zudem sehr stark ändern.

Wir müßten daher alle diese Fehlererscheinungen zusammen behandeln, da sie mehr oder weniger stark miteinander verkettet sind und sich gegenseitig unterstützen oder abschwächen. Wir wollen jedoch wie in den früheren Abschnitten auch hier die einzelnen Fehlererscheinungen für sich behandeln und eine Einteilung derselben vornehmen, die dann als Grundlage für die bereits erwähnte spätere Arbeit dient, da sich auf diese Weise die zum Teil recht verwickelten Verhältnisse besser klären lassen. Wir können dabei ungefähr folgende Einteilung vornehmen:

1. Einfluß der Kurvenform, der Remanenz und der Sättigung.
   a) Einfluß der Spannungskurve,
   b) Einfluß der Stromkurve,
   c) Einfluß der Remanenz auf die Kurvenform,
   d) Einfluß der Remanenz auf die Verluste und auf die Fehler,
   e) Einfluß der Sättigung auf die Kurvenform.
2. Einfluß der Überspannungs- und Ladeerscheinungen.
   a) Einfluß der Überspannungen auf die Kurvenform und die Remanenz,
   b) Einfluß der Überspannungsschutzmittel auf die Kurvenform, die Phasenverschiebungen und die Remanenz,
   c) Einfluß der Ladeerscheinungen auf die Stromverteilung in den Wicklungen,
   d) Einfluß der Ladeerscheinungen auf den Sekundärkreis, Resonanzerscheinungen.
   e) Einfluß der Wicklungskapazität und der Ableitung.

Die erstere Gruppe von Einflüssen spielt bei allen Arten von Stromwandlern eine überaus wichtige Rolle, da schon bei der Konstruktion zum Teil auf dieselben Rücksicht genommen werden muß. Die zweite Gruppe dagegen kommt nur bei Stromwandlern für Hochspannungsanlagen in Betracht und muß dort unbedingt berücksichtigt werden, da Versuche ergeben haben, daß ein auf dem normalen Prüfstande bei Niederspannung einwandfrei arbeitender Stromwandler bei Hochspannung außerordentlich große Fehler ergeben kann. Auffallend ist bei diesen Erscheinungen, daß die hierdurch verursachten Fehler in der Nähe von etwa 10000 Volt ein erstes Maximum



aufweisen, dann bis etwa 20000 Volt wieder etwas abnehmen, um von da an ständig zuzunehmen. Gerade diese Erscheinung mahnt uns zur Vorsicht in der Anwendung der Stromwandler bei sehr hohen Spannungen, da bei Spannungen von etwa 40000 Volt an aufwärts ein einwandfreies Arbeiten derselben nicht mehr möglich ist. Der Grund dieser Erscheinungen liegt eben in den Ladeerscheinungen, die um so größer werden, je höher die Netzspannung ist. Auf diese Erscheinungen weist auch bereits Kuhlmann[1]) in seiner Arbeit über die Grundzüge des Überspannungsschutzes in Theorie und Praxis hin, indem er in den aufgestellten Thesen sagt: „(35) Von der Verwendung von Meßtransformatoren sollte bei Spannungen über 20000 Volt abgesehen werden, die Messung der Spannung nur auf der Unterspannungsseite erfolgen, da man Transformatoren kleiner Leistung kaum gut genug isolieren kann und die größere Meßgenauigkeit meist nur in der Vorstellung besteht."

Dies gilt aber nicht nur etwa für Spannungswandler, sondern findet auch auf Stromwandler Anwendung, da dieselben auch durch die Spannung beeinflußt werden. Wir wollen uns aber hier nicht näher auf diese Erscheinungen einlassen und nur noch zum Schlusse kurz den Einfluß der Strom- und Spannungskurven auf die Fehler besprechen.

Wir haben bereits in Gl. 13) bis 20) kennen gelernt, daß die Form der Spannungskurve einen erheblichen Einfluß auf die Suszeptanz und die Konduktanz des Erregerstromkreises ausübt. Gl. 18) zeigt uns, daß die Konduktanz g_a umgekehrt proportional dem Quadrate des Formfaktors ist und ebenso zeigt uns Gl. 13), daß die Suszeptanz b_a umgekehrt proportional dem Formfaktor ist, wenn wir darin an Stelle von 4,44 den Faktor $4 f_f$ setzen. Damit wird für einen stoßfugenlosen Eisenkern der Ausdruck für den Winkel α zwischen der EMK E_1 und dem Magnetisierungsstrom

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_a}{g_a} = \frac{a w_{ei}}{w_{ei}} \cdot \frac{2\sqrt{2}\, f}{\gamma_{ei}} \cdot f_f \cdot B_{max} \cdot 10^{-6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 30)$$

Sehen wir vorerst darin vom Einfluß des Formfaktors auf $a w_{ei}$ und w_{ei} ab, so nimmt daher dieser Winkel bei konstanter Induktion proportional mit dem Formfaktor zu, d. h. eine spitze Spannungskurve vergrößert ohne Rücksicht auf $a w_{ei}$ und w_{ei} den Winkel α und verkleinert dagegen die Konduktanz g_a. Ziehen wir nun ferner in Betracht, daß die Konduktanz sich umgekehrt proportional mit dem Quadrate des Formfaktors verändert, so folgt daraus, daß eine flache Spannungskurve ungleich größere Abweichungen verursachen muß als eine spitze derselben Größenordnung. Dieses Ergebnis bestätigt sich auch tatsächlich durch Versuche, trotzdem wir in den obigen Beziehungen den Einfluß von $a w_{ei}$ und w_{ei} nicht berücksichtigt haben. Berücksichtigen wir nun schließlich auch noch die Abhängigkeit von $a w_{ei}$ und w_{ei} vom Formfaktor, so ergibt sich, daß bei den bei Stromwandlern üblichen Periodenzahlen und bei nicht allzu starken Kurvenverzerrungen sich $a w_{ei}$ nur äußerst wenig ändert, dagegen ändert sich w_{ei}, wie Gl. 20) zeigt, sehr stark.

Bei konstanter Induktion setzen sich bekanntlich die Verluste im Eisen zusammen aus den Wirbelstromverlusten und aus den Hystereseverlusten, wobei die Hystereseverluste unabhängig vom Formfaktor, dagegen die Wirbelstromverluste mit dem Quadrate des Formfaktors zu- oder abnehmen.

Streng genommen dürften wir eigentlich nicht von einer konstanten Induktion ausgehen, sondern wir müßten richtigerweise unseren Betrachtungen eine konstante effektive Spannung bei veränderlicher Kurvenform zugrunde legen, da sich die Eiseninduktion nach der Kurvenform der Spannungskurve richtet. Dabei ergibt sich dann gerade das Umgekehrte, indem dann die Hystereseverluste vom Formfaktor abhängen,

[1]) K. Kuhlmann, Grundzüge des Überspannungsschutzes in Theorie und Praxis. Bull. des S. E. V. 1914, S. 142.



dagegen die Wirbelstromverluste unabhängig davon sind, wie dies z. B. auch in der Gl. 20) für die Konduktanz zum Ausdruck kommt. Bei spitzer Spannungskurve ist dann die Kurve des Kraftflusses flach, die maximale Induktion also kleiner, und umgekehrt bei flacher Spannungskurve ist die Kraftflußkurve spitz, daher die maximale Induktion größer als bei Sinusform.

Infolge dieser Beeinflussung des Winkels α und der Konduktanz g_a durch die Kurvenform der Spannungskurve wird aber nicht nur bei stark verzerrten Spannungskurven der Übersetzungsfaktor p_i, sondern auch die Winkelabweichung ψ_i erheblich beeinflußt, so daß dadurch Fehler entstehen, die nicht mehr innerhalb der Fehlergrenze fallen. Diese Erscheinung des ungünstigen Einflusses der Spannungskurve zeigt sich beispielsweise bei Stromwandlern, die im Stromkreise elektrischer Lichtbogenöfen liegen, in außerordentlich starkem Maße, da dort sehr spitze Spannungskurven auftreten, auch wenn der Strom fast sinusförmig ist. Die Größenordnung der hierdurch in solchen Stromkreisen verursachten Fehler kann bis 5 % und mehr betragen, wie experimentelle Untersuchungen[1]) gezeigt haben. Natürlich spielt beim Einfluß der Kurvenform der Spannungskurve auch die Größe der Sättigung und etwa vorhandene Remanenz eine wichtige Rolle. Es zeigt sich nämlich, daß bei sehr kleiner und sehr großer Sättigung der Einfluß der Spannungskurve ganz bedeutend stärker ist als bei mittleren. Da aber nun Stromwandler im allgemeinen bei mittleren und kleinen Eiseninduktionen arbeiten, so muß sich bei veränderlichen Strömen der Einfluß des Formfaktors in ganz verschiedenem Maße geltend machen, so daß bei gleichbleibender Spannungskurve und gleichbleibender Stromkurve des Primärstromes nicht über einen ganzen Meßbereich die Kurvenform des Sekundärstromes dieselbe bleibt. Diese Erscheinung kommt daher, daß bei sinusförmiger Spannungs- und Kraftflußkurve der Magnetisierungsstrom infolge der Hysteresearbeit nicht sinusförmig ist, sondern um so mehr von der Sinusform abweicht, je größer die Eiseninduktion wird. Außerdem nimmt bei abnehmendem Primärstrom der Magnetisierungsstrom nicht in demselben Maße ab, wie der Sekundärstrom, so daß sich die verzerrte Kurvenform des Magnetisierungsstromes immer mehr geltend macht. Ist nun zudem noch die Spannungskurve verzerrt, so muß um so mehr der Magnetisierungsstrom verzerrt sein, oder aber es kann auch der Fall eintreten, daß dadurch sich die Kurvenform desselben mehr der Sinusform nähert, wodurch auch Fehler entstehen, da derselbe normalerweise entsprechend der Hysteresearbeit verzerrt ist. Hier greifen also bereits die Einflüsse der Spannungs- und der Stromkurven ineinander über, so daß wir streng beide Einflüsse nicht mehr voneinander trennen können. Solange deshalb der Primärstrom annähernd sinusförmig ist, wird bei den üblichen Eisenbeanspruchungen und bei nicht allzu starken Verzerrungen der Spannungskurve der Einfluß der letzteren nicht übermäßig groß sein. Sobald aber auch noch der Primärstrom verzerrt ist, so erreichen die auftretenden Fehler außerordentlich große Werte, da dadurch der Sekundärstrom sehr stark verzerrt wird. Gerade diese Erscheinungen sind bisher noch viel zu wenig gewürdigt worden, da man in der Regel annimmt, daß die auftretenden Fehler innerhalb der Fehlergrenze fallen, was jedoch meistens nicht zutrifft. Wie Messungen im Betriebe ergeben haben, verursachen in verhältnismäßig harmlosen und ruhigen Betrieben verzerrte Strom- und Spannungskurven sehr große Abweichungen, und nicht selten verursachen stark ausgeprägte Oberwellen im Sekundärkreis Resonanzerscheinungen, die gelegentlich zu Durchschlägen und Störungen führen.

Rechnerisch lassen sich alle diese Erscheinungen nur sehr schwer und nur an Hand von experimentellen Untersuchungen durchführen, da hierzu die Kurvenformen

[1]) Siehe auch J. Zenneck, Hochspannungsstörungen in Meßinstrumenten. Phys. Zeitschr. Bd. 12, S. 208, 1911, und J. Zenneck, Energiemessung an Hochspannungslichtbögen. Phys. Zeitschr. Bd. 12, S. 343, 1911.



der Spannung, des Primärstromes und des Magnetisierungstromes oder des Sekundärstromes erforderlich sind.

Zur rechnerischen Untersuchung dieser Verhältnisse leisten uns auch die allgemeinen Stromwandlergleichungen wertvolle Dienste, indem wir daraus das Verhältnis vom Magnetisierungsstrom zum Sekundärstrom, sowie die Phasenverschiebung zwischen beiden ermitteln können.

Nach dem allgemeinen Stromwandlerdiagramm Abb. 2 ist das Verhältnis zwischen dem Magnetisierungsstrom und dem reduzierten Sekundärstrom

$$p_{1a} = \frac{J_a}{J_2'} = \sqrt{[(r_2' + r_A') g_a + (x_2' + x_A') b_a]^2 + [(x_2' + x_A') g_a - (r_2' + r_A') b_a]^2} \quad . \, 31)$$

Führen wir hierin wieder wie früher die totale sekundäre Phasenverschiebung ψ_{1a} zwischen beiden Strömen ein, so wird schließlich

$$p_{1a} = \frac{(r_2' + r_A') g_a [1 + \operatorname{tg} \varphi_{2t} \cdot \operatorname{tg} \alpha]}{\cos \psi_{1a}} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, 32)$$

Nach dem Diagramm Abb. 2 ist dann ferner die Größe des Winkels ψ_{1a} bestimmt durch

$$\psi_{1a} = \varphi_{2t} - \alpha \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, 33)$$

Hieraus können nun ohne weiteres für gegebene Verhältnisse die zugehörigen Phasenverschiebungen und Magnetisierungsströme ermittelt werden. Wie diese Gleichungen zeigen, werden offenbar die Verhältnisse beim Stromwandler am ungünstigsten, wenn φ_{2t} gleich Null oder negativ wird, da dann der Sekundärstrom gegenüber dem Magnetisierungsstrom ungewöhnlich kleine Werte annimmt. In diesem Falle muß deshalb eine verzerrte Spannungs- oder Stromkurve außerordentlich ungünstig auf die Kurvenform des Sekundärstromes einwirken. Aber nicht nur die Kurvenform macht sich in diesem Falle ungünstig bemerkbar, sondern auch Ladeerscheinungen treten dann am kräftigsten hervor.

Sind nun im Eisen noch Remanenzerscheinungen vorhanden oder wird remanenter Magnetismus durch Gleichströme oder überlagerte Gleichstromfelder erzeugt, wie solche z. B. durch Überspannungen hervorgerufen werden, so wird dadurch in erster Linie die Kurvenform des Sekundärstromes in Mitleidenschaft gezogen, da dann die Stromkurven unsymmetrisch zur Achse werden. Der remanente Magnetismus bleibt meistens auch nicht konstant, sondern verändert sich stark im Laufe der Zeit, so daß dadurch ganz variable Fehler entstehen. In einer Zentrale wurde z. B. festgestellt, daß die Fehler unter denselben Verhältnissen und Belastungen im Netz an verschiedenen Tagen zwischen $+10\%$ bis -6% variierte und die Untersuchungen ergaben, daß dies nur auf die veränderliche Remanenz zurückzuführen war.

Wir sehen daher aus diesen Besprechungen dieses Kapitels, daß diese Einflüsse noch umfassende theoretische und experimentelle Untersuchungen erfordern, die den Rahmen dieser Arbeit weit übersteigen würden und deshalb einer späteren Arbeit vorbehalten werden sollen.



Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 3. Heft. 1917.

Wirkungsgrad und Leistungsfähigkeit von Fernsprechleitungen.

Von

L. Schultheiß, München.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.

Als Maßstab für die Beurteilung der Leistungs- oder Sprechfähigkeit einer Fernsprechleitung dient im allgemeinen ihre spez. Dämpfung β bei der Kreisfrequenz $\omega = 5000$. Außerdem wird schätzungsweise noch die Verzerrung in Betracht gezogen.

Demnach werden 2 Leitungen als gleichwertig angesehen, wenn sie denselben Dämpfungsexponenten βl besitzen.

Bei erheblichem βl ergibt diese Betrachtungsweise auch bei verschiedener Charakteristik der Leitungen ein annähernd richtiges Bild — wie die Praxis bestätigt hat —, weil dann die Leistungsfähigkeit vorwiegend durch den Wert des Dämpfungsexponenten bedingt wird.

Der Einfluß der sonst noch zu der Sprechverbindung gehörigen Teile: Leitungen, Apparate, Übertrager usw. tritt zurück. Je kleiner βl ist, um so mehr gewinnt dieser jedoch an Bedeutung. Das zeigt sich in besonderem Maß bei der Untersuchung kurzer Kabelstücke, wenn sie Teile einer größeren Fernverbindung bilden. Auf Grund der in der Praxis gewonnenen Erkenntnis, daß in diesem Fall der Dämpfungsexponent des Kabelstückes für sich keinen ausreichenden Aufschluß über seine Leistungsfähigkeit zu geben vermag, wurde der Begriff Dämpfungsexponent auch auf Leitungen ausgedehnt, welche aus Teilen verschiedener Charakteristik bestehen[1]).

Aber selbst unter der Voraussetzung, daß dieser erweiterte Begriff in seiner Bedeutung für die zu erwartende Lautstärke dem Dämpfungsexponenten entspricht, genügt seine Kenntnis doch nicht. Er nimmt nicht Rücksicht auf den Umstand, daß sich

[1]) Z. B. Breisig, Theor. Telegraphie, S. 297.

die Größe der Leistung am Anfang mit wechselnder Charakteristik der Leitungen ändert[1]).

In der vorliegenden Arbeit wird aus dem Wirkungsgrad der Leitung eine Vergleichsgröße abgeleitet, welche die Verschiedenheit der Leistung am Anfang berücksichtigt und die Beurteilung der Leistungsfähigkeit bei jeder beliebigen Zusammensetzung der Verbindung gestattet. Diese Vergleichsgröße enthält somit auch den Einfluß der Reflexionen am Leitungsende und an der Verbindungsstelle zweier Leitungen mit verschiedener Charakteristik.

Die Grundlage bildet folgende Überlegung:

Die Güte der Sprechverständigung wird bedingt durch die Lautstärke und die Verzerrung. Für die Lautstärke ist maßgebend die im Hörer zur Wirkung kommende Leistung[2]). Der Wirkungsgrad des Hörers bleibt dabei außer Betracht. Er ändert sich bei den verschiedenen Hörern mit deren Windungszahl, der Drahtstärke, der Stärke der Magnetisierung, der verwendeten Eisensorte und dem sonstigen konstruktiven Aufbau[3]). Sein Wert kommt nicht in Frage, wenn die in Verwendung befindlichen Apparate den gleichen Hörer besitzen, wie dies bei den Wandapparaten der Kgl. Bayer. Post- und Telegraphenverwaltung der Fall ist. Die Hörer der O-B- und Z-B-Tischapparate sind etwas verschieden (Scheinwiderstand der O-B-Hörers $446 e^{i + 40^\circ 50'}$; des Z-B-Hörers $410 e^{i + 44^\circ 30'}$).

Steht der Hörer mit der Leitung, deren Leistungsfähigkeit bestimmt werden soll, nicht in unmittelbarer Verbindung, so bildet die Leistung am Leitungsende die für die Beurteilung maßgebende Größe. In der Praxis liegt ausschließlich dieser Fall vor. Die Leistung am Leitungsende ist dann von der dem Hörer zugeführten verschieden; auf die Größe dieses Unterschiedes hat aber die Leitung keinen Einfluß, er braucht demnach auch in dem Maß für ihre Leistungsfähigkeit nicht zum Ausdruck zu kommen.

Die Leistung am Ende wird bestimmt durch den Wert am Leitungsanfang und den Wirkungsgrad der Leitung. Unter Umständen kann die Berücksichtigung der Leistung am Anfang unterbleiben, so daß der Wirkungsgrad allein für die Leistungsfähigkeit maßgebend bleibt.

Die Leistung am Anfang ist bedingt durch die vom Mikrophon erzeugte Leistung und den Wirkungsgrad der zwischen Mikrophon und Leitung befindlichen Teile der Fernsprechverbindung (Teile des Gebeapparates, Übertrager, weitere Leitungen).

Die Berücksichtigung der Verzerrung kann nur schätzungsweise erfolgen. Als Maß ist nach dem Vorschlag von Jordan[4]) unmittelbar der Unterschied zwischen βl_{7000} und βl_{3000} gewählt. Dieser Frequenzbereich kommt für die Verständlichkeit der Sprache hauptsächlich in Frage[5]).

Als Grund hierfür war die Überlegung maßgebend, daß der Einfluß der Verzerrung mit zunehmender Leitungslänge wachsen muß, weil der Unterschied in der Lautstärke der Töne höherer und tieferer Frequenz immer größer wird. Auf der Zusammenstellung Nr. 1 ist die Verzerrung der untersuchten Leitungen angegeben. Außerdem enthält sie die Länge, bei welcher der Unterschied zwischen βl_{7000} und βl_{3000} gleich 0,1 ist. Diesen Unterschied vermag das Ohr gerade noch wahrzunehmen. Die angegebene Länge bildet also die unterste Grenze, bei welcher sich die Verzerrung praktisch fühlbar machen kann.

---

[1]) Besprechung der Arbeit von Hill, ETZ 1914, S. 741.

[2]) Breisig, ETZ 1911, S. 558.

[3]) K. W. Wagner, ETZ 1911, S. 80; Hoffmann, Archiv f. Elektrot. **1**, S. 433, 1913; Gans, Archiv f. Elektrot. **2**, S. 125, 1913; Kunze, Archiv f. Elektrot. **2**, S. 495, 1914.

[4]) Jordan, ETZ 1916, S. 31.

[5]) K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. 1910, S. 1122.



Zusammenstellung Nr. 1.

Verzerrung der untersuchten Fernsprechleitungen.

Leitung	ϕ mm	Verzerrung $\Delta = \beta_{7000} - \beta_{3000}$	Der Unterschied in der Lautstärke beträgt $\Delta\beta l = 0{,}1$ bei einer Länge von
Gewöhnliche Freileitung	3	0,00023	435 km
Pupinisierte Freileitung	3	0,00026	385 „
Gewöhnliches Kabel	2	0,00890	11,2 „
Pupinisiertes Kabel	2	0,00106	94,3 „
Krarupkabel	2	0,00140	72 „
Gewöhnliches Kabel	0,8	0,02560	3,9 „

Die Untersuchungen sind durchgeführt unter Anwendung der symbolischen Rechnungsweise und des Vektordiagramms. Die Grundlagen hierzu wurden von Franke[1]), Breisig[2]) und Rößler[3]) gegeben. Besonders die Ergebnisse der Untersuchungen Rößlers sind in einer den Zwecken der Fernsprechtechnik angepaßten Form mehrfach verwertet.

2. Der Wirkungsgrad.

a) Ermittlung des Wirkungsgrades.

Für eine unbelastete Wechselstromleitung gelten nachstehende Gleichungen[4]):

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{A}(\mathfrak{V}_e + \mathfrak{J}_e \mathfrak{U}_t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{A}\left(\mathfrak{J}_e + \frac{\mathfrak{V}_e}{\mathfrak{U}_l}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Hierbei bedeuten:

$\mathfrak{J}_a$, $\mathfrak{V}_a$ die Effektivwerte von Strom und Spannung am Anfang der Leitung (Geberende),

$\mathfrak{J}_e$, $\mathfrak{V}_e$ die entsprechenden Werte am Ende der Leitung (Empfangsende),

$\mathfrak{U}_t$, $\mathfrak{U}_l$ den Kurzschluß- und den Leerlaufwiderstand,

$\mathfrak{A}$ den Dämpfungsfaktor der Leitung, er ist bestimmt durch die Beziehung:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = \mathfrak{Cof}\,\gamma l.$$

γl ist die Fortpflanzungskonstante. Sie setzt sich zusammen aus dem Dämpfungsexponenten βl und dem Winkelmaß αl nach der Beziehung $\gamma l = \beta l + i\alpha l$ und wird berechnet aus der Formel

$$\gamma l = \sqrt{(\mathfrak{R} + i\omega L)(A + i\omega C)}\,[5]).$$

$\mathfrak{R}$ ist der wirksame Widerstand,
L die Induktivität,
C die Kapazität,
A die Ableitung und
ω die Kreisfrequenz.

Wird diese Leitung am Ende mit einem Widerstand

$$\mathfrak{R}_e = R_e e^{i\varphi_e}\,[6])$$

[1]) ETZ 1891, S. 447.
[2]) ETZ 1900, S. 87.
[3]) Rößler, Fernleitung von Wechselströmen. Springer, 1905.
[4]) Baur, Das elektrische Kabel, 1910, S. 121.
[5]) Z. B. Breisig, Theor. Telegraphie, S. 281.
[6]) Vektoren sind durch deutsche, ihre Beträge durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet.

belastet, so gehen die Gleichungen 1) und 2) über in

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{A}\,\mathfrak{J}_e(\mathfrak{R}_e + \mathfrak{U}_t) \quad \ldots \quad 3)$$

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{A}\,\mathfrak{J}_e\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{U}_l}\right) \quad \ldots \quad 4)$$

In dieser Form eignen sich die Gleichungen besonders gut zur Untersuchung der Vorgänge auf Wechselstromleitungen mit Hilfe des Vektordiagramms. Nur ist die Bestimmung der Werte $\mathfrak{U}_t$, $\mathfrak{U}_l$ und $\mathfrak{A}$ in der Weise, wie sie zuerst von Rößler durchgeführt wurde, etwas umständlich[1]).

Für die Zwecke der Starkstromtechnik wurden deshalb zur Vereinfachung der Rechnung verschiedene Näherungsmethoden entwickelt[2]).

Bei Fernsprechleitungen vielbenutzte Größen sind die Charakteristik und die Dämpfung. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Werte von $\mathfrak{U}_t$, $\mathfrak{U}_l$ und $\mathfrak{A}$ sehr einfach wie folgt bestimmen:

Die Charakteristik der Leitung sei $\mathfrak{Z}$; sie wird berechnet aus der Gleichung:

$$\mathfrak{Z} = Z e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R} + i\omega L}{A + i\omega C}} = \sqrt{\mathfrak{U}_t \cdot \mathfrak{U}_l}\,^{3)} \quad \ldots \quad 5)$$

dabei ist

$$\mathfrak{U}_l \cdot e^{i\varphi_l} = \mathfrak{Z}\,\frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = \mathfrak{Z}\,\mathfrak{Ctg}\,\gamma l \quad \ldots \quad 6)$$

$$\mathfrak{U}_t \cdot e^{i\varphi_k} = \mathfrak{Z}\,\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \mathfrak{Z}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma l \quad \ldots \quad 7)$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Cof}\,\gamma l \quad \ldots \quad 8)$$

Den Tafeln von Jahnke und Emde[4]) entnehmen wir:

$$\mathfrak{Tg}\,\gamma l = \mathfrak{Tg}(\beta l + i\alpha l) = \frac{\mathfrak{Sin}(\beta l + i\alpha l)}{\mathfrak{Cof}(\beta l + i\alpha l)} = \frac{s\,e^{i\sigma}}{c\,e^{i\xi}} = \frac{s}{c}\,e^{i(\sigma - \xi)}$$

Dabei ist:

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\beta l - \cos 2\alpha l)} \quad \ldots \quad 9)$$

$$c = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\beta l + \cos 2\alpha l)} \quad \ldots \quad 10)$$

$$\mathrm{tg}(\sigma - \xi) = \mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\sin 2\alpha l}{\mathfrak{Sin}\,2\beta l}; \quad \mathrm{tg}\,\xi = \mathfrak{Tg}\,\beta l\,\mathrm{tg}\,\alpha l \quad \ldots \quad 11)$$

Die Werte $\mathfrak{Cof}\,2\beta l$, $\mathfrak{Sin}\,2\beta l$ können unmittelbar aus einer Funktionstafel entnommen werden[5]).

Hat man s, c und λ bestimmt, so ist:

$$\mathfrak{U}_k = Z\,\frac{s}{c}\cdot e^{(\varphi + \lambda)i} \quad \ldots \quad 12)$$

$$\mathfrak{U}_l = Z\,\frac{c}{s}\cdot e^{(\varphi - \lambda)i} \quad \ldots \quad 13)$$

$$\mathfrak{A} = c \cdot e^{\xi i} \quad \ldots \quad 14)$$

---

1) Rößler, Fernleitung von Wechselströmen, 1905, S. 243.

2) Breitfeld, Berechnung von Wechselstromfernleitungen, 1912; Deutsch, Über das Blondel-le Roysche Annäherungsverfahren zur Berechnung von Hochspannungskraftübertragungen, ETZ 1911, S. 56; Guttsmann, Berechnung und Messung langer Fernleitungen. Nach Atti delle Associazione Elettr. Ital., Bd. 17; ETZ 1916, S. 51.

3) Breisig, Theor. Telegraphie, 1910, S. 291.

4) Jahnke und Emde, Funktionstafeln 1909, S. 11.

5) Z. B. Smithonian Mathematical Tables. Hyperbolic Funktions. Washington 1909.

Die Abb. 1a und 1b zeigen den Verlauf von U_k und U_l abhängig von der Leitungslänge für eine Freileitung und ein gewöhnliches Kabel. Die Werte der Amplitude und der Phase sind getrennt dargestellt. Die wirksamen Werte der Freileitung sind auf Zusammenstellung Nr. 3, die des Kabels auf Zusammenstellung Nr. 7 angegeben.

Beispiel: Eine gewöhnliche Freileitung von 269 km Länge sei mit einem Widerstand

$$\mathfrak{R}_e = 1981\,(+\,38^0\,40')^{1)}$$

belastet. Charakteristik und Dämpfungsexponent dieser Freileitung sind aus dem Leerlauf- und dem Kurzschlußwiderstand berechnet. Die

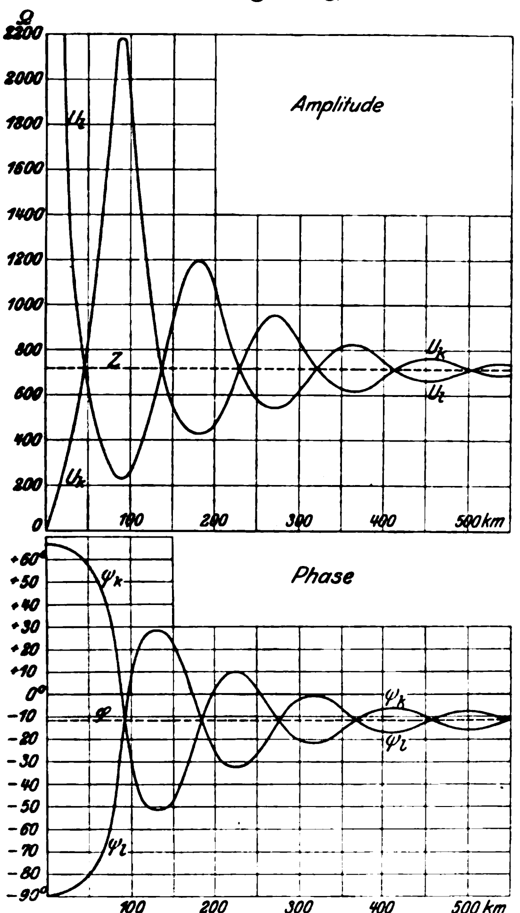


Abb. 1a. Verlauf des Leerlauf- und Kurzschlußwiderstandes abhängig von der Leitungslänge bei einer Freileitung von 3 mm ϕ.

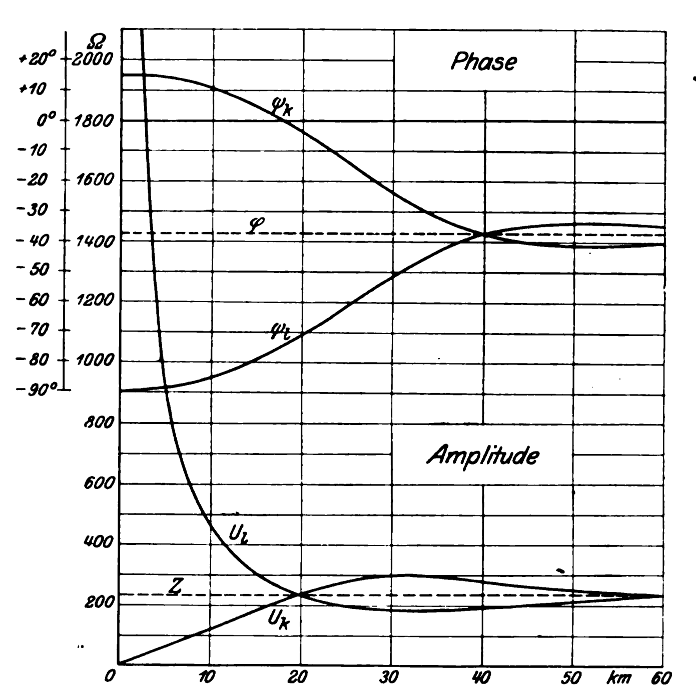


Abb. 1b. Verlauf des Leerlauf- und Kurzschlußwiderstandes abhängig von der Leitungslänge bei einem Papierhohlraumkabel von 2 mm ϕ.

Größe von $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ wurde mit der Frankeschen Maschine[2]) bestimmt. Die Messung ergab bei $\omega = 5000$[3])

$$\mathfrak{U}_k = 909\,(-\,15^0\,50'); \quad \mathfrak{U}_l = 575{,}5\,(-\,10^0),$$

es wird

$$\mathfrak{Z} = 723{,}5\,(-\,12^0\,55')$$
$$\beta l = 1{,}074$$
$$\alpha l = 4{,}822.$$

Von diesen drei Werten gehen wir aus. Ihre Kenntnis ermöglicht die Berechnung von $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{U}_l$ und $\mathfrak{A}$ für jede Länge. Wir führen sie jedoch wieder für 269 km durch, um gleichzeitig die Genauigkeit der Rechnung prüfen zu können. Es ist

[1]) Zur Vereinfachung der Schreibarbeit ist im folgenden bei allen Zahlenrechnungen an Stelle des Ausdruckes $Re^{\pm i\varphi}$ die abgekürzte Bezeichnung $R\,(\pm\,\varphi)$ angewendet. Alle Rechnungen sind mit dem 50 cm langen Rechenschieber ausgeführt, die Kreisfunktionen einer 4stelligen Tafel entnommen.

[2]) ETZ 1913, S. 433.

[3]) Wenn nicht anders bemerkt, beziehen sich alle Angaben auf die Kreisfrequenz $\omega = 5000$.

$$2\beta l = 2{,}148$$

$$2\alpha l = 9{,}644.$$

Die Gleichungen 9, 10, 11 angewendet ergibt

$$s = 1{,}631$$

$$c = 1{,}298$$

$$\lambda = -2^0\,57'.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 12, 13, 14 erhalten wir schließlich

$$\mathfrak{U}_k = 909\,(-15^0\,52')$$

$$\mathfrak{U}_l = 575{,}5\,(-9^0\,58').$$

Die ursprünglich gemessenen Werte und die berechneten unterscheiden sich in der Amplitude gar nicht, in der Phase nur um 2'.

Die angegebenen Hilfsmittel genügen für die Berechnung also durchaus, wenn man berücksichtigt, daß mit der Frankeschen Maschine die Phase auch nur auf 2' genau bestimmt werden kann. Bei gewöhnlichen und Krarup-Kabeln ist unter günstigen Umständen eine Genauigkeit von 1' erzielbar, d. h. der Unterschied bei mehreren unmittelbar hintereinander ausgeführten Einstellungen der Nullpunktslage im Hörer ist nicht größer als 1'.

Dieses Maß der Genauigkeit ist erforderlich, wenn man aus den Werten von $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ die Größe der Ableitung berechnen will.

Bei Leitungen, die mit Spulen ausgerüstet sind, ist eine derart genaue Einstellung nicht erzielbar; die genaue Berechnung der wirksamen Werte, besonders der Ableitung, aus $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ ist daher nicht möglich.

Die Bestimmung des Wirkungsgrades aus den Gleichungen 3 und 4 und dem als bekannt angenommenen Wert von $\mathfrak{R}_e$ erfolgt wie nachstehend.

Es ist

$$\eta = \frac{V_e \cdot J_e \cdot \cos \varphi_e}{V_a \cdot J_a \cdot \cos \varphi_a}.$$

Zur Ermittlung von η ist die Kenntnis der absoluten Werte von V_e, J_e; V_a, J_a nicht notwendig, sondern nur der Wert des Verhältnisses. Wir setzen deshalb zur Vereinfachung $J_e = 1$. $\mathfrak{R}_e$ ist gegeben, damit ist auch V_e bekannt.

Die Werte von V_a, J_a und φ_a ergeben sich aus den Gleichungen 3 und 4 in bekannter Weise.

Die graphische Addition von R_e und U_k bzw. von 1 und $\frac{R_e}{U_l}$ ergibt zunächst die Spannung (V_a') und die Stromstärke (J_a') ohne Berücksichtigung des Dämpfungsfaktors.

Die wirklichen Werte sind dann

$$V_a = V_a' \cdot c$$

$$J_a = J_a' \cdot c$$

$$V_a \cdot J_a = V_a' \cdot J_a' \cdot c^2.$$

Die Drehung von V_a gegen V_a' und von J_a gegen J_a' kann unberücksichtigt bleiben, nachdem sie für beide gleich groß ist. Der Winkel zwischen V_a' und J_a' ist also der gleiche wie der zwischen V_a und J_a, er ist $= \varphi_a$.

Abb. 2.

Bei dem vorher angeführten Beispiel wird (Abb. 2)

$$J_a' = 4{,}17; \quad J_a = 5{,}42$$

$$V_a' = 2616; \quad V_a = 3396$$

$$R_a = 627; \quad \varphi_a = -16^0 00'$$

und

$$\eta = \frac{1 \cdot 1981 \cdot 0{,}7808}{5{,}42 \cdot 3396 \cdot 0{,}9613} = 8{,}76\,\%.$$

Der Wirkungsgrad bestehender Fernsprechleitungen oder sonstiger Einrichtungen kann auch unmittelbar durch Messung mit der Frankeschen Maschine bestimmt werden, falls Anfang und Ende der Leitung sich an derselben Stelle befinden.

Es ist wieder

$$\eta = \frac{V_e \cdot J_e \cdot \cos \varphi_e}{V_a \cdot J_a \cdot \cos \varphi_a}.$$

$\frac{V_e}{J_e}$ sowie φ_e sind aus der gegebenen Belastung $\mathfrak{R}_e$ bekannt. Mißt man den Scheinwiderstand am Anfang der Leitung, so ist damit $\frac{V_a}{J_a}$ und φ_a gegeben.

Wird schließlich noch das Verhältnis $\frac{V_e}{V_a}$ ermittelt, so kann der Wert von η berechnet werden.

Die Bestimmung dieses Verhältnisses geschieht folgendermaßen: Man legt zuerst die Klemmen des Ankers II an die Punkte 1 und 2 (Abb. 3), verändert die Amplitude von II und die Phase von I so lange, bis der Hörer schweigt. Der am Anker I abgelesene Winkel sei φ_1.

Abb. 3.

Darauf legt man die Klemmen des Ankers II an die Punkte 3 und 4 des selbstinduktions- und kapazitätsfreien Widerstandes und stellt Punkt 4 sowie die Phase von I so ein, daß der Hörer wieder schweigt, der abgelesene Winkel sei φ_2; der Widerstand zwischen den Punkten $3/4 = a_1$.

Dann ist

$$V_a = a_1 J_a \quad \text{und} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_a.$$

Nimmt man die beiden Messungen nochmals in der Weise vor, daß man die Klemmen des Ankers II zuerst an 5/6 und dann an 3/4' legt, und ist der Widerstand, der sich jetzt ergibt, gleich a_2, so ist

$$V_e = a_2 J_a.$$

Beide Gleichungen dividiert ergibt

$$\frac{V_e}{V_a} = \frac{a_2}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Der Wirkungsgrad wird dann

$$\eta = \frac{a_2^2 \cdot \cos \varphi_e}{a_1 \cdot R_e \cdot \cos \varphi_a}\text{[1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

Messungen in dieser Weise an der vorerwähnten Freileitung ausgeführt, ergaben

$$R_a = a_1 = 628\,\Omega; \quad \varphi_a = -16^0 22'$$

$$a_2 = 366\,\Omega.$$

Hieraus ergibt sich

$$\eta = \frac{366^2 \cdot \cos 38^0 40'}{628 \cdot 1981 \cdot \cos 16^0 22'} = 8{,}78\,\%.$$

Der gerechnete Wert war $8{,}76\,\%$.

Die Übereinstimmung zwischen beiden Werten ist durchaus genügend.

[1]) Diese Formel verdanke ich der Firma Siemens & Halske.

Außer an dieser Freileitung wurden Messungen auch vorgenommen an einer pupinisierten Freileitung, sowie an Kabeln und an zusammengesetzten Leitungen (Zusammenstellung Nr. 1). Die wirksamen Werte dieser Leitungen sind auf der Zusammenstellung Nr. 1a angegeben.

Zusammenstellung Nr. 1.

Vergleich der berechneten und der gemessenen Werte des Wirkungsgrades und des Scheinwiderstandes am Anfang der Leitung.

	Belastung 1981 (+ 38°40′)				Belastung 979,5 (— 50°30′)			
	Scheinwiderstand am Anfang der Leitung		Wirkungsgrad in %		Scheinwiderstand am Anfang der Leitung		Wirkungsgrad in %	
	gerechnet	gemessen	gerechnet	gemessen	gerechnet	gemessen	gerechnet	gemessen
Gewöhnl. Kabel allein	372 (— 74°12′)	371,7 (— 74°06′)	51,2	51,0	275 (— 65°45′)	275 (— 65°46′)	39,3	39,4
Pupinisiert. Kabel allein	591 (+ 39°40′)	588 (+ 39°34′)	67,8	68,8	1820 (— 0°30′)	1828 (— 0°30′)	67,5	69,5
Pup. Freileitung allein	1852 (— 8°30′)	1840 (— 8°18′)	6,2	6,1	2020 (— 4°50′)	2037 (— 4°12′)	4,5	4,8
Pupinis. Freileitung mit gewöhnlichem Kabel	2145 (— 7°30′)	2150 (— 6°25′)	0,64	0,76	2170 (— 8°00′)	2146 (— 7°00′)	0,55	0,65
Pupinis. Freileitung mit pupinisiertem Kabel	2015 (— 10°00′)	1990 (— 9°45′)	2,97	3,27	1916 (— 6°40′)	1887 (— 5°40′)	4,75	4,80

Zusammenstellung Nr. 1a.

Wirksame Werte der Leitungen für die Untersuchung auf Zusammenstellung Nr. 1.

		Freileitung	Gewöhnliches Kabel	Pupinkabel
Durchmesser . . . . . mm	d	3	2	2
Länge . . . . km	l	669	14,8	14,8
Charakteristik	$\mathfrak{Z}$	1920 (— 6°15′)	233 (— 37°)	867 (— 2°36′)
Dämpfungsexponent	βl	1,345	0,423	0,112
Winkelmaß	αl	36,407	0,562	2,410

Bei den mit Spulen versehenen Leitungen ist die Übereinstimmung zwischen den durch unmittelbare Messung und den durch Rechnung gefundenen Werten etwas geringer. Dies rührt einmal davon her, daß die pupinisierten Leitungen höchst selten genau symmetrisch sind, denn die vorher entwickelte Berechnungsweise ist nur auf homogene und symmetrische Leitungen anwendbar. Außerdem ist die genaue Bestimmung des Leerlauf- und des Kurzschlußwiderstandes mit der Frankeschen Maschine infolge der großen Abhängigkeit der Nullpunktslage im Hörer von der Frequenz schwieriger, und schließlich ändern sich bei Freileitungen die Werte der Dämpfung und der Charakteristik innerhalb weniger Minuten, so daß es nicht möglich ist, die Dämpfungsmessung und die Messung zur unmittelbaren Bestimmung des Wirkungsgrades bei genau gleichbleibenden elektrischen Konstanten der Leitung auszuführen, wodurch sich naturgemäß kleine Ungenauigkeiten ergeben.

Die Berechnung des Wirkungsgrades der aus zwei oder mehr Teilen zusammengesetzten Leitungen wird für jeden Teil getrennt vorgenommen. Befindet sich z. B. die Belastung am Ende der Freileitung, so bildet der Scheinwiderstand am Anfang der Freileitung den Wert der Belastung für das vorgeschaltete Kabel. Das Produkt der für Freileitung und Kabel getrennt ermittelten Wirkungsgrade gibt den Gesamtwirkungsgrad.

Der Wirkungsgrad kann schließlich auch aus den Gleichungen 3 und 4

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{A}\,\mathfrak{J}_e\,(\mathfrak{R}_e + \mathfrak{U}_t)$$



$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{A}\,\mathfrak{J}_e\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{U}_l}\right)$$

durch Rechnung bestimmt werden. In der Hochspannungstechnik wird die Rechnung meist vorgezogen; für die Untersuchung von Fernsprechleitungen genügt die Zeichnung auf alle Fälle. Sie ergibt stets genügend zuverlässige Werte.

b) Der Höchstwirkungsgrad.

Für die späteren Untersuchungen ist die Kenntnis des Höchstwirkungsgrades notwendig. Die Bedingungen für diesen ergeben sich aus den Gleichungen 3 und 4 in einfacher Weise.

Setzen wir

$$\mathfrak{U}_k = U_k\, e^{i\psi_k} = y_k + i\,\mathfrak{z}_k = U_k \cos\psi_k + i\,U_k \sin\psi_k \quad \ldots\ldots 18)$$

$$\mathfrak{U}_l^{-1} = (U_l\, e^{i\psi_l})^{-1} = y_l + i\,\mathfrak{z}_l = \frac{1}{U_l}\cos\psi_l + i\,\frac{1}{U_l}\sin(-\psi_l) \quad \ldots\ldots 19)$$

so erreicht nach Roeßler der Wirkungsgrad der Leitung seinen Höchstwert, wenn

$$R_{e\,max} = \sqrt{\frac{y_k}{y_l}} \quad \ldots\ldots 20)$$

und

$$\sin\varphi_{e\,max} = \frac{y_k\,\mathfrak{z}_l - y_l\cdot\mathfrak{z}_k}{2\sqrt{y_l\cdot y_k}} \text{ ist}^{1)}. \quad \ldots\ldots 21)$$

Diese Gleichungen lassen sich noch weiter vereinfachen.

Führen wir die Beziehungen

$$y_k = U_k \cos\psi_k$$

$$y_l = \frac{1}{U_l}\cdot\cos\psi_l$$

in Gleichung Nr. 20 ein, so wird

$$R_{e\,max} = \sqrt{U_k\cdot U_l}\cdot\sqrt{\frac{\cos\psi_k}{\cos\psi_l}}.$$

$\sqrt{U_k\cdot U_l}$ ist bekanntlich $= Z$ (Gl. 5), so daß sich ergibt:

$$R_{e\,max} = Z\sqrt{\frac{\cos\psi_k}{\cos\psi_l}} \quad \ldots\ldots 22)$$

Für den Fall, daß die Leitung unendlich lang ist, (praktisch $\beta l > 2$), wird $U_k = U_l$ und $\cos\psi_k = \cos\psi_l$, damit wird

$$R_{e\,max} = Z \quad \ldots\ldots 23)$$

Außerdem setzten wir

$$\mathfrak{z}_k = U_k\cdot\sin\psi_k$$

so ist

$$\mathfrak{z}_l = \frac{1}{U_l}\cdot\sin(-\psi_l),$$

dies in Gl. 21 eingeführt, gibt

$$\sin\varphi_{e\,max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_k}{U_l}}\cdot\frac{-\sin(\psi_k + \psi_l)}{\sqrt{\cos\psi_k\cos\psi_l}}.$$

Bezeichnen wir $\sqrt{\frac{U_k}{U_l}}$ mit h, und verwenden die Beziehung

$$\psi_k + \psi_l = 2\,\varphi,$$

[1]) Die Ableitung dieser Gleichungen ist in dem Werk von Roeßler auf S. 221 angegeben.

so ist
$$\sin \varphi_{e\,max} = -\frac{h}{2}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos\psi_k \cdot \cos\psi_l}} \qquad 24)$$
Für die unendlich lange Leitung wird
$$\sin \varphi_{e\,max} = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi} = -\sin\varphi \qquad 25)$$
$$\varphi_{e\,max} = -\varphi$$

Die Bedingung, unter welcher der Wirkungsgrad einer sehr langen Leitung ein Maximum wird, lautet also
$$R_e e^{i\varphi_e} = Z e^{-i\varphi}. \qquad 26)$$
Bei sämtlichen Fernsprechleitungen ist der $\sphericalangle\varphi$ negativ. Positiv könnte er nur bei Leitungen werden, die zuviel mit Selbstinduktion belastet wurden, ein Fall, der in der Praxis nicht vorkommt.

Man muß also der Belastung stets eine positive Phase geben, damit die Leitung mit ihrem Höchstwirkungsgrad arbeitet. Nachdem sämtliche Fernsprechapparate eine positive Phase besitzen, so kann man den Endapparat der Leitung so anpassen, daß diese, wenn auch nicht gerade ihren höchsten, so doch einen möglichst hohen Wirkungsgrad besitzt. Bei gegebener Leistung am Anfang ist in diesem Falle die Leistung am Ende möglichst groß. Allerdings ist damit die Aufgabe, einen Fernsprechapparat der Leitung anzupassen, nicht erledigt, weil in der Praxis fast stets derselbe Apparat zum Sprechen und Hören verwendet wird und der Scheinwiderstand, den der Apparat als Empfänger besitzen soll, nicht immer mit dem Scheinwiderstand übereinstimmt, der für den Gebeapparat günstig ist.

Es ist aber nicht Zweck der vorliegenden Untersuchungen, die Apparate an die Leitungen anzupassen.

Wir nehmen umgekehrt die Apparate als gegeben an und beurteilen hiernach die Leistungsfähigkeit der Leitungen. Dies ist zunächst der für die Praxis wichtigere Fall. Die Verwaltungen bestizen eine sehr große Anzahl von Apparaten, und diese werden so vorwiegend für den Stadtverkehr verwendet, daß deren allgemeine Umwandlung für die Zwecke des Fernverkehrs nicht oder doch nur in beschränktem Umfang stattfinden könnte, weil bei der großen Anzahl der verwendeten Apparate die Kosten, der Platz und anderweitige Rücksichten die ausschlaggebende Rolle spielen. Aus dem Verhalten der Leitungen lassen sich übrigens gleichzeitig Schlüsse auf die Zweckmäßigkeit des Baues der Apparate ziehen, wie sich später noch zeigen wird.

Arbeitet die Leitung mit ihrem Höchstwirkungsgrad, so besteht zwischen dem Scheinwiderstand der Belastung und dem Scheinwiderstand am Anfang der Leitung die einfache Beziehung[1]):
$$R_e \cdot e^{i\varphi_e} = R_a \cdot e^{-i\varphi_a} \qquad 27)$$
$$R_a = R_e$$
$$\varphi_a = -\varphi_e,$$
die beiden Werte unterscheiden sich nur durch die Phase.

φ_e ist stets positiv, φ_a wird damit stets negativ.

Bei sehr großer Länge der Leitung ist
$$\mathfrak{R}_a = \mathfrak{Z} \qquad 28)$$

Die Gleichung für η wird ebenfalls sehr einfach, sie lautet
$$\eta_{max} = \frac{J_e \cdot V_e}{J_a \cdot V_a} = \frac{V_e^2}{V_a^2} = \frac{J_e^2}{J_a^2} \qquad 29)$$

[1]) Der Beweis hierfür ist in dem schon erwähnten Werk von Rößler, S. 226, zu finden.

Der Höchstwirkungsgrad ist eine sehr wichtige Größe für den Vergleich verschiedener Leitungen.

Er läßt erkennen, was im besten Fall aus ihnen herausgeholt werden kann.

c) Wirkungsgrad für den Fall: $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}$

(Scheinwiderstand der Belastung gleich der Charakteristik).

Dieser Belastungsfall hat auch bisher in der Fernsprechtechnik größere Beachtung gefunden. Er wird vielfach als Idealfall für die Anpassung eines Apparates an eine Leitung angesehen.

Zur Untersuchung dieses Falles gehen wir zweckmäßig nicht von den Gl. 3) und 4) aus, sondern von den allgemeinen Gleichungen über die Fortpflanzung der Wechselströme auf Leitungen.

Sie lauten

$$\mathfrak{V}_e = a_1 e^{-\gamma l} + a_2 e^{+\gamma l} \quad \dots \dots \quad 30)$$

$$\mathfrak{J}_e = \frac{a_1}{\mathfrak{Z}} e^{-\gamma l} - \frac{a_2}{\mathfrak{Z}} e^{+\gamma l} \quad \dots \dots \quad 31)$$

Der Wert der Konstanten a_1 und a_2 muß für jeden gewählten Belastungsfall festgestellt werden; die Bedeutung der übrigen Größen ist die gleiche wie vorher.

$a_1 e^{-\gamma l}$ stellt die hingehende,
$a_2 e^{+\gamma l}$ die zurücklaufende Spannungswelle dar.

Bei unendlicher Länge der Leitung fällt die zurücklaufende Welle weg. Das gleiche ist der Fall, wenn die Leitung mit einem Scheinwiderstand gleich ihrer Charakteristik belastet wird[1]).

Es gelten dann die Gleichungen

$$\mathfrak{V}_e = a_1 e^{-\gamma l} \quad \dots \dots \quad 32)$$

$$\mathfrak{J}_e = \frac{a_1}{\mathfrak{Z}} e^{-\gamma l} \quad \dots \dots \quad 33)$$

Berücksichtigen wir noch, daß bei $l = 0$ $\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_a$ ist, so wird

$$\mathfrak{V}_e = \mathfrak{V}_a e^{-\gamma l} = \mathfrak{V}_a (e^{-\beta l} \cdot e^{-i\alpha l}) \quad \dots \dots \quad 34)$$

$$\mathfrak{J}_e = \mathfrak{J}_a e^{-\gamma l} = \frac{\mathfrak{V}_a}{\mathfrak{Z}} e^{-\gamma l} = \mathfrak{J}_a (e^{-\beta l} \cdot e^{-i\alpha l}) \quad \dots \dots \quad 35)$$

Die Gleichungen sagen aus:

Spannung und Stromstärke am Ende sind gegen die entsprechenden Werte am Anfang im Verhältnis $e^{\beta l}$ vermindert und im Winkel αl gedreht.

Außerdem ist

$$\mathfrak{J}_a = \frac{\mathfrak{V}_a}{\mathfrak{Z}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{V}_a}{\mathfrak{J}_a} = \mathfrak{Z} \quad \dots \dots \quad 36)$$

d. h. der Scheinwiderstand am Anfang ist gleich der Charakteristik.

Nachdem auch laut Voraussetzung der Scheinwiderstand am Ende gleich der Charakteristik ist, so sind die Scheinwiderstände und damit auch die Phasenverschiebungen am Anfang und am Ende gleich groß, und es gilt (wie beim maximalen Wirkungsgrad) die Beziehung

$$\eta z = \frac{V_e \cdot J_e}{V_a \cdot J_a} \quad \dots \dots \quad 37)$$

[1]) Der Beweis hierfür ergibt sich ohne weiteres durch Einsetzen der entsprechenden Grenzbedingungen in Gl. 30) und 31).



Nachdem $\frac{V_e}{V_a} = e^{-\beta l}$ und $\frac{J_e}{J_a} = e^{-\beta l}$ ist, so erhalten wir

$$\eta z = e^{-2\beta l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 38)$$

d. h. der Wirkungsgrad ist nur abhängig von βl. Nehmen wir die Leistung am Anfang als konstant an, so ist die Leistung am Ende nur vom Dämpfungsexponenten abhängig und dieser kann als Maß für die zu erwartende Lautstärke dienen.

Die Verwendbarkeit von βl als Grundlage für den Vergleich verschiedener Fernsprechleitungen ist somit an die Gültigkeit der Beziehung $\eta = e^{-2\beta l}$ geknüpft.

Außerdem muß noch die Leistung am Anfang gleich groß sein. Auf Zusammenstellung Nr. 2 ist für einige Werte von βl der zugehörige Wert von η angegeben.

Zusammenstellung Nr. 2.

Wirkungsgrad einer Leitung für einige Werte von βl.

βl	$\eta_z = e^{-2\beta l}$ %
2,0	1,832
3,0	0,248
4,0	0,0335
5,0	0,00454

In der Praxis ist man nicht gewohnt, die Größe der Lautstärke durch den Wert von η auszudrücken, obwohl dies ohne weiteres möglich wäre. Man verwendet hierzu vielmehr den Dämpfungsexponenten selbst und rechnet bei $\beta l = 2$ auf eine gute, bei $\beta l = 3$ auf eine genügende Lautstärke usw. Die Aichleitungen sind ebenfalls nach Bruchteilen von βl abgestuft.

Wir können bei jedem Wert von η, also bei jedem Wert der Belastung die Verbindung mit dem Dämpfungsexponenten herstellen, wenn wir entsprechend der Gl. 38 aus dem betreffenden Wirkungsgrad einen Wert $\beta l'$ ableiten. Also z. B.

$$\eta_{max} = e^{-2\beta l'_{max}}.$$

Die Einführung dieses aus dem Wirkungsgrad abgeleiteten Wertes $\beta l'$ für den Vergleich verschiedener Leitungen bietet folgende Vorteile:

1. Die Leitungen können bei jedem Wert der Belastung miteinander verglichen werden, es ist also die Berücksichtigung der sogenannten Reflexionen am Endapparat oder an der Verbindungsstelle zweier Leitungen möglich.

2. Der Vergleich kann auf beliebig zusammengesetzte Leitungen ausgedehnt werden, weil der Wirkungsgrad für diese ebenso einfach ermittelt werden kann wie für eine homogene oder symmetrische Leitung. Der Begriff „Dämpfungsexponent" kann bekanntlich auf unsymmetrische Leitungen nicht ohne weiteres übertragen werden.

3. Der Wirkungsgrad ist in sehr einfacher Weise meßbar, wenn beide Enden der Leitung sich an der gleichen Stelle befinden.

Bei unendlicher Länge der Leitung gilt bei jeder Belastung die Beziehung

$$\eta = e^{-2\beta l} = 0.$$

Alle Wirkungsgradkurven nähern sich also mit zunehmender Leitungslänge dem Wert $e^{-2\beta l}$ und gehen schließlich in diesen über. Die Länge, bei der dies praktisch angenommen werden kann, ist bei den einzelnen Arten von Leitungen sehr verschieden.

Der eben besprochene Belastungsfall — $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}$ — tritt in der Praxis nur dann ein, wenn die Leitung einer anderen mit gleicher Charakteristik vorgeschaltet ist. Bei unmittelbarer Belastung durch Apparate, Übertrager kommt mehr der Höchstwirkungsgrad in Betracht. Dies ist besonders bei gewöhnlichen Kabeln der Fall, weil deren Charakteristik eine sehr beträchtliche negative Phase (bis -45^0) aufweist. Der Höchst-



wirkungsgrad wird aber bei erheblichen positiven Werten der Phase erreicht, wie sie gerade die Apparate und Übertrager aufweisen.

c) Wirkungsgrad von Freileitungen.

α) Wirkungsgrad abhängig von der Länge. Auf der Zusammenstellung Nr. 3 sind die wirksamen Werte der Freileitungen aufgeführt, für welche wir die Untersuchungen durchführen wollen. Sie stimmen nicht genau mit den auf Zusammenstellung Nr. 1a angegebenen überein. Das liegt daran, daß die Werte auf Zusammenstellung Nr. 3 Mittelwerte aus zahlreichen Messungen vorstellen, welche sich über einen größeren Zeitraum erstreckten, während die anderen Augenblickswerte sind.

Zusammenstellung Nr. 3.

Wirksame Werte der Freileitung von 3 mm ϕ mit und ohne Spulen.
(Alle 10 km eine Spule von 0,2 H.)

	Gleichstromwiderstand R Ω/km	Kreisfrequenz ω	Wirksamer Widerstand W Ω/km	Selbstinduktion L H/km	Kapazität C Mf/km	Ableitung A $S \cdot 10^{-6}$	Charakteristik $Z e^{\varphi i}$	Spez. Dämpfung β	Wellenlängenkonstante α	Verzerrung $\beta 7000 - \beta 3030 = \Delta$
Freileitung ϕ 3 mm	5,04	3030[1])	5,05	0,00242	0,00515	0,3	753 (— 16° 46′)	0,00355	0,01120	0,00023
		5000	5,21	0,00240	0,00515	0,5	716 (— 11° 37′)	0,00373	0,01730	
		7000	5,58	0,00236	0,00515	0,7	690 (— 10° 06′)	0,00378	0,02480	
Freileitg. ϕ 3 mm pupinis.		3030					2320 (— 3° 30′)	0,00190	0,0323	0,00026
		5000					2045 (— 7° 35′)	0,00200	0,0533	
		7000					1700 (— 13° 30′)	0,00216	0,0764	

Die folgenden Ergebnisse gelten, soweit sie sich auf den Verlauf der Wirkungsgradkurven beziehen, auch für Leitungen größerer Drahtstärke, weil sich deren Charakteristik nur wenig von der Charakteristik der Leitung von 3 mm ϕ unterscheidet.

So wurde für eine 4 mm starke Freileitung ohne Spulen der Wert

$$\mathfrak{Z} = 710(-7^{0}\,10')$$

gefunden, gegen

$$\mathfrak{Z} = 716(-11^{0}\,37')$$

bei der 3 mm starken Leitung.

Der Verlauf von η_{max} und η_z sowie der Verlauf der hieraus abgeleiteten Werte $\beta l'_{max}$ und βl, abhängig von der Leitungslänge, ist aus Abb. 4 zu ersehen.

Auf Zusammenstellung Nr. 4 sind die Werte der Belastungen angegeben, die zur Erzielung des Höchstwirkungsgrades notwendig sind.

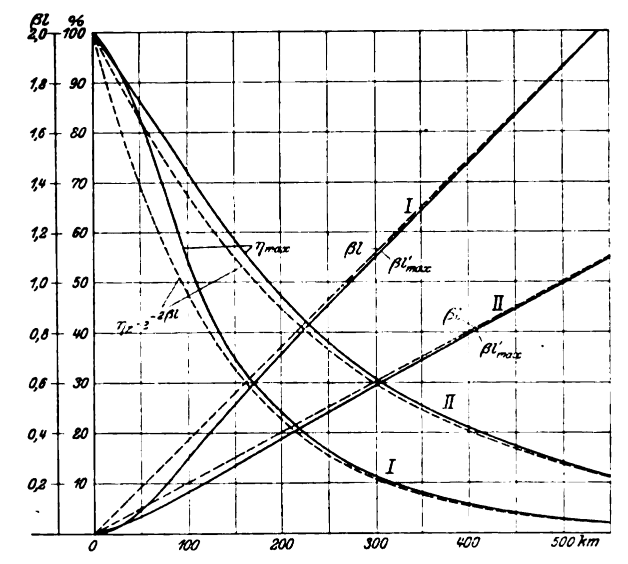


Abb. 4. Werte für η_{max} und η_z; $\beta l'_{max}$ und βl der Freileitung ohne und mit Spulen abhängig von der Leitungslänge. Kurve I: Leitung ohne Spulen; Kurve II: Leitung mit Spulen.

[1]) Diese Frequenz mußte statt $\omega = 3000$ gewählt werden, weil die Zungen des Frequenzmessers der Frankeschen Maschine an der Stelle $\omega = 3000$ nicht genau abgestimmt waren.

Zusammenstellung Nr. 4.
Werte der Belastung am Ende, bei welcher der Wirkungsgrad der Leitung seinen Höchstwert (η_{max}) erreicht.

βl	Pupinisierte Freileitung $\mathfrak{Z} = 2045 (-7^0 36')$		Gewöhnliche Freileitung $\mathfrak{Z} = 716 (-11^0 37')$	
	Länge km	günstigste Belastung	Länge km	günstigste Belastung
0,1	50	1110 (+ 20° 38′)	26,8	2245 (+ 45° 30′)
0,2	100	1495 (+ 29° 59′)	53,6	1214 (+ 49° 11′)
0,3	150	1900 (+ 26° 15′)	80,5	831 (+ 45° 52′)
0,4	200	2255 (+ 18° 18′)	107,2	636 (+ 30° 10′)
0,5	250	2290 (+ 9° 22′)	134	601 (+ 16° 45′)
0,7	350	1981 (+ 4° 50′)	188	728 (+ 7° 05′)
0,9	450	1980 (+ 9° 55′)	241	764 (+ 13° 56′)
1,1	550	2110 (+ 8° 30′)	295	696 (+ 14° 05′)
1,3	650	2040 (+ 6° 33′)	349	704 (+ 10° 20′)
1,6	800	2040 (+ 8° 12′)	429	739 (+ 12° 10′)
2,0	1000	2040 (+ 7° 08′)	536	712 (+ 11° 12′)

Diese Werte geben nach Gl. 27) auch den Scheinwiderstand am Anfang der Leitung an, wenn das Vorzeichen der Phase gewechselt wird. Sie unterscheiden sich bei größeren Längen nur unwesentlich von der Charakteristik.

Die Kurven η_{max} und η_Z fallen nahe zusammen; bei größeren Längen, etwa von 500 km ab, gehen sie vollkommen ineinander über. Es stimmen aber nicht nur die Werte von η_{max} und η_Z bei ein und derselben Leitung überein, sondern auch die Werte von η_{max} der gewöhnlichen und der mit Spulen belasteten Leitung. Das ist aus der Abb. 4 nicht ohne weiteres ersichtlich. Würden wir nicht die Länge, sondern βl als Abszisse gewählt haben, so würden alle 4 Kurven, wenigstens bei den in der Praxis meist vorkommenden Längen, nahezu zusammenfallen.

Bei beiden Freileitungen gibt also βl die größtmögliche Leistungsfähigkeit an (abgesehen von der Leistung am Anfang). Bei gleichem βl ist sie gleich groß. Es sei vorweg bemerkt, daß dies bei Kabeln ohne erhöhte Selbstinduktion nicht der Fall ist.

Unter Berücksichtigung der Leistung am Anfang gestaltet sich der Vergleich etwas anders, weil die Charakteristik der beiden Leitungen sehr verschieden ist (716 gegen 2045). Die hierdurch eintretende Verschiebung ist jedoch nicht sehr groß, wie sich noch zeigen wird.

β) Wirkungsgrad abhängig von der Belastung. Wir nehmen den Dämpfungsexponenten der Leitung ohne und mit Spulen gleich groß an.

Erfahrungsgemäß darf βl den Wert 1,3 für die Fernleitung allein nicht wesentlich überschreiten, wenn eine gute Sprechverständigung über die ganze Verbindung einschließlich der Ämter, Anschlußleitungen usw. erreicht werden soll.

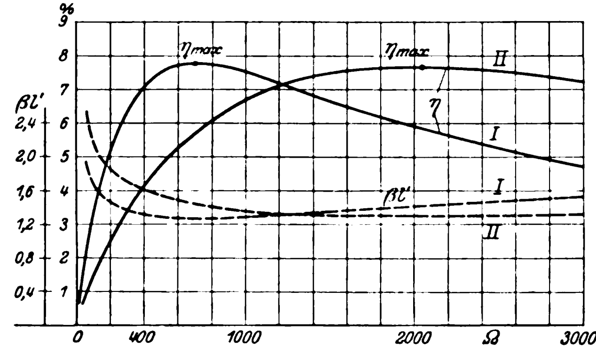


Abb. 5. Verlauf des Wirkungsgrades und der Werte von $\beta l'$ abhängig von dem Scheinwiderstand der Belastung bei der Freileitung ohne und mit Spulen.
Dämpfungsexponent der Freileitungen: $\beta l = 1,3$.
Kurve I: Leitung ohne Spulen: Phase d. Belastg. $= + 10^0 20'$.
„ II: „ mit „ „ „ „ $= + 6^0 33'$.

Der Wert $\beta l = 1,3$ entspricht einer Länge von $\sim$ 350 km bei der 3 mm Leitung ohne und 650 km bei der Leitung mit Spulen.

η hängt sowohl von der Größe der Amplitude wie auch von dem Wert der Phase ab. Nehmen wir zuerst die Phase gleichbleibend an ($\varphi_e = + 10^0 20'$ bzw. $+ 6^0 33'$), so verläuft η abhängig von dem Wert der Amplitude nach Kurve I und II



(Abb. 5). Die Kurven enthalten die Höchstwirkungsgrade der beiden Leitungen; sie werden erreicht bei $R_e = 704\ \Omega$ (Leitung ohne Spulen) bzw. $R_e = 2040\ \Omega$ (Leitung mit Spulen). Bei geringen Werten der Amplitude (Z-B-System) ist der Wirkungsgrad und demgemäß auch $\beta l'$ der gewöhnlichen Leitung größer als der entsprechende Wert der Spulenleitung, bei hohen Scheinwiderständen, wie sie die O-B-Apparate und manche Übertrager aufweisen, ist das Umgekehrte der Fall. Der Unterschied ist aber innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen nicht beträchtlich.

Lassen wir die Amplitude konstant ($R_e = 704\ \Omega$ bzw. $2040\ \Omega$) und ändern die Phase, so ergibt sich der auf Abb. 6 dargestellte Verlauf des Wirkungsgrades. Die Kurven für die gewöhnliche (I) und die Spulenleitung (II) fallen nahezu zusammen. Der Unterschied zwischen η_{max} der beiden Leitungen ist bei einem Dämpfungsexponenten $\beta l = 1{,}3$ schon sehr gering; die Werte für $\beta l'$ fallen praktisch zusammen (siehe auch Abb. 4). $\beta l'$ unterscheidet sich zwischen -40^0 und $+40^0$ wiederum nicht erheblich von dem Wert des Dämpfungsexponenten, steigt aber bei noch größeren negativen oder positiven Winkeln sehr rasch an. Je kürzer die Leitung wird, um so mehr fällt natürlich der Unterschied zwischen βl und $\beta l'$ ins Gewicht. Bei Kabeln, die auch in sehr geringen Längen zur Verwendung kommen, gewinnt er demgemäß erhöhte praktische Bedeutung.

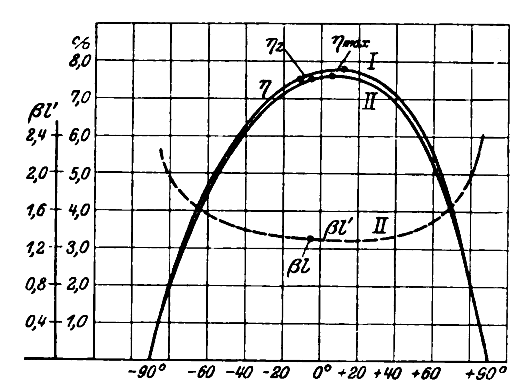


Abb. 6. Verlauf des Wirkungsgrades und der Werte von $\beta l'$ abhängig von dem Scheinwiderstand der Belastung bei der Freileitung ohne und mit Spulen ($\beta l = 1{,}3$). Kurve I: Leitung ohne Spulen. Amplitude der Belastung $704\ \Omega$. Kurve II: Leitung mit Spulen. Amplitude der Belastung $2040\ \Omega$.

Mit der Änderung der Belastung ändert sich auch der Scheinwiderstand am Anfang der Leitung. Bei den in der Praxis meist vorkommenden Längen (βl zwischen 1 und 2) ist diese Änderung jedoch nicht erheblich (Zusammenstellung Nr. 5 und 6). Das ist von Wichtigkeit für die Untersuchung von Kabeln,

Zusammenstellung Nr. 5.

Scheinwiderstand am Leitungsanfang bei verschiedenen Werten der Belastung am Leitungsende.

(Leitung ohne Spulen. $\beta l = 1{,}3$.)

R_e	φ_e	$R_a e^{i\varphi a}$
200	$+10^0 20'$	661 ($-13^0 36'$)
500	$+10^0 20'$	689 ($-11^0 18'$)
704	$+10^0 20'$	704 ($-10^0 20'$)
1000	$+10^0 20'$	720 ($-9^0 30'$)
1500	$+10^0 20'$	739 ($-8^0 42'$)
2000	$+10^0 20'$	750 ($-8^0 33'$)
3000	$+10^0 20'$	764 ($-7^0 48'$)
704	-90^0	771 ($-17^0 35'$)
704	-60^0	745 ($-14^0 48'$)
704	-40^0	733 ($-13^0 20'$)
704	-20^0	721 ($-12^0 15'$)
704	0^0	713 ($-11^0 00'$)
704	$+10^0 20'$	704 ($-10^0 20'$)
704	$+20^0$	699 ($-9^0 09'$)
704	$+40^0$	686 ($-8^0 09'$)
704	$+60^0$	671 ($-6^0 33'$)
704	$+90^0$	638 ($-3^0 40'$)

Zusammenstellung Nr. 6.

Scheinwiderstand am Leitungsanfang bei verschiedenen Werten der Belastung am Leitungsende.

(Leitung mit Spulen. $\beta l = 1{,}3$.)

R_e	φ_e	$R_a e^{i\varphi a}$
200	$6^0 33'$	1810 ($-7^0 20'$)
500	$6^0 33'$	1868 ($-6^0 51'$)
1000	$6^0 33'$	1941 ($-6^0 45'$)
1500	$6^0 33'$	2000 ($-6^0 36'$)
2040	$6^0 33'$	2040 ($-6^0 33'$)
2500	$6^0 33'$	2090 ($-6^0 42'$)
3000	$6^0 33'$	2102 ($-6^0 50'$)
2040	-90^0	2022 ($-14^0 33'$)
2040	-60^0	2030 ($-11^0 50'$)
2040	-40^0	2032 ($-10^0 27'$)
2040	-20^0	2036 ($-8^0 33'$)
2040	0^0	2040 ($-7^0 03'$)
2040	$+6^0 33'$	2040 ($-6^0 33'$)
2040	$+20^0$	2042 ($-5^0 36'$)
2040	$+40^0$	2044 ($-3^0 50'$)
2040	$+60^0$	2046 ($-1^0 50'$)
2040	$+90^0$	2065 ($+2^0 00'$)

die der Freileitung vorgeschaltet sind. Der Scheinwiderstand am Anfang der Freileitung bildet die Belastung für das Kabel. Dessen Wirkungsgrad bleibt also annähernd gleich groß, welchen Wert auch die Belatung am Ende der Freileitung haben mag.

c) Wirkungsgrad von Kabeln.

Die Frage, ob die künstliche Belastung sehr kurzer Kabelstücke mit Selbstinduktion praktischen Wert hat, d. h. eine Verbesserung der Sprechverständigung hervorruft, steht heute noch offen.

Der Dämpfungsexponent bzw. die spez. Dämpfung der Kabel vermag hierüber nicht hinreichend Aufschluß zu geben wegen des Unterschiedes der Werte $\beta l'$ bei verschiedenen Werten der Belastung. Absolut ist er zwar nicht viel größer als bei den Freileitungen, im Verhältnis fällt er aber bei dem geringen Wert des Dämpfungsexponenten weit mehr ins Gewicht. Die Entscheidung über die Zweckmäßigkeit der Belastung mit Selbstinduktion ist deshalb auch nicht allgemein, sondern nur für einen bestimmten Verwendungszweck zu treffen. Ein allgemeiner Überblick über die Leitungsfähigkeit der einzelnen Kabelarten läßt sich jedoch bereits aus dem Verlauf der Wirkungsgradkurven bzw. der Kurven für $\beta l'$ abhängig von der Länge und der Belastung gewinnen. Die genaue Feststellung erfolgt für einige Belastungsfälle am Schluß.

Es wird verglichen:

Ein gewöhnliches Kabel von 2 mm ϕ mit einem Krarupkabel und einem mäßig pupinisierten Kabel vom gleichen Durchmesser. Außerdem soll noch ein Teilnehmeranschlußkabel von 0,8 mm ϕ mit in Betracht gezogen werden, der ausgedehnten Verwendung wegen, welche diese Kabelart findet. Die Zusammenstellungen Nr. 7 und 8

Zusammenstellung Nr. 7.
Wirksame Werte der Papierhohlraumkabel ohne erhöhte Selbstinduktion.

	Gleichstromwiderstand R Ω/km	Kreisfrequenz ω	Wirksamer Widerstand W Ω/km	Selbstinduktion L H/km	Kapazität C Mf/km	Ableitung A S/km 10^{-6}	Charakteristik $Ze^{i\varphi}$	Spez. Dämpfung β	Wellenlängenkonstante α	Verzerrung $\beta_{7000} - \beta_{3030} = \Delta$
Kabel ϕ 2 mm	10,8	3030	11,04	0,00059	0,0426	0,5	293 (— 40° 17′)	0,0248	0,0290	0,0089
		5000	11,04	0,00059	0,0426	0,85	232 (— 37° 24′)	0,0300	0,0388	
		7000	11,04	0,00059	0,0426	1,20	199 (— 34° 30′)	0,0337	0,0487	
Kabel ϕ 0,8mm	60,2	3030	60,6	0,00073	0,0316	0,4	790 (— 43° 45′)	0,0528	0,05452	0,0256
		5000	60,6	0,00073	0,0316	0,65	626 (— 43° 11′)	0,0678	0,07145	
		7000	60,6	0,00073	0,0316	0,90	524 (— 42° 28′)	0,0784	0,08490	

Zusammenstellung Nr. 8.
Wirksame Werte des Pupinkabels.

	Kreisfrequenz ω	Charakteristik $Ze^{i\varphi}$	Spez. Dämpfung β	Wellenlängenkonstante α	Verzerrung $\beta_{7000} - \beta_{3030}$
Pupinkabel ϕ 2 mm	3030	860 (— 4° 00′)	0,00688	0,0980	0,00106
	5000	870 (— 2° 20′)	0,00734	0,1615	
	7000	1050 (— 1° 20′)	0,00794	0,1909	

geben die wirksamen Werte der gewöhnlichen und des Pupinkabels an. Sie sind durch Messung mit der Frankeschen Maschine an verlegten Leitungen gewonnen. Ein Krarupkabel von 2 mm ϕ mit doppelter Eisendrahtumspinnung stand nicht zur Verfügung. Nach Messungen von Petritsch[1]) besitzt ein derartiges Kabel etwa folgende Werte:

[1]) E. u. M. 1915, S. 447.



$\mathfrak{Z} = 495(-6^0 03')$ $\alpha = 0{,}10480$
$\beta = 0{,}01187$ $\Delta = 0{,}00140$ (siehe Zusammenstellung Nr. 1).

α) Wirkungsgrad abhängig von der Länge. Der maximale Wirkungsgrad dieser Kabel und der Wert von $\eta_Z = e^{-2\beta l}$ bei Längen bis zu 30 km ist auf Abb. 7 angegeben. Abb. 8 zeigt den Wert $\beta l'_{max}$ abgeleitet aus der Beziehung $\eta_{max} = e^{-2\beta l'_{max}}$ für die gleichen Kabel. Zusammenstellung Nr. 9 enthält die Werte der Belastung, welche zur Erzeugung des Höchstwirkungsgrades notwendig sind. Sie geben, wie bei den Freileitungen, gleichzeitig den Scheinwiderstand am Leitungsanfang an, wenn das Vorzeichen der Phase gewechselt wird.

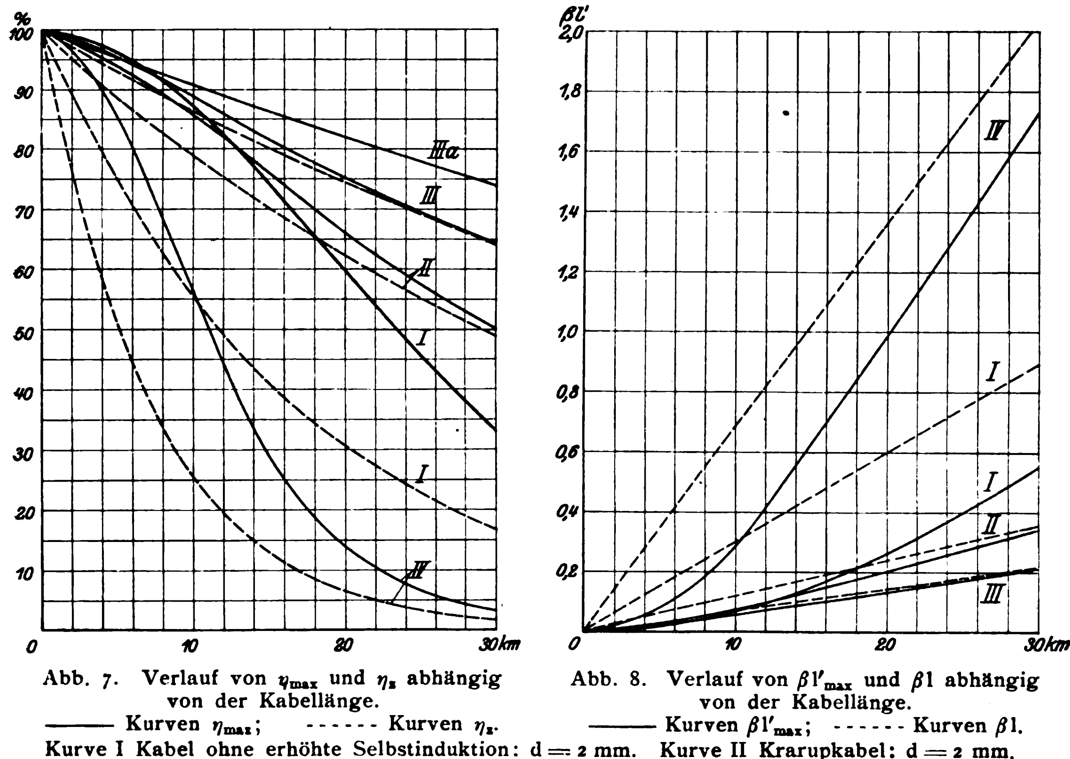


Abb. 7. Verlauf von η_{max} und η_z abhängig von der Kabellänge.

Abb. 8. Verlauf von $\beta l'_{max}$ und βl abhängig von der Kabellänge.

——— Kurven η_{max}; - - - - - - Kurven η_z. ——— Kurven $\beta l'_{max}$; - - - - - - Kurven βl.

Kurve I Kabel ohne erhöhte Selbstinduktion: d = 2 mm. Kurve II Krarupkabel: d = 2 mm.
Kurve III u. IIIa Pupinkabel: d = 2 mm. Kurve IV Kabel ohne erhöhte Selbstinduktion: d = 0,8 mm

Zusammenstellung Nr. 9.

Werte der Belastung am Leitungsende, bei welcher der Wirkungsgrad der Leitung seinen Höchstwert (η_{max}) erreicht.

Länge km	Gewöhnliches Kabel 2 mm ϕ	Krarupkabel 2 mm ϕ	Pupinkabel 2 mm ϕ	Gewöhnliches Kabel 0,8 mm ϕ
1,52	3610 (+ 34° 38′)	2572 (+ 23° 20′)	3220 (+ 25° 06′)	5480 (+ 41° 10′)
3,06	2450 (+ 48° 50′)	1892 (+ 36° 28′)	2342 (+ 38° 40′)	3360 (+ 53° 30′)
5,00	1570 (+ 56° 12′)	1378 (+ 45° 05′)	1453 (+ 43° 15′)	2140 (+ 57° 10′)
7,50	1130 (+ 61° 40′)	979 (+ 47° 50′)	1116 (+ 42° 05′)	1452 (+ 58° 12′)
11,00	800 (+ 61° 10′)	674 (+ 45° 50′)	787 (+ 29° 04′)	1009 (+ 57° 50′)
15,00	550 (+ 59° 20′)	494 (+ 38° 08′)	724 (+ 9° 40′)	760 (+ 55° 08′)
19,00	420 (+ 58° 00′)	417 (+ 23° 58′)	852 (+ 0° 26′)	663 (+ 52° 00′)
22,50	367 (+ 57° 20′)	409 (+ 12° 40′)	961 (+ 3° 28′)	623 (+ 48° 48′)
26,00	360 (+ 55° 20′)	439 (+ 4° 51′)	951 (+ 9° 36′)	608 (+ 46° 00′)
30,00	283 (+ 53° 10′)	496 (+ 2° 05′)	847 (+ 11° 18′)	608 (+ 43° 57′)

Bemerkenswert ist, daß erst bei einer Länge von 7 km das Pupinkabel einen größeren Höchstwirkungsgrad aufweist als das gewöhnliche, das Krarupkabel erst bei 12 km.

An und für sich tritt durch den Einbau der Spulen auf alle Fälle eine Verbesserung des Wirkungsgrades ein. Sie kann sich aber erst bemerkbar machen, wenn die Vergrößerung erheblicher ist als die Verminderung durch den unvermeidlichen Energieverbrauch der Spule selbst. Dieser Verlust in der Spule ist abhängig von den Zeitkonstanten. Deren Größe ist daher von maßgebendem Einfluß nicht nur auf die Größe der spez. Dämpfung der mit den Spulen ausgerüsteten Leitung, sondern auch auf die mindeste Länge, bei der der Einbau der Spulen noch praktischen Wert hat.

Der Unterschied zwischen η_{max} und η_Z bzw. $\beta l'$ und βl ist am größten bei den gewöhnlichen Kabeln; er verschwindet ganz, wenn die Leitung auf den geringsten Wert ihrer spez. Dämpfung pupinisiert ist, so daß ihre Phase 0^0 wird. Zum Vergleich ist auf Abb. 7, Kurve IIIa der Höchstwirkungsgrad für ein derartig mit Selbstinduktion belastetes Kabel angegeben. Als wirksame Werte des Kabels wurden angenommen:

$$\mathfrak{Z} = 2200\,(0^0); \quad \beta = 0{,}005.$$

Sie ändern sich natürlich mit der Zeitkonstanten der Spulen.

β) Wirkungsgrad abhängig von der Belastung. Für das gewöhnliche Kabel von 2 mm ϕ und 5 km Länge ist auf Abb. 9 der Verlauf von η und $\beta l'$ abhängig von dem Wert der Amplitude der Belastung gezeichnet. Die Phase ist gleichbleibend angenommen. Sie beträgt bei Kurve I $+56^0 12'$, bei Kurve II $-37^0 23'$; Kurve I enthält dementsprechend den Höchstwirkungsgrad, Kurve II den Wirkungsgrad, wenn der Scheinwiderstand der Belastung der Charakteristik der Leitung gleich ist. Er liegt weit unterhalb des Höchstwirkungsgrades. Während also bei den Freileitungen und den Kabeln mit erhöhter Selbstinduktion der Dämpfungsexponent nahezu die größte Leistungsfähigkeit der Leitung angibt, bestimmt er hier nur einen Mittelwert, der je nach der Belastung über- oder unterschritten wird. Beide Kurven umschließen etwa den Belastungsbereich, der praktisch in Frage kommt.

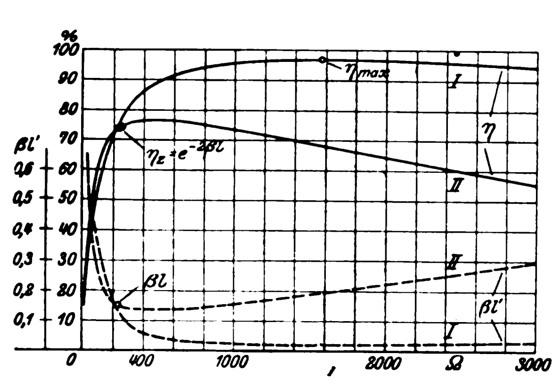


Abb. 9. Verlauf des Wirkungsgrades und der Werte von $\beta l'$ abhängig von dem Scheinwiderstand der Belastung bei einem gew. Kabel von 5 km L. u. 2 mm ϕ.
Kurve I Phase der Belastung $+56^0 12'$.
" II " " " $-37^0 24'$.

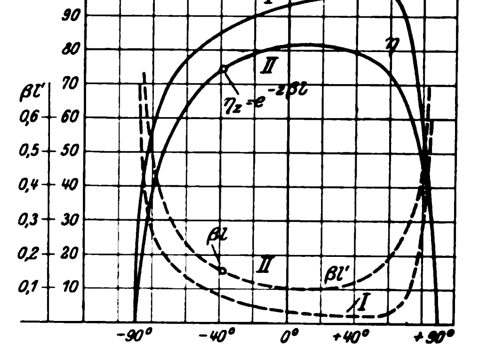


Abb. 10. Verlauf des Wirkungsgrades und der Werte von $\beta l'$ abhängig von dem Scheinwiderstand der Belastung.
Kurve I: Amplitude der Belastung = 1570 Ω.
" II: " " " = 232,2 Ω.

Abb. 10 zeigt den Verlauf von η und $\beta l'$ bei gleichbleibenden Werten der Amplitude (1570 Ω bei Kurve I; 232,2 Ω bei Kurve II). Die Kurven enthalten wieder dieselben Punkte wie oben.

Schließlich soll noch die Größe des Wirkungsgrades festgestellt werden, wenn die verschiedenen Kabel unmittelbar an eine Freileitung ohne und mit Spulen angeschlossen sind. (Abb. 11 und 12.) Die Scheinwiderstände am Kabelanfang sind auf Tabelle 10 zusammengestellt. Der Wirkungsgrad des Pupinkabels ist bei Anschluß an die gewöhnliche Leitung von $3^1/_2$ km Länge ab dem des gewöhnlichen Kabels überlegen, bei Verbindung mit der Spulenleitung von $4^1/_2$ km ab. Beim Krarupkabel liegen die Grenzen bei 5 km und 7 km.



Die Kurven sind für den Fall aufgestellt, daß der Dämpfungsexponent der Freileitung $\beta l = 1{,}3$ beträgt und sie am Ende so belastet ist, daß sie mit ihrem Höchstwirkungsgrad arbeitet. Die Werte für den Wirkungsgrad der Kabel würden sich indessen bei anderen Werten der Belastung am Ende der Freileitung nicht wesentlich ändern.

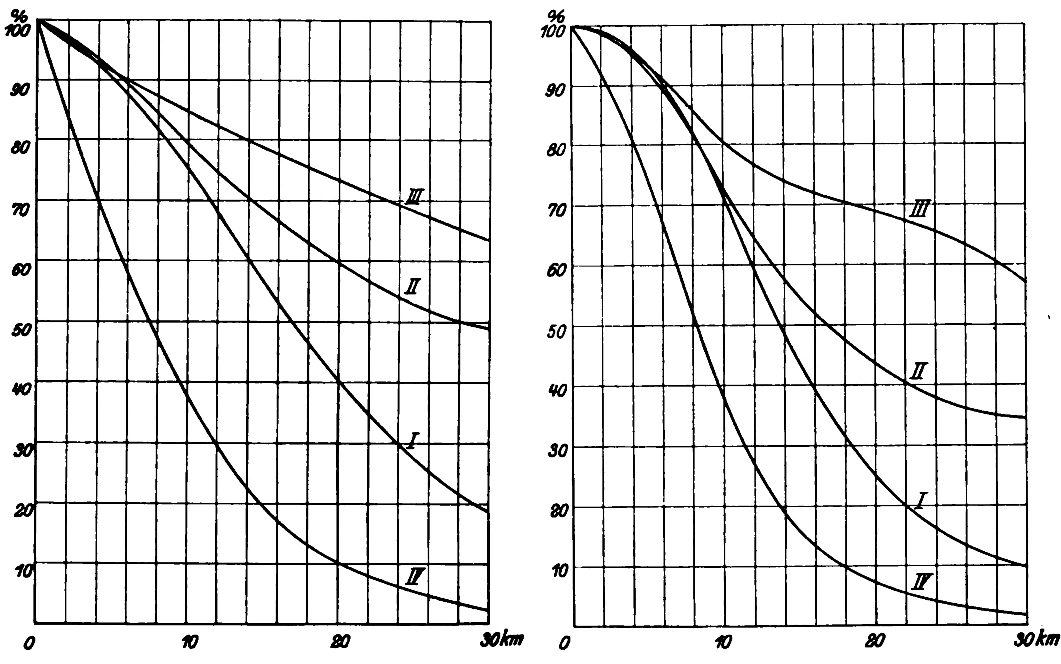


Abb. 11. Wirkungsgrad der Kabel bei Anschluß an eine Freileitung ohne Spulen. (Bedeutung der Ziffern wie auf Abb. 7 und 8.)

Abb. 12. Wirkungsgrad der Kabel bei Anschluß an eine Freileitung mit Spulen. (Ziffern wie auf Abb. 7, 8 und 11.)

Zusammenstellung Nr. 10.

Scheinwiderstände am Kabelanfang bei Anschluß der Kabel an die Freileitung mit und ohne Spulen.

Länge	Kabel verbunden mit Pupinfreileitung 3 mm ϕ				Kabel verbunden mit gewöhnlicher Freileitung 3 mm ϕ			
km	gew. Kabel 2 mm ϕ	Krarupkabel 2 mm ϕ	Pupinkabel 2 mm ϕ	gew. Kabel 0,8 mm ϕ	gew. Kabel 2 mm ϕ	Krarupkabel 2 mm ϕ	Pupinkabel 2 mm ϕ	gew. Kabel 0,8 mm ϕ
1,52	1520 (−43°30′)	1640 (−36°32′)	1685 (−29°03′)	1820 (−30°55′)	678 (−21°36′)	668 (−16°12′)	679 (− 3°20′)	765 (−17°40′)
3,06	1180 (−55°18′)	1151 (−51°56′)	1220 (−41°00′)	1486 (−45°48′)	624 (−31°15′)	615 (−20°33′)	696 (+ 3°20′)	789 (−25°)
5,0	840 (−65°18′)	770 (−58°41′)	809 (−43°03′)	1145 (−56°00′)	568 (−40°33′)	546 (−23°30′)	722 (+13°39′)	798 (−32°50′)
7,5	600 (−70°50′)	496 (−59°41′)	496 (−28°40′)	878 (−58°20′)	474 (−49°03′)	465 (−23°27′)	924 (+10°03′)	769 (−39°15′)
11,0	428 (−72°30′)	280 (−46°36′)	475 (+18°00′)	693 (−57°45′)	384 (−55°00′)	397 (−15°20′)	1079 (−0°20′)	714 (−45°)
15,0	322 (−70°50′)	202 (− 3°50′)	980 (+33°10′)	603 (−51°40′)	314 (−56°50′)	387 (− 3°18′)	940 (−11°57′)	659 (−46°30′)
19,0	260 (−66°27′)	315 (+27°56′)	1638 (+ 0°27′)	588 (−46°33′)	268 (−55°53′)	443 (+ 5°06′)	752 (− 9°40′)	631 (−45°50′)
22,5	224 (−61°53′)	510 (+33°30′)	1140 (−31°27′)	571 (−42°40′)	242 (−54°12′)	516 (+ 5°42′)	738 (+ 2°00′)	572 (−42°40′)
26,0	208 (−56°12′)	772 (+21°46′)	639 (−28°03′)	596 (−41°12′)	226 (−50°48′)	579 (+ 0°30′)	865 (+ 7°27′)	593 (−41°03′)
30,0	202 (−49°53′)	936 (− 6°50′)	526 (+ 9°27′)	618 (−41°12′)	216 (−47°00′)	587 (− 8°27′)	1021 (−0°21′)	618 (−41°08′)

Aus der Zusammenstellung Nr. 10 ist ersichtlich, daß die Scheinwiderstände am Leitungsanfang bei den einzelnen Kabelarten ziemlich verschieden sind, wenn die Leitungslänge etwa 3 km überschreitet. Das ist auf die Leistung am Anfang von Einfluß. Bei Längen unter 3 km ist dieser Unterschied unbeträchtlich, so daß der Wirkungsgrad allein einen ungefähren Überblick über die Leistungsfähigkeit der Leitung gibt.

3. Die Leistung.

a) Bestimmung der Leistung.

Bezeichnet $\mathfrak{E}_0$ die EMK des Mikrophons; R_m den Scheinwiderstand des Mikrophons; $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{J}_a$, $\mathfrak{R}_a$ Spannung, Stromstärke und Scheinwiderstand am Anfang der Leitung, so bestehen die Gleichungen:

$$\mathfrak{J}_a = \frac{\mathfrak{E}_0}{R_m + \mathfrak{R}_a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 39)$$

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{E}_0 - R_m \mathfrak{J}_a = \mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{J}_a \quad \ldots \ldots \ldots \quad 40)$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich auf graphischem Wege die Größe der in den Gebeapparat fließenden Leistung leicht feststellen.

Wir wählen J_a als Ausgang der Phasenzählung und setzen zunächst $J_a = 1$. Die EMK, welche die Stromstärke 1 erzeugt, wir bezeichnen ihre Amplitude mit E_0', ergibt sich durch graphische Addition von R_m und $\mathfrak{R}_a$.

Ist die tatsächliche EMK des Mikrophons E_0, so ist $J_a = \frac{E_0}{E_0'}$.

Außerdem ist $\frac{V_a}{J_a} = R_a$, so daß sich für die Leistung ergibt:

$$A_0 = V_a \cdot J_a \cdot \cos \varphi_a = J_a^2 \cdot R_a \cdot \cos \varphi_a$$

$$= \frac{E_0^2 \cdot R_a \cdot \cos \varphi_a}{E_0'^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 41)$$

In den Arbeiten, welche sich mit ähnlichen Untersuchungen befassen, erscheint der Gebeapparat meist als einfache Impedanz[1]). Abgesehen davon, daß dies beim Z-B-Apparat wegen des durch den Wecker gehenden Stromes eine kleine Ungenauigkeit in die Rechnung bringt, hat die Annahme einer einfachen Impedanz beim O-B-Apparat den Nachteil, daß nicht die wirkliche EMK des Mikrophons, sondern die in der Sekundärwicklung der Induktionsspule induzierte in die Rechnung eingeführt werden muß. Um dies zu vermeiden und um gleichzeitig einen Einblick in den Wirkungsgrad der Apparate bei den verschiedenen Belastungen zu gewinnen, wird im folgenden der Gebeapparat von den Klemmen des Mikrophons ab und der Empfangsapparat bis an die Klemmen des Hörers zur Leitung gerechnet, so daß als Geber im eigentlichen Sinn nur das Mikrophon und als Empfänger nur der Hörer zählt.

Die Scheinwiderstände und Wirkungsgrade der Leitungen sind durch Rechnung, die der Apparate und Übertrager durch Messung ermittelt (Gl. 17).

b) Die EMK des Mikrophons.

Zur Bestimmung der Leistung ist die Kenntnis der EMK des Mikrophons notwendig, wie aus den Gleichungen Nr. 39 und 40 hervorgeht. Gewöhnlich wird diese als unabhängig von der Belastung angenommen. Dies ist jedoch, wie Versuche gezeigt haben, nur beim O-B-Mikrophon innerhalb des engen Belastungsbereichs, der für dieses in Betracht kommt, zulässig.

Bei den großen Übersetzungsverhältnissen der Induktionsspulen hat auch eine erhebliche Änderung der Belastung auf der Sekundärseite nur verhältnismäßig wenig Einfluß auf den Scheinwiderstand der Primärseite. Wurde z. B. bei dem untersuchten O-B-Apparat die sekundäre Belastung zwischen 200 und 2000 Ω, also um den zehnfachen Betrag geändert, so änderte sich der Scheinwiderstand an den Klemmen des Mikrophons (Primärseite) nur zwischen 25 und 50 Ω; innerhalb dieser Grenzen kann die EMK des Mikrophons konstant angenommen werden. Bei den Z-B-Apparaten ist der Bereich der in Betracht kommenden Belastungen wesentlich größer.

[1]) Z. B. Breisig, Theoretische Telegraphie.



Die untersuchten Z-B-Mikrophone zeigten eine beträchtliche Abnahme der EMK mit zunehmendem Scheinwiderstand der Belastung (Abb. 14).

Erst bei Werten von etwa 1000 Ω ab bleibt sie annähernd konstant.

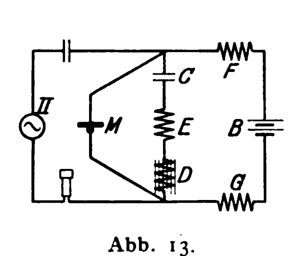


Abb. 13.

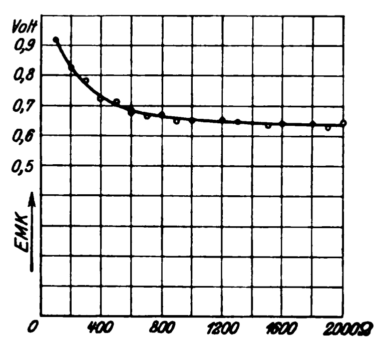


Abb. 14. EMK eines Z-B-Mikrophons abhängig von dem Scheinwiderstand der Belastung.

Bestimmt wurde die EMK mit folgender Versuchsanordnung (Abb. 13):

M = Mikrophon,
B = Batterie,
C = Stufenkondensator,
D = Selbstinduktionsnormale,
E = veränderlicher Widerstand.

Untersucht wurden das:

Z-B-Kohlenpulvermikrophon von S. u. H. (HO), Gleichstromwiderstand im Mittel 150 Ω.

O-B-Kugelmikrophon von Friedrich Reiner in München, Gleichstromwiderstand im Mittel 8 Ω.

Das Mikrophon wurde durch einen Hörer erregt, der vom Anker I der Frankeschen Maschine mit Wechselstrom von der Kreisfrequenz $\omega = 5000$ gespeist wurde.

Die Lautstärke wurde mäßig stark gewählt, und war bei Messung der EMK des Z-B- und des O-B-Mikrophons genau gleich. Es wurden beim Z-B-Mikrophon auch Kurven aufgenommen, bei welchen die Lautstärke größer oder kleiner war als bei Aufnahme der Kurve auf Abb. 14, dementsprechend änderte sich auch die Größe der EMK. Der Verlauf der Kurven war jedoch stets der gleiche wie auf Abb. 14.

Die vom Mikrophon erzeugte Spannung wurde durch den Anker II der Maschine (siehe auch Abb. 3) kompensiert. Dem Anker war ein Sperrkondensator und der Hörer vorgeschaltet. Die Spannung an B betrug 110 V. Die Widerstände F und G wurden so gewählt, daß die Speisestromstärke 30 Milliampere beim Z-B- und 120 Milliampere beim O-B-Mikrophon betrug.

Aus der EMK des Ankers II, die zur Kompensation der Klemmenspannung des Mikrophons notwendig war, wurde mit Hilfe der Gleichung Nr. 40 die EMK der Mikrophons ermittelt.

4. Vergleich der Leitungen unter Berücksichtigung der Leistung am Anfang.

a) Freileitung mit und ohne Spulen.

Zuerst soll die Leistungsfähigkeit der im Teil 2d besprochenen Freileitungen mit und ohne Spulen festgestellt werden, wenn sie unmittelbar mit Z-B- und wenn sie mit O-B-Apparaten in Verbindung stehen. Der Scheinwiderstand eines Z-B-Tischapparates der K. B. Post- und Telegraphenverwaltung beträgt im Mittel 400 ($+ 50^0$), sein Wirkungsgrad als Empfänger $26{,}5\,^0/_0$. Der Scheinwiderstand eines O-B-Tischapparates im Mittel



1955 ($+29^0 30'$); der Wirkungsgrad 18,2%; die Scheinwiderstände der Wandapparate sind etwas niedriger, 320 ($+42^0$), bzw. 1480 ($+31^0$); die Wirkungsgrade sind fast dieselben wie die der Tischapparate. Der Wirkungsgrad der betreffenden Apparate, wenn sie als Geber arbeiten, schwankt mit dem Wechsel der Belastung in weiten Grenzen. Der Z-B-Apparat hat jedoch stets einen höheren Wirkungsgrad als der O-B-Apparat.

In der Zusammenstellung Nr. 11 sind die Wirkungsgrade der Freileitungen und Apparate angegeben. Der Gesamtwirkungsgrad der Verbindung ist bei Anschluß der Z-B-Apparate an die gewöhnliche Freileitung doppelt so groß als bei Anschluß an die mit Spulen ausgerüstete. Außerdem ist auch die Leistung am Anfang infolge des hohen Scheinwiderstandes am Mikrophon nur etwa die Hälfte, so daß die dem Hörer zugeführte Leistung bei der Spulenleitung nur $^1/_4$ der Leistung bei der gewöhnlichen beträgt.

Zusammenstellung Nr. 11.

Vergleich der Freileitung ohne und mit Spulen ($\beta l = 1{,}3$) bei Z-B- und O-B-Betrieb.

		R = 400 (+ 50°)		R = 1955 (+ 29°30′)	
		gewöhnliche Freileitung	Pupinfreileitung	gewöhnliche Freileitung	Pupinfreileitung
EMK des Mikrophons . .	V	0,66	0,63	0,13	0,13
Widerstand des Mikrophons	Ω	150	150	8	8
Scheinwiderstand an den Klemmen des Mikrophons	Ω	855 (− 22° 10′)	1850 (+ 9° 24′)	31,2 (+ 17° 30′)	42,2 (+ 26° 30′)
Leistung an den Klemmen des Mikrophons	W	$352 \cdot 10^{-6}$	$182 \cdot 10^{-6}$	$332 \cdot 10^{-6}$	$260 \cdot 10^{-6}$
Wirkungsgrad des Gebers	%	77,3	86	28,7	45,5
„ der Leitung	%	5,92	3,02	5,98	7,21
„ des Empfängers	%	26,5	26,5	18,2	18,2
Gesamtwirkungsgrad . .	%	1,21	0,69	0,313	0,598
Leistung am Hörer . . .	W	$4{,}26 \cdot 10^{-6}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$1{,}04 \cdot 10^{-6}$	$1{,}56 \cdot 10^{-6}$

Beim Anschluß der O-B-Apparate an die Freileitungen ist es umgekehrt, hier ist die Leistung bei der Spulenleitung größer. Käme es allein auf den Dämpfungsexponenten an, so müßte die Leistung in den 4 Fällen gleich groß sein, denn der Dämpfungsexponent ist stets $\beta l = 1{,}3$.

Aus der Beziehung $\eta = e^{-2\beta l'}$ hatten wir ohne Rücksicht auf den Wert der Leistung am Anfang die Vergleichsgröße $\beta l'$ abgeleitet (Seite 84). Die Berücksichtigung der Leistung am Anfang erfolgt wie nachstehend:

Der Wirkungsgrad der gewöhnlichen Freileitung bei Belastung mit einem O-B-Apparat ist 5,98%; der der Leitung mit Spulen 7,21%; die Leistung am Anfang $332 \cdot 10^{6}$ (W) bei der gewöhnlichen, dagegen nur $260 \cdot 10^{-6}$ (W) bei der Spulenleitung.

Bilden wir für die gewöhnliche Leitung die Beziehung

$$\eta = e^{-2\beta l'},$$

so ergibt sich

$$\beta l' = 1{,}41;$$

der entsprechende Wert für die Spulenleitung ist

$$\eta' = 0{,}0721 \cdot \frac{260}{332} = 0{,}0565,$$

es wird $\beta l' = 1{,}44$ gegen 1,41 bei der gewöhnlichen Leitung, die Leistungsfähigkeit beider ist also nahezu gleich groß. Daß trotzdem die Leistung im Hörer bei der Spulenleitung größer ist, liegt an dem höheren Wirkungsgrad des Gebeapparates.



Diesen Umstand können wir dadurch berücksichtigen, daß wir aus dem Gesamtwirkungsgrad der Verbindung die Beziehung ableiten

$$\eta_g = e^{-2\beta l'_g}.$$

In diesem Fall wird bei der gewöhnlichen Leitung

$$\beta l_g' = 2{,}96,$$

bei der Spulenleitung

$$\beta l_g' = 2{,}69,$$

der Unterschied ist 0,27, er ist immerhin wahrnehmbar. Diese aus der ganzen Verbindung abgeleiteten Werte von $\beta l_g'$ entsprechen in ihrer Bedeutung für die Lautstärke nicht der sonst üblichen Bezeichnung des βl, weil sie ja den Wirkungsgrad der Apparate mit enthalten. Der Übergang zu dem gebräuchlichen Wert ergibt sich sehr einfach:

Gewöhnlich bezeichnet man eine Verbindung als gut, wenn der Dämpfungsexponent der Leitung allein den Wert $\beta l = 2{,}0$ nicht überschreitet. Rechnen wir für den Empfänger (O-B) 18,2% Wirkungsgrad, für den Geber 28,7%, so darf der Gesamtwirkungsgrad der ganzen Verbindung einschließlich der Wirkungsgrade der Apparate

$$\eta = 0{,}000955$$

betragen, wenn die Verbindung als gut bezeichnet werden soll. Dies entspricht einem

$$\beta l_g' = 3{,}45 \sim 3{,}5,$$

Davon entfällt $\beta l = 2{,}0$ auf die Leitung und $\beta l = 1{,}50$ auf die Apparate. Bemerkenswert ist der erhebliche Anteil der Verluste in den Apparaten an den gesamten Verlusten. Nehmen wir weiter für die Leistung am Anfang einen mittleren Wert an, etwa $350 \cdot 10^{-6}$ Watt, so ergibt sich als roher Mittelwert für die Leistung, welche dem Hörer zur Erzielung einer guten Sprechverständigung zugeführt werden muß, zu

$$350 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}000955 = 0{,}33 \cdot 10^{-6} \text{ Watt.}$$

Der Hörer am O-B-Tischapparat besitzt einen Scheinwiderstand

$$405\,(+44^0),$$

die Stromstärke im Hörer wird in diesem Fall 0,033 Milliampere.

Ist das Verhalten der Leitungen zu prüfen, wenn sie einmal mit Z-B-, das andere Mal mit O-B-Apparaten in Verbindung stehen, so fällt der Vergleich folgendermaßen aus:

1. Gewöhnliche Leitung mit Z-B-Apparaten

$$\eta_g = 1{,}21\,\%; \quad \beta l_g' = 2{,}20,$$

mit O-B-Apparaten

$$\eta_g = 0{,}313\,\%; \quad \eta'_g = 0{,}313 \cdot \frac{332}{353} = 0{,}296\,\%; \quad \beta l_g' = 2{,}92;$$

2. Pupinleitung mit Z-B-Apparaten

$$\eta_g = 0{,}69\,\%; \quad \beta l_g' = 2{,}49,$$

mit O-B-Apparaten

$$\eta_g = 0{,}598\,\%; \quad \eta'_g = 0{,}598 \cdot \frac{260}{182} = 0{,}853\,\%; \quad \beta l_g' = 2{,}38.$$

Die Leistungsfähigkeit der gewöhnlichen Leitung ist bei Z-B-Apparaten um $\beta l_g' = 0{,}72$ geringer als bei O-B-Apparaten, die der Spulenleitung um 0,11 größer.

Die Vergleiche können in der verschiedensten Weise durchgeführt werden, je nach dem Zweck, den sie verfolgen.

b) Unsymmetrische Leitung.

Weiter soll der Fall untersucht werden, daß die Fernleitung an dem einen Ende in einer Kabelstrecke endigt.



Die Wirkungsgrade der einzelnen Teile der Verbindung und die Leistung am Anfang sind verschieden, je nach der Richtung, in welcher gesprochen wird. Dies ist um so mehr der Fall, je verschiedener die Charakteristik der zusammengeschalteten Leitungen ist. Die Zusammenstellung Nr. 12 gibt die Wirkungsgrade und Leistungen für den Fall an, daß der mehrfach besprochenen Spulenleitung $[Z = 2045\,(-6^0\,33')]$ an einem Ende ein gewöhnliches Kabel von 15 km Länge und 2 mm ϕ $[Z = 232\,(-37^0\,24')]$ vorgeschaltet ist. Unter der Voraussetzung gleicher EMK des Mikrophons und gleichen Scheinwiderstandes von Gebe- und Empfangsapparat muß trotz der Verschiedenheit der Wirkungsgrade die Leistung im Hörer die gleiche sein, ob in der einen oder der anderen Richtung gesprochen wird. Dies wurde von Franke in seiner Dissertation[1]) und von Breisig[2]) abgeleitet. Bei Verwendung von O-B-Apparaten stimmt dies genau, bei Z-B-Apparaten wegen der Verschiedenheit der EMK des Mikrophons aber nicht. Ein geringer Unterschied tritt auch durch den Umstand ein, daß der Scheinwiderstand eines Z-B-Apparates, wenn er als Geber arbeitet, nicht genau konstant angenommen werden kann.

Zusammenstellung Nr. 12.

Vergleich einer aus Freileitung und Kabel zusammengesetzten unsymmetrischen Leitung bei Z-B- und O-B-Betrieb.

Freileitung: $\beta l = 1{,}3$; Länge 650 km; d = 3 mm; mit Spulen.

Kabel: $\beta l = 0{,}45$; Länge 15 km; d = 2 mm; ohne erhöhte Selbstinduktion.

		R = 400 (+ 50⁰)		R = 1955 (+ 29⁰30′)	
		Empfänger angeschlossen		Empfänger angeschlossen	
		an der Freileitg.	am Kabel	an der Freileitg.	am Kabel
EMK des Mikrophons	V	0,82	0,63	0,13	0,13
Leistung am Mikrophon	W	$1065 \cdot 10^{-6}$	$181 \cdot 10^{-6}$	$395 \cdot 10^{-6}$	$270 \cdot 10^{-6}$
Scheinwiderstand am Mikrophon	Ω	235 (+ 1⁰56′)	1882 (+ 4⁰40′)	23,9 (+ 7⁰20′)	41,4 (+ 23⁰06′)
Wirkungsgrad des Gebers	%	47,8	87,7	6,09	44,8
Wirkungsgrad der Freileitung	%	3,02	3,87	7,21	1,29
Wirkungsgrad des Kabels	%	47,3	71,4	45,1	50,6
Wirkungsgrad der ganzen Leitung	%	1,429	2,760	3,250	0,653
Wirkungsgrad des Empfängers	%	26,5	26,5	18,2	18,2
Gesamtwirkungsgrad	%	0,181	0,641	0,0360	0,0532
Leistung am Hörer	W	$1{,}93 \cdot 10^{-6}$	$1{,}16 \cdot 10^{-6}$	$0{,}142 \cdot 10^{-6}$	$0{,}143 \cdot 10^{-6}$
$\beta l_g'$ der ganzen Verbindung		3,16	3,42	4,47	4,47

Durch den Unterschied in der EMK des Mikrophons wird erreicht, daß der Teilnehmer am Freileitungsende besser hört als der am Kabelende, ein Umstand, der in der Praxis mehrfach beobachtet wurde. Der Wert $\beta l_g'$ ist für beide Richtungen verschieden, der Unterschied beträgt 0,26, ist also durchaus wahrnehmbar; möglicherweise ist er bei anderen Mikrophonkonstruktionen größer. Bei O-B-Betrieb ist $\beta l_g'$ in beiden Richtungen gleich groß, die Sprechverständigung ist aber schlechter als beim Betrieb mit Z-B-Apparaten.

[1]) A. Franke, ETZ 1891, S. 461.

[2]) Breisig, Theor. Telegraphie. S. 295 ff.

c) Vollständige Schaltungen.

Die Reihenfolge der Teile, aus denen sich die ganze Verbindung zusammensetzt, ist aus Zusammenstellung Nr. 13 zu entnehmen. Die aufgeführten Übertrager[1]) sind nur beim Z-B-System eingebaut gedacht.

Zusammenstellung Nr. 13.
Teile der vollständigen Verbindung.

Nr.	Bezeichnung		ϕ mm	Länge km
1		Gebeapparat		
2	A	Kabel zwischen Teilnehmer und Ortsamt	0,8	1,52
3	I	Übertrager im Ortsamt des Gebers		
4	B	Kabel zwischen Ortsamt und Fernleitung	2	15
5	C	Fernleitung	3	349
6	D	Kabel zwischen Fernleitung und Ortsamt	2	15
7	II	Übertrager im Ortsamt des Empfängers		
8	E	Kabel zwischen Ortsamt und Teilnehmer	0,8	1,52
9		Empfangsapparat		

Die Untersuchung ist durchgeführt einmal für den Fall, daß die Kabel B und D keine Spulen enthalten, und das andere Mal, daß sie mit Spulen ausgerüstet sind. Die wirksamen Werte der verwendeten Leitungen sind dieselben wie auf den Zusammenstellungen Nr. 3, 7 und 8. Das Ergebnis zeigt Zusammenstellung Nr. 14. Der Gewinn an Lautstärke durch Verwendung der Pupinkabel an Stelle der gewöhnlichen ist bei Verwendung der O-B-Apparate sehr beträchtlich, die dem Hörer zugeführte Leistung ist etwa 17 mal so groß, der Dämpfungsexponent $\beta l_g'$ der ganzen Verbindung ist nur 3,26 gegen 4,69; Unterschied $\beta l_g' = 1{,}43$. Beim Z-B-System ist der Gewinn wesentlich geringer. Die Leistung am Hörer ist bei Anwendung des Pupinkabels nur etwa $4^1/_2$ mal so groß, der Wert $\beta l_g'$ nur um 0,74 geringer.

Zusammenstellung Nr. 14.
Vergleich einer vollständigen Verbindung bei Z-B- und O-B-Betrieb und teilweiser Verwendung von Kabeln mit und ohne Spulen.

		R = 400 (+ 50°)		R = 1955 (+ 29°30′)	
		Kabel B und D			
		ohne Spulen	mit Spulen	ohne Spulen	mit Spulen
EMK des Mikrophons	V	0,73	0,65	0,13	0,13
Leistung am Mikrophon	W	$590 \cdot 10^{-6}$	$308 \cdot 10^{-6}$	$380 \cdot 10^{-6}$	$325 \cdot 10^{-6}$
Scheinwiderstand am Mikrophon	Ω	524 (+ 20°10′)	1034 (+ 10°38′)	25,4 (+ 10°15′)	32,8 (+ 14°46′)
Wirkungsgrad des Gebers	%	73,5	84,1	12,6	32,1
" des Kabels A	%	75,4	89,8	61,6	78,4
" des Übertragers I	%	49,1	81,9	—	—
" des Kabels B	%	49	79,5	54,5	80
" der Fernleitung	%	4,91	7,4	2,62	7,08
" des Kabels D	%	51,6	78,2	43,4	70,9
" des Übertragers II	%	63,8	63,8	—	—
" des Kabels E	%	74,6	74,6	95,5	95,5
" des Empfängers	%	26,5	26,5	18,2	18,2
Gesamtwirkungsgrad	%	$42{,}6 \cdot 10^{-3}$	$359 \cdot 10^{-3}$	$8{,}63 \cdot 10^{-3}$	$175 \cdot 10^{-3}$
Leistung am Hörer		$0{,}252 \cdot 10^{-6}$	$1{,}10 \cdot 10^{-6}$	$0{,}033 \cdot 10^{-6}$	$0{,}57 \cdot 10^{-6}$
$\beta l_g'$		3,88	3,14	4,69	3,26

Zu berücksichtigen ist dabei, daß die Kabel B und D ziemlich lang sind (je 15 km). Je geringer die Länge wird, um so mehr sinkt der Vorteil, den die Ausrüstung der

[1]) Zwietusch-Übertrager. Gleichstromwiderstand: primär 80 Ω, sekundär 80 Ω. Charakteristik: primär 858 (+ 50° 47′), sekundär 1210 (+ 71° 04′).

Kabel mit Spulen bringt, hauptsächlich deshalb, weil sich der Wirkungsgrad des Pupinkabels dem des gewöhnlichen immer mehr nähert. Bei einer ganz bestimmten Länge ist die Lautstärke bei Verwendung beider Kabelarten gleich groß, unterhalb dieser Länge hat es mit Rücksicht auf die Lautstärke keinen Zweck mehr, die Kabel in der angegebenen Weise (nach Zusammenstellung Nr. 8) mit Spulen auszurüsten.

Im Rahmen der besprochenen Schaltung liegt diese Grenze beim Z-B-Betrieb bei etwas über 5 km, bei O-B-Apparaten etwas unterhalb. Sie wurde für diesen Fall nicht genau festgestellt, dürfte jedoch bei 3 km liegen.

Auf der Zusammenstellung Nr. 15 sind die Ergebnisse für 15 und 5 km Kabellänge gegenübergestellt.

Zusammenstellung Nr. 15.

Derselbe Vergleich wie auf Zusammenstellung Nr. 14 für zwei verschiedene Kabellängen.

Länge der Kabel B und D je	Ausführung der Kabel B und D	$R = 400\ (+50^0)$			$R = 1955\ (+29^0 30')$		
		Gesamtwirkungsgrad	Leistung		Gesamtwirkungsgrad	Leistung	
			an den Klemmen des Mikrophons	an den Klemmen des Hörers		an den Klemmen des Mikrophons	an den Klemmen des Hörers
km		%	W	W	%	W	W
15	ohne Spulen .	$42,6 \cdot 10^{-3}$	$590 \cdot 10^{-6}$	$0,252 \cdot 10^{-6}$	$8,63 \cdot 10^{-3}$	$380 \cdot 10^{-6}$	$0,033 \cdot 10^{-6}$
	mit Spulen . .	$359 \cdot 10^{-3}$	$308 \cdot 10^{-6}$	$1,10 \cdot 10^{-6}$	$175 \cdot 10^{-3}$	$325 \cdot 10^{-6}$	$0,57 \cdot 10^{-6}$
5	ohne Spulen .	$328 \cdot 10^{-3}$	$460 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-6}$	$57,1 \cdot 10^{-3}$	$370 \cdot 10^{-6}$	$0,21 \cdot 10^{-6}$
	mit Spulen . .	$368 \cdot 10^{-3}$	$300 \cdot 10^{-6}$	$1,11 \cdot 10^{-6}$	$207 \cdot 10^{-3}$	$328 \cdot 10^{-6}$	$0,68 \cdot 10^{-6}$

Die Mindestlänge, bei welcher die Belastung mit Selbstinduktion eine Erhöhung der Lautstärke zu bemerken vermag, hängt naturgemäß ab von der Höhe der Belastung mit Selbstinduktion und von dem Scheinwiderstand der Apparate und Übertrager. Sie liegt im Mittel bei dem Wert eines Spulenabstandes, so daß Pupinleitungen mit nur einer Spule praktisch nicht in Frage kommen. Bei diesen Längen vermag aber auch die Umspinnung mit Eisendraht keine Vergrößerung der Lautstärke hervorzurufen, wie aus den entsprechenden Kurven auf Abb. 10, 11 und 12 hervorgeht. Bemerkt sei noch, daß die Reichstelegraphenverwaltung[1]) 5 km als Mindestlänge für die Anwendung von Pupinkabeln ansieht. Als Vorzug der belasteten Kabel bleibt dann ihre kleinere Verzerrung. Bei dem geringen Einfluß, den die Verzerrung eines so kurzen Stückes auf die Gesamtverzerrung der ganzen Verbindung auszuüben vermag, ist dieser sicher nicht groß genug, um die erheblichen Kosten für die Belastung zu rechtfertigen.

Spielt die Verzerrung eine große Rolle, wie dies bei Leitungen mit Fernsprechverstärkern der Fall ist, so kann eine Belastung mit Selbstinduktion auch bei sehr geringen Längen in Frage kommen.

Bevor jedoch hierüber etwas Bestimmtes ausgesagt werden kann, muß die weitere Entwicklung der Fernsprechverstärker abgewartet werden.

Zusammenfassung des Inhalts.

Die Untersuchungen gehen davon aus, daß die Leistungsfähigkeit (auch Sprechfähigkeit genannt) einer Fernsprechleitung in erster Linie durch die Lautstärke und in zweiter Linie durch die Verzerrung bedingt wird; der Einfluß der Verzerrung wird in der Arbeit schätzungsweise berücksichtigt. Die Lautstärke wird bestimmt durch die Größe der dem Hörer zugeführten Leistung. Diese ist abhängig von der Leistung am Anfang und dem Wirkungsgrad der Leitung. Der Wirkungsgrad wird am ein-

[1]) Mitteilungen des Reichstelegraphenversuchsamts Nr. VII, 1914, S. 27.



fachsten in der zuerst von Rößler für Starkstromleitungen angegebenen Weise mit Hilfe des Vektordiagramms ermittelt. Die Gleichungen werden den Zwecken der Fernsprechtechnik angepaßt und ein einfacher Weg zur genauen Berechnung der drei notwendigen Leitungsgrößen: Leerlaufwiderstand, Kurzschlußwiderstand und Dämpfungsfaktor (auch Kabelfaktor genannt) angegeben. Außerdem wird gezeigt, wie der Wirkungsgrad bestehender Leitungen unmittelbar mit der Frankeschen Maschine gemessen werden kann.

Die entwickelten Gleichungen werden dann auf die Bestimmung des Wirkungsgrades von Freileitungen und Kabeln abhängig von der Länge und von dem Scheinwiderstand der Belastung angewendet. Besondere Beachtung wird folgenden zwei Werten des Wirkungsgrades geschenkt:

1. Dem Höchstwirkungsgrad (η_{max}). Er wird meist bei Belastungen erreicht, die weit über dem Wert der Charakteristik der Leitung liegen. Die Phase der Belastung muß stets positiv sein. Bei langen Leitungen wird ihr Wert gleich der Charakteristik, aber mit umgekehrten Vorzeichen der Phase.

2. Dem Wirkungsgrad der Leitung, wenn der Scheinwiderstand der Belastung gleich der Charakteristik ist. Es wird gezeigt, daß in diesem Fall zwischen dem Wirkungsgrad (η_Z) und dem Dämpfungsexponenten die Beziehung besteht $\eta_Z = e^{-2\beta l}$. Im Anschluß an diese Gleichung wird aus jedem Wert des Wirkungsgrades eine Größe $\beta l'$ abgeleitet. Die Einführung dieser Größe $\beta l'$ bringt verschiedene Vorteile mit sich.

Bei Freileitungen ohne und mit Spulen sowie bei Kabeln mit erhöhter Selbstinduktion stimmen die Werte $\eta_{max} = e^{-2\beta l'_{max}}$ und $\eta_Z = e^{-2\beta l}$ nahezu überein. βl gibt also — ohne Berücksichtigung der Leistung am Anfang — die höchste Leistungsfähigkeit der Leitung an. Bei gewöhnlichen Kabeln ist dies nicht der Fall. Hier bestimmt βl nur einen Mittelwert, der je nach dem Scheinwiderstand der Belastung über- oder unterschritten wird. Deshalb können bei geringen Längen gewöhnliche Kabel und Kabel mit erhöhter Selbstinduktion auf Grund des Dämpfungsexponenten nicht miteinander verglichen werden. Der Dämpfungsexponent gibt für die gewöhnlichen Kabel ein zu ungünstiges Bild. Durch geeignete Wahl des Scheinwiderstandes der Belastung läßt sich der Wirkungsgrad erheblich über den durch βl bestimmten Wert (η_Z) steigern. Innerhalb gewisser Grenzen wird also dieselbe Wirkung erzielt wie durch die künstliche Belastung mit Selbstinduktion, nämlich eine Erhöhung des Wirkungsgrades.

Hierauf folgt die Untersuchung verschiedener Verbindungen unter Berücksichtigung der Leistung am Anfang. Die Ermittlung der Leistung aus der EMK und dem Widerstand des Mikrophons sowie dem Scheinwiderstand der Belastung wird angegeben. Die EMK des Mikrophons wird durch Versuche bestimmt. Sie nimmt beim Z-B-Mikrophon mit steigendem Scheinwiderstand der Belastung erst schnell und dann langsamer ab. Beim Vergleich einer Freileitung mit und ohne Spulen und gleichem Dämpfungsexponenten ($\beta l = 1{,}3$) zeigt sich, daß beim Z-B-Betrieb die gewöhnliche Leitung überlegen ist, beim O-B-Betrieb ist es umgekehrt.

Beim Vergleich einer aus Freileitung und Kabel zusammengesetzten Leitung bei Z-B- und O-B-Betrieb ergibt sich, daß die Sprechverständigung in beiden Richtungen annähernd gleich gut ist. Sie ist unter den gewählten Verhältnissen beim O-B-Betrieb besser als beim Z-B-Betrieb.

Schließlich wird noch eine vollständige Verbindung untersucht. Sie besteht aus der Fernleitung (gewöhnliche Freileitung), dem Kabel zwischen Fernamt und Ortsamt, sowie zwischen Ortsamt und Teilnehmer. Es wird festgestellt, von welcher Länge ab die Belastung der Kabel zwischen Fernamt und Ortsamt mit Selbstinduktion praktischen Wert hat. Diese Länge liegt im Mittel bei 4 km, sie ändert sich mit den Verhältnissen, unter denen das Kabel arbeitet.



Probleme der Potentialtheorie.

Von

Adolf Bolliger, Zürich.

Inhaltsverzeichnis.

Wichtige analytische Hilfsmittel.

(Formeltabelle.)

Die meisten in dieser Arbeit behandelten elektrostatischen Probleme werden unter Zuhilfenahme der im folgenden zusammengestellten Integraltheoreme gelöst.

I. Das Fouriersche Integraltheorem in den Darstellungen:

$$\text{A.}\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\alpha x)\,d\alpha \int_0^\infty f(\lambda)\sin(\alpha\lambda)\,d\lambda$$

$$\text{B.}\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\alpha x)\,d\alpha \int_0^\infty f(\lambda)\cos(\alpha\lambda)\,d\lambda$$

$$\text{C.}\quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x)\,d\lambda.$$

[Vergleiche darüber: Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. I, 5. Aufl., S. 47 und 49.]

II. Das dem Fourierschen Theorem analoge Integraltheorem der Besselschen Funktion nullter Ordnung $J(x)$:

$$f(r) = \int_0^\infty J(\alpha r)\,\alpha\,d\alpha \int_0^\infty f(\lambda)\,J(\alpha\lambda)\,\lambda\,d\lambda.$$

[Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. I, 5. Aufl., Seite 200.]

III. Die Integralrelation von M. Hafen in Wien:

$$\frac{2}{\pi}\int_a^x \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{x^2 - \eta^2}}\int_a^\eta \frac{f(\xi)}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}}\,d\xi = \int_a^x f(x)\,dx.$$

[Mathematische Annalen Bd. 69, 1910, S. 517.]

IV. Das Theorem:

$$F(r) = -\frac{2}{\pi}\int_r^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \cdot \frac{d\int_\xi^\infty \frac{F(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}}\,\eta\, d\eta}{d\xi} \quad ^{1)}.$$

I. Die zur Lösung der Probleme verwendeten Grundgleichungen der Elektrostatik.

Schon von Lagrange ist erkannt worden, daß sich die Komponenten der von statischen Ladungen herrührenden elektrischen Kräfte aus einer einzigen Funktion, der sog. „Potentialfunktion", als partielle Differentialquotienten nach den Koordinatenrichtungen ableiten lassen. Diese Potentialfunktion (skalare Ortsfunktion) läßt sich bekanntlich nach der Fernwirkungstheorie als das folgende Raumintegral über alle elektrischen Mengen $\varrho \cdot d\tau$ des Raumes τ darstellen:

---

[1]) Dieses Theorem steht in gewisser Analogie zu einem von M. Hafen angegebenen Integraltheorem [vergleiche darüber Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. I, 5. Aufl., Seiten 201 u. 202] und der Beweis dafür läßt sich in ähnlicher Weise, wie dies dort von H. Weber für das Hafensche Theorem geschehen ist, erbringen.

Um aus

$$F(\eta) = \int_\eta^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}\, d\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

die Funktion f explizit durch die Funktion F ausdrücken zu können, multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}}$ und integrieren über η in den Grenzen $r \div \infty$. Es folgt so:

$$\int_r^\infty F(\eta) \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} = \int_r^\infty \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} \int_\eta^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}\, d\xi.$$

Nach der folgenden Regel von M. Hafen [Mathematische Annalen Bd. 1910, S. 517]:

$$\int_r^x d\eta \int_\eta^x \Phi(\xi, \eta)\, d\xi = \int_r^x d\xi \int_r^\xi \Phi(\xi, \eta)\, d\eta$$

[r ist irgendeine positive Konstante]

vertauschen wir die Integrationsfolge und erhalten für das Doppelintegral:

$$\int_r^\infty f(\xi)\, d\xi \int_r^\xi \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}\sqrt{\xi^2 - \eta^2}},$$

wobei das innere Integral durch die Substitution $\eta^2 - r^2 = \mu^2$ gelöst den Wert $\frac{\pi}{2}$ ergibt. Es ist daher:

$$\frac{\pi}{2}\int_r^\infty f(\xi)\, d\xi = \int_r^\infty F(\eta) \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}},$$

woraus durch die Differentation nach r folgt, wenn g eine Konstante darstellt:

$$f(r) = -\frac{2}{\pi} \lim_{g=\infty} \left(\frac{d}{dr} \int_r^g \frac{F(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - r^2}}\, \eta\, d\eta \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Nach 1) und 2) ist daher das Theorem IV bewiesen.

$$\varphi = \int_\tau \frac{\varrho\, d\tau}{r} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

ϱ = el. Raumdichte,
r = Abstand des Aufpunktes vom Quellpunkte.

Man erhält daraus die Komponenten der el. Feldstärke wie folgt:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Wenn nur im Endlichen elektrische Dichte vorhanden ist, so verschwindet nach 1) φ im Unendlichen.

Potentialgleichung: Der reziproke Radius $\frac{1}{r}$ erfüllt, solange der Aufpunkt des Potentiales außerhalb von allen elektrischen Mengen liegt, die Differentialgleichung:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

und deshalb muß auch

$$\Delta \varphi = \Delta \int_\tau \frac{\varrho\, d\tau}{r} = \int_\tau \varrho\, d\tau \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

sein. D. h. es gilt für das Potential φ die partielle Differentialgleichung:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

der sog. „Laplacesche Operator", der auch als Ausgangspunkt für die Potentialuntersuchungen der Nahwirkungstheorie dient.

Für die in der Schrift behandelten Probleme werden meistens Zylinderkoordinaten verwendet. Es ist dann die Transformation des Laplace'schen Operators entsprechend den Substitutionen:

$$x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta, \quad z = z \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

nötig. In Gl. 4) bleibt dabei $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ ungeändert.

Da nun:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \Theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \Theta \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

und also:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{y}{x}$$

ist, folgt durch Differentiation:

$$\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial x}}{\cos^2 \Theta} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\operatorname{tg} \Theta}{r \cos \Theta}$$

$$\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial y}}{\cos^2 \Theta} = +\frac{1}{x} = +\frac{1}{r \cos \Theta}$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \Theta}{r} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= +\frac{\cos \Theta}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Für die Transformation ist nun zu bilden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}&=\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}&=\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial\Theta}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Nach Ausführung der Differentiationen in 9) mit Berücksichtigung von 8), 6) und 7) folgt nach Zusammenfassung der Glieder und Addition von $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ die transformierte Gleichung:

$$\underline{\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Randbedingungen für die Leiter: Nach 2) und 3) gilt für den freien Äther

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=-\Delta\varphi=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

und also für irgendeinen Raumteil τ desselben nach dem Gaußschen Integralsatze:

$$\int_\tau \operatorname{div}\mathfrak{E}\,d\tau=\int_\sigma \mathfrak{E}_n\,d\sigma=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

D. h. das über die Berandung σ von τ erstreckte Oberflächenintegral der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke ist Null. Betrachtet man nun aber einen Raumteil, in welchem vereinzelte, punktförmige Ladungen vorhanden sind, so läßt sich Gl. 12) noch anwenden, wenn die Massenpunkte nach dem Vorgange der Funktionentheorie durch kleine kugelförmige Begrenzungen vom Integrationsgebiete ausgeschlossen werden. Bezeichnet σ_A die äußere Begrenzung des Raumes τ und σ_K die Oberfläche der Kugeln, so muß dann nach 12) sein:

$$\int_{\sigma A}\mathfrak{E}_n\,d\sigma+\int_{\sigma K}\mathfrak{E}_n\,d\sigma=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Da nun $\mathfrak{E}_n$ an der Oberfläche irgendeiner Kugel ν von der Form ist:

$$\mathfrak{E}_{n_\nu}=-\frac{e_\nu}{r^2}+f\cdot c.$$

$[e_\nu=$ el. Menge des Punktes$]$,

wo f·c. eine durch den Punkt kontinuierlich hindurchgehende Funktion bedeutet, während $\left(\frac{e_\nu}{r^2}\right)$ daselbst wie $\frac{1}{r^2}$ unendlich wird, läßt sich wegen $d\sigma_\nu=r_\nu^2 d\omega$ $[\omega=$ Element des Raumwinkels$]$ das Integral über die Kugeln sofort ausführen. Man gewinnt so aus 13) den „eigentlichen" Gaußschen Satz der Elektrostatik:

$$\int_{\sigma A}\mathfrak{E}_n\,d\sigma=4\pi\sum_\nu e_\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Indem die Summation über die elektrischen Mengen durch die entsprechende Integration ersetzt wird, läßt sich der Gaußsche Satz dann auch über kontinuierlich verteilte

Massen anwenden. Der Gaußsche Satz leistet uns gute Dienste bei der Aufstellung der für die elektrostatischen Probleme geltenden Randbedingungen an den Leitern.

Erfahrungsgemäß ist die Elektrizität in den Leitern frei beweglich; sie verteilt sich in denselben so, daß im Gleichgewichtszustand die elektrische Kraft überall Null ist. Es ist also dort:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

φ kann also, was in der Tat auch der Fall ist, wenn das Potential nicht identisch verschwinden soll, im Innern der Leiter höchstens konstant sein. Es gilt daher:

I. Randbedingung: *Die Leiteroberflächen sind Niveauflächen des Potentiales.*

Bedenkt man, daß der Gaußsche Satz 14) für jede beliebige Fläche, die ganz innerhalb eines Leiters verläuft, Gültigkeit hat, so folgt daraus sofort, daß im Leiterinnern keine elektrische Dichte vorhanden sein kann, daß sich die Elektrizität vielmehr vollständig auf den Oberflächen der Leiter ausbreitet.

Die zweite Randbedingung ergibt sich aus dem Gaußschen Satz 14), wenn man diesen über eine das Flächenelement $d\sigma$ der Leiteroberfläche engumschließende Begrenzung anwendet. Nach dem Besprochenen muß die Elektrizität an der Oberfläche der Leiter in dünnen Schichten haften und man kann sie deshalb quantitativ ausdrücken als Produkt eines gewissen Zahlenfaktors, der sog. Flächendichte η mit dem zugehörigen Flächenelemente $d\sigma$. Wird außerdem berücksichtigt, daß die Feldstärke längs des innerhalb des Leiters verlaufenden Teiles der Integrationsfläche Null ist, so folgt aus 14) die Beziehung:

$$\mathfrak{E}_n \, d\sigma = 4\pi\eta \, d\sigma$$

und hieraus die

II. Randbedingung: *In jedem Punkte einer Leiteroberfläche ist:*

$$\mathfrak{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\eta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

II. Kreislochscheibe.

Die mathematische Potentialtheorie befaßt sich meistenteils mit Potentialen, die an den Randwertkörpern nicht bloß konstant, sondern gleich *willkürlichen Randfunktionen* sind. Daß es in der Tat möglich ist, die Randwerte der Potentiale wenigstens bis auf gewisse additive Konstanten vorzuschreiben, ist der Inhalt der diesbezüglichen Existenzbeweise, die ganz allgemein erbracht worden sind. Die gewöhnlichen Leiterpotentiale sind Spezialfälle dieser allgemeinen Potentiale. Im folgenden gebe ich ein instruktives Anwendungsbeispiel für die sog. „Kreislochscheibe" als Randwertkörper, das uns gestattet, die Lösung in geschlossener Form explizit anzugeben.

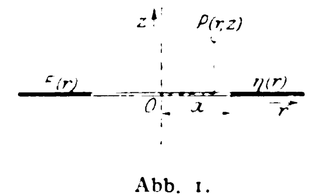


Abb. 1.

Als „Kreislochscheibe" bezeichne ich eine leitende oder auch nichtleitende Ebene mit kreisrundem Ausschnitte [Radius des Begrenzungskreises = a]. [Vgl. auch Abb. 1.] Sie kommt in Kombination mit andern koaxialen Leitern bei manchen praktisch wichtigen Leitersystemen vor. *Wir stellen uns nun die Aufgabe auf der Kreislochscheibe für eine willkürlich vorgegebene Funktion F(r) eines axialsymmetrischen Potentiales φ die konzentrische Verteiluug η der Elektrizität zu finden.*

Um diese Aufgabe zu lösen, verwenden wir Zylinderkoordinaten (r, z) [z-Koordinate senkrecht zur Kreislochscheibe durch deren Mittelpunkt als Anfangspunkt]. Die Niveauflächen des Potentiales müssen der konzentrisch angenommenen Randfunktion

zufolge Rotationsflächen sein. Als Potentialgleichung dient uns daher die im vorigen Abschnitte hergeleitete Gl. 10), mit der Vereinfachung von $\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = 0$. Es ist dann eine Funktion zu bestimmen, die den folgenden Bedingungen genügt:

I. $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

[φ stetig und 0 im Unendlichen].

II. $\varphi = F(r)$ an der Kreislochscheibe [also für: $z = 0$, $r > a$].

III. Ableitungen von φ stetig mit Ausnahme der Normalkomponenten an die Kreislochscheibe.

Da die Kreislochscheibe ganz in der Ebene $z = 0$ liegt, ist das Potential φ eine „gerade" Funktion von z, und es genügt vollständig, wenn wir φ für den Halbraum des positiven z ermitteln. Bedingung III lautet dann dahin, daß:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0 \qquad \text{für } r < a \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} &= -2\pi\eta \quad \text{für } r > a \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

und nach 16) Abschn. I: (zweite Zeile) sein muß.

Daß sich Beziehung 16) Abschn. I auch auf diesen allgemeineren Fall, wo der Randwertkörper nicht mehr als Leiter vorausgesetzt ist, übertragen läßt, ergibt sich sofort mit Hilfe des Gaußschen Satzes 14) Abschn. I, der vermöge der gleichen Schlußweise, wie auf S. 104 Gleichung 1) bestätigt.

Eine Funktion, die den Bedingungen I und III genügt, ist für positive z:

$$\varphi = 2\pi \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty \eta(\lambda)\, J(\alpha\lambda)\, \lambda\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Daß die Bedingung III darin enthalten ist, geht aus dem z. B. von P. du Bois-Reymond bewiesenen Integraltheorem der Besselschen Funktionen nullter Ordnung[1]) hervor, das auf diesen Fall spezialisiert lautet:

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \int_0^\infty J(\alpha r)\, \alpha\, d\alpha \int_a^\infty \eta(\lambda)\, J(\alpha\lambda)\, \lambda\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a \\ \eta(r) & \text{für } r > a \end{cases} \quad \ldots \quad 3)$$

Der Bedingung II wegen ist nach Gl. 2) zu setzen:

$$F(r) = 2\pi \int_0^\infty J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty \eta(\lambda)\, J(\alpha\lambda)\, \lambda\, d\lambda \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Verwendet man $J(\alpha\lambda)$ in der Darstellung:

$$J(\alpha\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_\lambda^\infty \frac{\sin(\alpha\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}}\, d\xi\;^{2}), \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

so kann für das innere Integral geschrieben werden:

$$\int_a^\infty \eta(\lambda)\, J(\alpha\lambda)\, \lambda\, d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \eta(\lambda)\, \lambda\, d\lambda \int_\lambda^\infty \frac{\sin(\alpha\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}}\, d\xi.$$

[1]) **Mathematische Annalen Bd. 4, S. 362.** Die Theorie der Fourierschen Integrale und **Formeln.**

[2]) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, S. 182, Formel 9).

Rechts kann die Integrationsfolge nach der folgenden Regel vertauscht werden:

$$\int_a^x d\lambda \int_\lambda^x \Phi(\lambda, \xi)\, d\xi = \int_a^x d\xi \int_a^\xi \Phi(\lambda, \xi)\, d\lambda\,[1].$$

Es folgt dann daraus:

$$\frac{2}{\pi} \int_a^\infty \sin(\alpha\xi)\, d\xi \int_a^\xi \frac{\eta(\lambda)}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} \lambda\, d\lambda$$

und mit der Bezeichnung von:

$$f(\xi) = 4 \int_a^\xi \frac{\eta(\lambda)}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} \lambda\, d\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

$$2\pi \int_a^\infty \eta(\lambda)\, J(\alpha\lambda)\, \lambda\, d\lambda = \int_a^\infty f(\xi) \sin(\alpha\xi)\, d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Wegen 7) gilt nach 4) für F(r) also die Beziehung:

$$F(r) = \int_0^\infty J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty f(\xi) \sin(\alpha\xi)\, d\xi$$

und nach Vertauschung der Integrationsfolge:

$$F(r) = \int_a^\infty f(\xi)\, d\xi \int_0^\infty J(\alpha r) \sin(\alpha\xi)\, d\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Das innere Integral läßt sich mittelst des Fourierschen Integraltheorems [I, A in der Formeltabelle] leicht auswerten, wenn für $J(\alpha r)$ das 5) entsprechende Integral eingesetzt wird. Man erhält so:

$$\int_0^\infty J(\alpha r) \sin(\alpha\xi)\, d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\alpha\xi)\, d\alpha \int_r^\infty \frac{\sin(\alpha\mu)}{\sqrt{\mu^2 - r^2}}\, d\mu =$$

$$= \quad 0 \qquad \text{für } \xi < r$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \quad \text{für } \xi > r$$

und damit für 8):

$$F(r) = \int_r^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\, d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

In dieser Gleichung kann die Funktion $f(\xi)$ mit Hilfe des Theorems IV der Formeltabelle durch die Funktion F(r) leicht ausgedrückt werden. Es muß sein:

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{d \int_\xi^\infty \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}\, r\, dr}{d\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

Da $f(\xi)$ nun bekannt ist, kann unser elektrostatisches Problem dann als gelöst betrachtet werden, wenn es uns gelingt, in Formel 6) $\eta(\lambda)$ explizit als Funktion von $f(\xi)$ anzugeben. Dazu multiplizieren wir Gl. 6) auf beiden Seiten mit $\frac{\xi\, d\xi}{8\pi\sqrt{r^2 - \xi^2}}$ und integrieren über ξ in den Grenzen $a \div r$ entsprechend der Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^r \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}\, \xi\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_a^r \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \int_a^\xi \frac{\eta(\lambda)}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} \lambda\, d\lambda.$$

[1]) M. Hafen, Mathematische Annalen Bd. 1910, S. 517.

Nach dem Theorem III der Formeltabelle ist aber das Integral rechts identisch mit:

$$\int_a^r \eta(r)\, r\, dr,$$

so daß die Beziehung gilt:

$$\int_a^r \eta(r)\, r\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_a^r \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\,\xi\, d\xi,$$

aus welcher durch Differentiation nach r folgt:

$$\eta(r) = \frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{d\int_a^r \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\,\xi\, d\xi}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Hierdurch ist aber unsere Aufgabe gelöst.

Nach 2) und 7) läßt sich noch das Potential φ in Zusammenhang bringen mit der Funktion $f(\xi)$ durch die Gleichung:

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\cdot J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty f(\xi)\sin(\alpha\xi)\, d\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Substituiert man schließlich noch die Funktion $f(\xi)$ aus Gl. 10) in die Gl. 11) und 12), so erhält man die gesuchte konzentrische Verteilung $\eta(r)$ der Elektrizität auf der Kreislochscheibe und das Potential φ aus der willkürlichen Randfunktion $F(r)$ der letzteren zu:

$$\eta(r) = -\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\int_a^r \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\cdot\frac{d\int_\xi^\infty \frac{F(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}}\,\varrho\, d\varrho}{d\xi} \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

$$\varphi = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha z}\cdot J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty \sin(\alpha\xi)\, d\xi\, \frac{d\int_\xi^\infty \frac{F(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2-\xi^2}}\,\varrho\, d\varrho}{d\xi} \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

Die erhaltenen Resultate sind analog den Lösungen von M. Hafen für die Kreisscheibe[1]). Es lassen sich daraus die Ausdrücke der Dichte und des Potentiales in einfacheren Fällen durch Integration vollständig bestimmen. Ein dafür typisches Beispiel behandelt der folgende Abschnitt.

III. Influenzwirkung eines elektrischen Poles auf die Kreislochscheibe.

Übernimmt die Kreislochscheibe die Rolle einer leitenden Fläche, so muß sie überall das Potential Null aufweisen. Wenn wir nämlich im Unendlichen keine freie Elektrizität annehmen, so verschwindet nach Gl. 1), Abschn. I das Potential φ dort sicher und also auch an jedem Leiter, der bis dorthin reicht. So z. B. an unserer Kreislochscheibe, die wir als unbegrenzt vorausgesetzt haben. Die Kreislochscheibe braucht deswegen nicht frei von elektrischen Ladungen zu sein, sie wird vielmehr, falls noch geladene Konduktoren oder Massenpole in ihre Nähe gebracht werden, solche Belegungen induzieren, daß Gleichgewicht entsteht; d. h. es wird sich an ihr eine solche

[1]) Mathematische Annalen Bd. 1910, S. 522, Formel 8), und 523, Formel 13).

Massenverteilung einstellen, daß das Potential an allen andern Leitern konstant und insbesondere an der Kreislochscheibe Null wird.

Wir wollen nun in diesem Abschnitt den Fall genauer untersuchen, wo sich im Mittelpunkte der Kreislochscheibe ein elektrischer Pol von der Masse m befindet. Es soll die *Potentialfunktion* und *Dichteverteilung* an der Scheibe ermittelt werden. Die Aufgabe läßt sich auf folgende Weise lösen. Man bestimmt zum Potentiale

$$\varphi_P = \frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \dots \dots \dots \quad 1)$$

des Massenpoles ein zusätzliches Kreislochscheibenpotential mit der Verteilung der induzierten Ladungen und dem entgegengesetzten Randwert des Potentiales φ_P an der Scheibe. Da das Potential des Massenpoles sich durch die induzierten Ladungen an der Scheibe in keiner Weise beeinflussen läßt, findet die gestellte Aufgabe also ihre Lösung durch die Resultate des vorhergehenden Abschnittes, wenn man dort

$$F(r) = -\frac{m}{r} \quad \dots \dots \dots \quad 2)$$

setzt.

Für die Funktion $f(\xi)$, Formel 10), Abschn. II gilt mit Rücksicht auf die Konvergenz des darin vorkommenden Integrales folgender Grenzwert [vergleiche dazu auch Fußnote auf Seite 101]:

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \lim_{g=\infty} \left(\frac{d}{d\xi} \int_\xi^g \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r\,dr \right)$$

und also für unser Anwendungsbeispiel nach 2):

$$\lim_{g=\infty} \left(\frac{d}{d\xi} \int_\xi^g \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \right) = \left| \frac{d\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\left(\frac{g}{\xi}\right)}{d\xi} \right|_{g=\infty} = -\frac{1}{\xi}.$$

Es ist somit:

$$\underline{f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{\xi}} \quad \dots \dots \dots \quad 3)$$

Nach Gl. 12) des vorigen Abschnittes hat man nun für das Potential φ_S der Kreislochscheibe den Ausdruck:

$$\varphi_S = -\frac{2}{\pi} m \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot J(\alpha r)\, d\alpha \int_a^\infty \frac{\sin(\alpha\xi)}{\xi} d\xi \quad \dots \dots \dots \quad 4)$$

Das Integral lautet nach Vertauschung der Integrationsfolge:

$$\int_a^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot \sin(\alpha\xi)\, J(\alpha r)\, d\alpha$$

und kann gedeutet werden als Imaginärteil von:

$$\int_a^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\infty e^{-\alpha(z + i\xi)} \cdot J(\alpha r)\, d\alpha = \int_a^\infty \frac{d\xi}{\xi \sqrt{r^2 + (z + i\xi)^2}}\text{[1]}.$$

[1]) Über die Ausführung des inneren Integrales vergleiche man: Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. I, S. 194.

Indem man im Nenner nach Potenzen von ξ ordnet, findet man nach Integration:

$$\int_a^\infty \frac{d\xi}{\xi\sqrt{r^2+z^2+2i\xi z-\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \left| \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{i\xi z+r^2+z^2}{\xi r}\right)\right|_{\xi=a}^{\xi=\infty} \quad . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Die obere Grenze liefert:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(i\,\frac{z}{r}\right),$$

wovon der Imaginärteil

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

mit den Konstanten $-\frac{2}{\pi}m$ von 4) multipliziert genau entgegengesetzt gleich dem Potentiale φ_P des Poles ist. Es erweist sich also, daß das resultierende Potential:

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_S$$

als Imaginärteil der unteren Grenze von 5) als selbständige Funktion durch einen geschlossenen Ausdruck hervorgeht, d. h. das resultierende Potential φ ist der Imaginärteil von:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{r^2+z^2}{ar} + i\,\frac{z}{r}\right)^{1)},$$

der nach Multiplikation mit den konstanten Faktoren in 4) das Resultat liefert:

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot \arccos \frac{\sqrt{a^2z^2+(r^2+z^2+ar)^2} - \sqrt{a^2z^2+(r^2+z^2-ar)^2}}{2ar} \quad . \; . \quad 6)$$

Daß die gefundene Funktion den Bedingungen des gesuchten Potentiales genügt, ist folgendermaßen einzusehen. Erstens ist zu bemerken, daß sie notwendigerweise die Laplacesche Gleichung $\Delta\varphi = 0$ erfüllt, da dies für jede Funktion von der Form

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot J(\alpha r) \cdot \Phi(\alpha)\, d\alpha$$

zutrifft. Es erübrigt also bloß zu zeigen, daß die Funktion Gl. 6) den Randbedingungen entsprechend ist, die für unser Problem folgendermaßen lauten:

I. $\varphi = \frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} + \text{f. c.}$ am Massenpole

[f. c. bedeutet eine im Punkte $P(r=0,\ z=0)$ reguläre Funktion].

II. $(\varphi)_{z=0} \neq 0$ für $r < a$

$= 0$ „ $r > a$.

III. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ für $r < a$

$= -2\pi\eta(r)$ für $r > a$.

---

1) Es ist bekanntlich der Imaginärteil von $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,(x+iy)$

$$\pm \arccos \frac{\sqrt{(1+x)^2+y^2} - \sqrt{(1-x)^2+y^2}}{2}.$$

Siehe z. B. Laska, Formelsammlung Seite 11.

Der Bedingung I zufolge muß, wie es einer in beliebiger Richtung erfolgenden Annäherung an den Massenpol entspricht, φ im Punkte P ($r = 0$, $z = 0$) wie der reziproke Abstand $\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ des Aufpunktes ∞ werden. Wir wollen annehmen, der Weg, längs dessen wir uns in einer beliebigen Meridianebene gegen den Punkt P bewegen, sei gegeben durch die Gleichung der Geraden:

$$z = \varrho r, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

wobei ϱ den sog. Richtungskoeffizienten bedeutet. Wir substituieren diesen Wert von z in das Resultat 6). Unsere Beweisführung läuft dann dahinaus, zu zeigen, daß beim Grenzübergang zu $r = 0$ der arc cos jener Formel für jeden beliebigen Wert von ϱ stetig gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Die Substitution 7) liefert für den arc cos in 6) nach Kürzung mit r:

$$\arccos \frac{\sqrt{a^2\varrho^2 + [r(1+\varrho^2) + a]^2} - \sqrt{a^2\varrho^2 + [r(1+\varrho^2) - a]^2}}{2a},$$

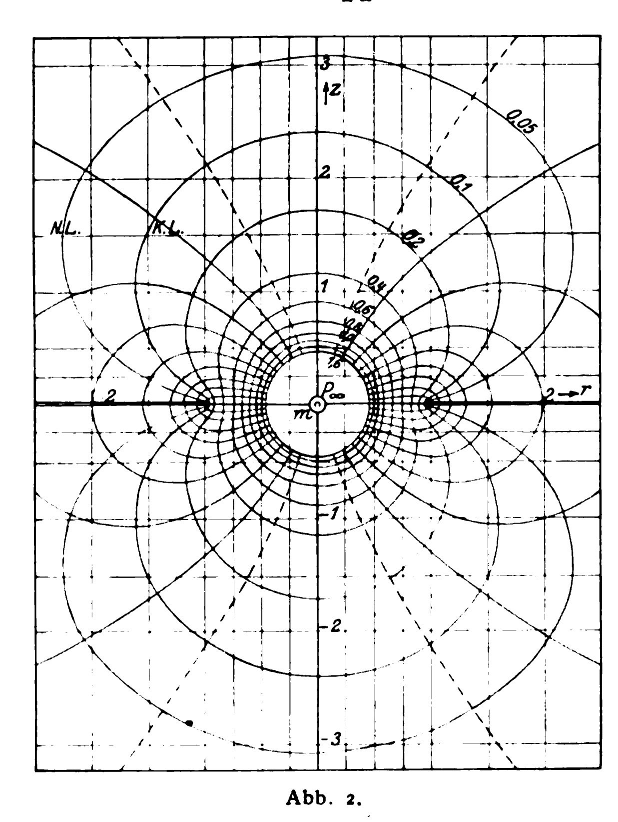


Abb. 2.

der stetig gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert, wenn die Differenz der beiden Wurzeln stetig gegen 0 abnimmt. Dies ist in der Tat für $\lim r = 0$ bei

$$0 \leq \varrho < \infty$$

der Fall, weil für kleine r stets

$$|r(1+\varrho^2)| \text{ gegen } |a|$$

vernachlässigt werden darf. Daß auch die obere Grenze ∞ von ϱ keine Ausnahme dafür ergibt, erkennt man sofort, wenn man beim Potentiale φ Formel 6) zur Grenze $r = 0$

und nachträglich noch zur Grenze $z = 0$ übergeht. Beim Grenzübergang zu $r = 0$ tritt im Argument des arc cos von Formel 6) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ auf, deren Auswertung folgendes liefert:

$$(\varphi)_{r=0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{z} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{z}\right),$$

woraus:

$$\lim_{z=0} (\varphi)_{r=0} = \left|\frac{m}{z}\right|_{z=0}.$$

φ ist also sicher in der Nähe des Massenpoles, wie es der Bedingung I entspricht, von der Form:

$$\frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \text{f. c.}$$

Um Bedingung II nachzuweisen, machen wir den Grenzübergang von φ zu $z = 0$. Aus 6) folgt:

$$(\varphi)_{z=0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{r} \cdot \arccos \frac{(r + a) \pm (r - a)}{2a},$$

wobei das positive Zeichen für $r < a$ und das negative für $r > a$ zu verwenden ist. Also ist:

$$\begin{aligned}(\varphi)_{z=0} &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{r} \cdot \arccos\left(\frac{r}{a}\right); \quad \text{für } r < a \\ &= 0 \quad ; \quad \text{für } r > a.\end{aligned}$$

Die Bedingung III kann man leicht durch Differentiation von φ nach z und nachherige Limesbildung bestätigen. Es erweist sich dabei tatsächlich, daß $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$ im Intervalle $0 < r < a$ verschwindet. Zugleich erhält man so den Ausdruck für die elektrische Dichte an der Scheibe, die man in Übereinstimmung mit jener Berechnung aber rascher mit Formel 11) des vorhergehenden Abschnittes ermittelt. Danach ist:

$$\eta(r) = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{d}{dr} \int_a^r f(\xi) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \quad \dots \dots \dots \dots \quad 8)$$

wobei nach 3):

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{\xi}$$

ist, und es handelt sich also um die Auswertung von:

$$\frac{d}{dr} \int_a^r \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} = \frac{d\left(\arccos \frac{a}{r}\right)}{dr} = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit den Faktoren von 8) und $f(\xi)$, so folgt für die elektrische Dichte $\eta(r)$ an der Kreislochscheibe das einfache Resultat:

$$\underline{\eta(r) = -\frac{m}{\pi^2} \cdot \frac{a}{r^2\sqrt{r^2 - a^2}}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 9)$$

Die Gesamtelektrizität der Scheibe findet man durch Integration über die Dichte wie folgt:

$$q = \int_{(S)} \eta \, d\sigma = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \eta(r) \, r \cdot dr \, d\gamma.$$

Es ist also nach 8) allgemein:

$$q = \int_a^r f(\xi) \frac{\xi \, d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

und in unserem speziellen Falle:

$$q = -\frac{2}{\pi} m \left| \arc\cos\left(\frac{a}{r}\right) \right|_a^\infty,$$

d. h.

$$\underline{q = - m.}$$

Es zeigt sich also, daß, wie zu erwarten war, die an der Kreislochscheibe durch den Pol aufgesogene Elektrizitätsmenge entgegengesetzt gleich der Menge des Poles ist.

Der in Formel 6) gefundenen Potentialfunktion entspricht ein Kraftlinienbild, wie es Abb. 2 für einen Meridianschnitt veranschaulicht. Es läßt sich daran sehr schön erkennen, wie die Kraftlinien vom Pole P im mittleren Teile des Bildes nach der Scheibe übertreten.

(**Fortsetzung folgt.**)

Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 4. u. 5. Heft. 1917.

Über die Berechnung von Übertragern für Telephonzwecke.

Von

Ragnar Holm, Charlottenburg.

Inhalt.

1. Stellung der Aufgabe.

Problem 1: Eine Leitung, deren Scheinwiderstand $= \mathfrak{Z}_1$ ist, soll über einen Übertrager mit einer zweiten Leitung, deren Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}_2$ ist, verbunden werden. Beide Scheinwiderstände $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sind dabei als vom Anschluß an den Übertrager aus gemessen zu betrachten, vgl. unter 2d'). Der Übertrager ist so zu berechnen, daß bei bestimmter Spannungsamplitude V am Anfang der ersten Leitung eine möglichst große Energie in die zweite Leitung hineingeschickt wird.

Die Problembehandlung bleibt unverändert, wenn anstatt der ersten Leitung ein Sender mit eingeprägter Spannungsamplitude oder anstatt der zweiten Leitung ein Empfänger, ein Verstärker oder eine Leitung mit einem am Ende angeschlossenen Empfänger oder dergl. vorliegt, vorausgesetzt, daß der Scheinwiderstand des betreffenden Gebildes, am Übertrageranschluß gemessen, gleich $\mathfrak{Z}_1$ bzw. $\mathfrak{Z}_2$ ist.

Problem 2: Gleichlautend mit Problem 1 aber mit der Zusatzbedingung, daß das Optimum sowohl einen Energiestrom von $\mathfrak{Z}_1$ zu $\mathfrak{Z}_2$ wie einen Energiestrom in der umgekehrten Richtung berücksichtigen soll.

Wir werden uns hauptsächlich mit dem Problem 1, befassen. Die dabei zum Zwecke der Schätzung der übertragenen Energie und der Schätzung der Bedeutung einer Abweichung von den Optimumbedingungen aufgestellten Formeln können auch für den Fall des Problems 2 verwendet werden.

Die eigentliche Lösung des Problems 2 wird in § 19 behandelt. Sie wird auf die Lösung des Problems 1 gestützt.

Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen sind die Probleme 1 und 2 in Breisigs „Theoretische Telegraphie" § 225 behandelt[1]). Ich habe Veranlassung gehabt, einige weniger vereinfachte Berechnungen durchzuführen. Diese bestätigen die Brauchbarkeit der Breisigschen Formeln innerhalb weiter Grenzen.

Ich halte die Veröffentlichung meiner Problembehandlung aus verschiedenen Gründen für angebracht. Einen gewissen Wert erhalten meine Formeln schon ihrer Vollständigkeit wegen und besonders weil sie eine Berechnung des gewonnenen Effekts gestatten. Die Art, in der die Windungskapazität und die Eisenverluste berücksichtigt worden sind, dürfte wohl etwas Interesse beanspruchen können, wenn sie, wie ich vermute, neu ist. Einige neue, nicht so selten verwertbare Formeln ergeben sich für den Fall eines beträchtlichen Phasenwinkels des $\mathfrak{Z}_1$ und für den Fall eines sehr großen $\mathfrak{Z}_2$.

Einige wesentliche Verallgemeinerungen der Voraussetzungen gegenüber Breisigs Darstellung bestehen darin, daß ich die Phasen von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sowie die Kapazitäten der Übertragerwicklungen, die Streuung und die Eisenverluste berücksichtige. Zuerst soll allerdings eine Lösung mit der vereinfachenden Annahme von reellen, konstanten $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sowie ohne Berücksichtigung der Kapazitäten usw. hergeleitet werden. An dieser Lösung soll untersucht werden, wie empfindlich der Effekt des Übertragers gegen Ungenauigkeiten in der Verwirklichung der Optimumbedingungen ist. Das Resultat zeigt uns, bei welcher Genauigkeitsordnung wir unsere spätere Berechnungen zweckmäßigerweise halten sollen.

2. Allgemeine Ausgangsgleichungen.

Die Bezeichnungen sind in Übereinstimmung mit denjenigen in Breisigs „Theoretische Telegraphie" gewählt, wenn anderes nicht hervorgehoben wird. Wir bedienen uns also bei Wechselstromgrößen der komplexen Schreibweise und bezeichnen die Vektorsymbole mit großen gotischen Buchstaben. Wir bezeichnen also z. B. die Spannung an den Klemmen der linken in der Abb. 1 gezeichneten Wicklung, d. h. die Spannung im Punkt 1 mit

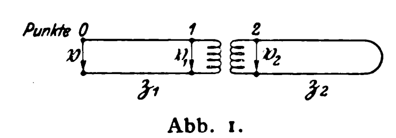


Abb. 1.

$$\mathfrak{V}_1 \, e^{j\omega t}$$

und den Strom durch dieselbe Wicklung, d. h. den Strom in Punkt 1 mit

$$\mathfrak{J}_1 \, e^{j\omega t},$$

wo $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{J}_1$ komplexe Vektoren sind, ω die betreffende Frequenz und t die Zeit bedeuten.

$\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sind, als komplexe Vektoren ausgedrückt, die im Paragraphen 1 erwähnten Scheinwiderstände der Leitungen 1 und 2.

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sind komplexe Koeffizienten. Die Stellenziffern beziehen sich auf die Abb. 1. Es gilt[2])

$$\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{J}_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2a)$$

---

[1]) F. Breisig, Theoretische Telegraphie. Braunschweig 1910.

[2]) Wir setzen als bekannt voraus, daß die Spannungs- und Stromvektoren $\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{J}_0$ am Anfang einer, eventuell nicht symmetrischen Leitung mit den betreffenden Vektoren $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{J}_1$ am Ende der Leitung verbunden sind durch Beziehungen von der Form

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{B} \mathfrak{J}_1$$
$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{C} \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{J}_1,$$

wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_2$ die üblichen bei Breisig im § 197 definierten Leitungskonstanten bedeuten.

Ebenso setzen wir als bekannt voraus, daß zwischen den primären Vektoren $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{J}_1$ und den sekundären $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{J}_2$ eines Übertragers Gleichungen von der Form 2b), wozu die Koeffizienten näher in 4a) angegeben sind, bestehen. Näheres hierüber siehe Breisig, § 225.



$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{D}\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{E}\mathfrak{J}_2\\ \mathfrak{J}_1 &= \mathfrak{F}\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{G}\mathfrak{J}_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2b)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{B}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2c)$$

Die Herleitung der Gl. 2c) ist ohne weiteres begreiflich für den Fall, daß die Leitung 1 im Verhältnis zu den Wellenlängen der Signale kurz ist. Für eine längere, eventuell zusammengesetzte Leitung, an deren Anfang ein die EMK $\mathfrak{S}$ erzeugender, den Scheinwiderstand $\mathfrak{R}$ besitzender Sender sitzt, gilt[1]):

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}\mathfrak{J}_0 + \mathfrak{B}_0,$$

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{J}_1,$$

$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{J}_1,$$

woraus man erhält

$$\mathfrak{S} = (\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1)\mathfrak{B}_1 + (\mathfrak{R}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B})\mathfrak{J}_1$$

oder

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}}{\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1}\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{B}_1$$

oder, wenn wir $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}}{\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1}$ mit $\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen,

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1} = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{B}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2d)$$

Nun gelten aber für vom Punkte 1 aus in die Leitung 1 gesandte Ströme [vgl. Breisig, Gl. 272a), bei Berücksichtigung der Stromrichtung] folgende Gleichungen, wobei $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_0$ natürlich eine andere Bedeutung als oben haben:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}\mathfrak{J}_0$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{J}_0$$

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{R}\mathfrak{J}_0.$$

Aus diesen letzten Gleichungen berechnet sich der Scheinwiderstand der Leitung 1 mit dem daran geschalteten $\mathfrak{R}$ zu

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{J}_1} = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{R} + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{R} + \mathfrak{A}_1} = \mathfrak{Z}_1.$$

Satz 2d'): $\mathfrak{Z}_1$ ist also der Scheinwiderstand der zusammengesetzten Leitung 1 vom Punkte 1 aus gemessen.

Da $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1$ Konstanten der gegebenen Leitung 1 bedeuten, so können wir

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_1}$$

mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen und dieses $\mathfrak{B}$ ebenso wie das für eine kurze Leitung 1 unmittelbar gegebene $\mathfrak{B}$ der Gl. 2c) für die weiteren Berechnungen bei gegebener Frequenz ω als gegebene Konstante betrachten. Die Gl. 2d) ist damit auf die Form 2c) gebracht worden.

Bemerkung 2d''): $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ brauchen nicht notwendig als Scheinwiderstände definiert werden. Zu ihrer Definition genügen die Gl. 2c) und 2a), vorausgesetzt nur, daß $\mathfrak{B}$ in 2c) als unabhängige, gegebene Größe betrachtet werden darf.

Bemerkung 2d'''): Im Falle langer Leitungen 1 und 2 können mit bekannter Annäherung $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ gleich den betreffenden Leitungscharakteristiken gesetzt werden. Da man in praktischen Fällen die Absolutwerte von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ nur etwa auf 30% genau zu kennen braucht [vgl. Tafel 5d) und § 20], so ist obige Annäherung schon, wenn in der betr. Leitung $\beta l >$ etwa 1 ist, gestattet. Es hat manchmal einen beson-

[1]) Siehe Fußnote 2 auf voriger Seite.

deren Zweck, die Größen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ durch die betreffenden Leitungscharakteristiken zu ersetzen. In Wirklichkeit verlangt man nämlich im allgemeinen vom Übertrager, daß er für ein ausgedehntes ω-Gebiet gute Anpassung zeige. Die Größen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sind aber meistens von ω abhängig. Deshalb muß man gewöhnlich für $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ zweckmäßig gewählte Mittelwerte einsetzen. Als gute solche Mittelwerte sind meistens gerade die Leitungscharakteristiken zu gebrauchen.

Bezeichnung:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{G}\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{E} \qquad \text{2e)}$$

Aus 2a bis 2c) erhält man

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{H}}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_2 = \frac{1}{\mathfrak{H}}\mathfrak{B} \qquad \text{2f)}$$

Die der Leitung, deren Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}_2$ ist, zugeführte Energie, $\mathfrak{W}$, ist gleich dem vektoriellen Produkt von $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{J}_2$. Demnach ist infolge 2f), wenn φ die Phase des $\mathfrak{Z}_2$ ist:

$$\mathfrak{W} = |\mathfrak{B}^2| \cdot \left|\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{H}^2}\right| \cos\varphi \qquad \text{2g)}$$

Die in § 1 gestellte Aufgabe lautet, mit Hilfe der eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt:

Der Übertrager soll so konstruiert werden, daß $\mathfrak{W}$ zum Maximum wird. Da $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Z}_2$ und φ als gegeben zu behandeln sind, ist die Aufgabe damit gleichbedeutend:

$$|\mathfrak{H}| \text{ zu einem Minimum zu machen} \qquad \text{2h)}$$

3. Hilfssatz.

Eine Funktion von der Form

$$F(x) = \left|\frac{F_1}{x} + xF_2\right|, \qquad \text{3a)}$$

wo $F_1 = a + jb$ und $F_2 = c + jd$ von x unabhängig ist, erreicht bei veränderlichem, reellem x ihr Minimum, wenn

$$|F_1| = x^2 |F_2| \qquad \text{3b)}$$

ist.

Beweis: Infolge der Annahme ist:

$$\frac{F_1}{x} + xF_2 = \frac{a}{x} + xc + j\left(\frac{b}{x} + xd\right),$$

woraus hervorgeht:

$$F(x) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2} + x^2(c^2+d^2) + 2(ac+bd)} \qquad \text{3c)}$$

Da $2(ac+bd)$ konstant ist, findet man leicht, daß der Ausdruck 3c) für F(x) ein Minimum ist, wenn $(a^2+b^2) = x^4(c^2+d^2)$ ist, eine Bedingung, die mit 3b) gleichbedeutend ist.

4. Lösung des Problems unter den einfachsten Voraussetzungen.

Wir lassen jetzt Eisenverluste, Kapazitäten und Streuung unberücksichtigt und setzen

$$\mathfrak{Z}_1 = Z_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_2 = Z_2,$$

wo Z_1 und Z_2 reell und positiv sind.

Für den Übertrager gilt dann die Gl. 302) in Breisigs „Theor. Telegr.", d. h.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}}; \quad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}} \\ \mathfrak{F} &= \frac{1}{\mathfrak{M}}; \quad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{4a)}$$

wo nach Breisigs (Seite 217) Bezeichnung $\mathfrak{L}_1 = R_1 + j\omega L_1$ und $\mathfrak{L}_2 = R_2 + j\omega L_2$ die eigenen Scheinwiderstände der Primär- und Sekundärwicklungen bedeuten, M der gegenseitige Induktionskoeffizient und $\mathfrak{M} = j\omega M$ ist.

Durch Einsetzen von 4a) in 2e) entsteht:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mathfrak{M}} Z_1 Z_2 + \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}} Z_1 + \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}} Z_2 + \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}} \quad \ldots \ldots \quad 4b)$$

Wenn wir die gleiche Kupfermenge in beiden Übertragerwicklungen voraussetzen, so wird, da die Streuung vernachlässigt wird,

$$L_2 = n^2 L_1; \quad R_2 = n^2 R_1 \quad \text{und} \quad M = n L_1 \quad \ldots \ldots \quad 4c)$$

wo n die Übersetzungszahl bedeutet.

Wir benutzen die übliche Bezeichnung

$$L = \tau R \quad \ldots \ldots \quad 4d)$$

Mit Berücksichtigung von 4c) und 4d) erhalten wir aus 4b):

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{j\omega}\left\{\frac{Z_2}{n}\left[\frac{Z_1}{L_1} + \frac{1}{\tau} + i\omega\right] + n\left[\frac{Z_1}{\tau} + \frac{L_1}{\tau^2} + j\omega\left(Z_1 + 2\frac{L_1}{\tau}\right)\right]\right\} \quad \ldots \quad 4e)$$

τ möge von vornherein gewählt worden sein. Wir betrachten deswegen in diesem Paragraphen τ als eine Konstante.

Wir suchen die Bedingungen für das kleinstmögliche $|\mathfrak{H}|$. Diese Bedingungen betreffen n und L_1 und sind auf Grund des Hilfssatzes § 3 ohne weiteres nach der Mustergleichung 3b) aufzustellen, weil $|\mathfrak{H}|$ bzw. ein Teil von $|\mathfrak{H}|$ eine derartige Funktion von n bzw. L_1 ist, wie F(x) im § 3 von x. Wir erhalten, wenn wir die zur Frequenz ω_0 gehörenden günstigsten n und L_1, mit n_0 bzw. L_{10} bezeichnen:

$$n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1 + 2R_1}\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2}{1 + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{Z_1 + 2R_1}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \quad 4f)$$

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 Z_2 \tau}{2\omega_0 n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\omega_0^2 \tau^2}}} \quad \ldots \ldots \quad 4g)$$

Bei praktisch in Frage kommenden ω-, τ-, Z_1- und R_1-Werten geben folgende Formeln 4f') und 4g') brauchbare Annäherungen für die obigen Formeln 4f) und 4g). Vgl. § 19 und § 20.

$$n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1}\text{[1]} \quad \ldots \ldots \quad 4f')$$

$$n_0^2 L_{10}^2 = M_0^2 = \frac{Z_1 Z_2 \tau}{2\omega_0}$$

oder infolge 4f'):

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1^2 \tau}{2\omega_0}$$

und

$$\left.\begin{aligned} L_{10}^2 &= \frac{Z_1^2 \tau}{2\omega_0} \\ L_{20}^2 &= \frac{Z_2^2 \tau}{2\omega_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 4g')$$

4g') sind gerade die Breisigschen Gleichungen 306) für L_{10} und L_{20}, „Theoret. Telegr." Seite 339.

[1]) Eine bessere Annäherung wird durch die Formel $n_0^2 = 0{,}8\,\frac{Z_2}{Z_1}$ gewährt, vgl. 19c) u. 20c).

Sobald Z_1, Z_2, τ und ω bekannt sind, kann man unmittelbar aus 4g') L_{10} und L_{20} berechnen. Hierin liegt ein praktischer Vorteil der Formeln 4g'). Wünscht man die genaueren Formeln 4f) und 4g) zu verwenden, so wird ein Verfahren der sukzessiven Annäherung notwendig. Man kann z. B. so vorgehen, daß man zuerst aus 4g') einen Annäherungswert L' des L_{10} berechnet. Man setzt $R' = \tau L'$, substituiert $R_1 = R'$ in 4f) und berechnet einen Annäherungswert n' des n_0. Dieses n' wird in 4g) eingesetzt. Ein besserer Annäherungswert L'' des L_{10} wird berechnet usw.

Wir wollen nun den $|\mathfrak{H}|$-Wert $|\mathfrak{H}_0|$, der sich bei Gültigkeit der Optimumbedingungen aus 4e) ergibt, ermitteln. Dabei rechnen wir nach dem folgenden Schema:

$$j\mathfrak{H}_0 = \frac{1}{n_0}(a + bj) + n_0(c + dj),$$

wo

$$a^2 + b^2 = n_0^4(c^2 + d^2)$$

und also

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{2}{n_0^2}(a^2 + b^2) + 2(ac + bd)$$

ist.

Wir erhalten bei Vernachlässigung des sich als relativ klein ergebenden Gliedes ac:

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{2Z_2^2}{n_0^2}\left\{\left[1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2\right] + n_0^2\frac{Z_1 + 2R_1}{Z_2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4h)$$

Laut 4g') gilt mit Annäherung

$$R_1^2 = \frac{Z_1^2}{2\omega_0\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4i)$$

Mit guter Annäherung folgt aus 4f), worin der Nenner unter der Wurzel bei nicht zu kleinem $\omega\tau$ annähernd gleich 1 gesetzt werden kann:

$$n_0^2\frac{Z_1 + 2R_1}{Z_2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad 4j)$$

Durch Einsetzen von 4j) in 4h) erhalten wir

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{2Z_2}{n_0^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2}\right]$$

oder

$$|\mathfrak{H}_0^2| = 2Z_2(Z_1 + 2R_1)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1}{R_1}\right)^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad 4k)$$

Wenn hierin 4i) eingesetzt wird, so ergibt sich

$$|\mathfrak{H}_0^2| = 2Z_1Z_2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\omega_0\tau}}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\omega_0\tau}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\omega_0\tau}}\right)^2}\right], \quad \ldots\ldots \quad 4l)$$

ein übersichtlicher Ausdruck für $|\mathfrak{H}^2|$.

5. Einfluß der Abweichungen von den Optimumbedingungen.

Ungenauigkeit der n-Bestimmung: Eine n-Variation wirkt auf $|\mathfrak{H}|$ annähernd so wie auf N, wenn

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{n} + \frac{n}{n_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5a)$$

ist.

Folgende Tafel ist aus 5a) berechnet und gilt also annähernd für $|\mathfrak{H}|$:

Tafel 5b).

$n/n_0 =$	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6
$\frac{1}{N}$ oder $\left\lvert\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}}\right\rvert =$	0,88	0,94	0,975	0,994	1,00	0,995	0,985	0,945	0,90

Ungenauigkeit der L_{10}-Bestimmung.

In praktischen Fällen wirkt eine L_1-Variation in der Nähe des aus 4g) bestimmten L_{10} auf $|\mathfrak{H}|$ meistens etwa ebenso wie auf N, wenn

$$N = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L_{10}}{L_1} + \frac{L_1}{L_{10}}\right) + 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5c)$$

ist.

Folgende aus 5c) berechnete Tafel gilt also mit Annäherung für $|\mathfrak{H}|$.

Tafel 5d).

$L_1/L_{10} =$	0,5	0,7	1,0	1,5	2
$\frac{1}{N}$ oder $\left\lvert\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}}\right\rvert =$	0,89	0,97	1,00	0,96	0,89

Zu Schätzungen des Einflusses eines Fehlers in der L_1-Bestimmung kann diese Tafel gut für praktische Fälle gebraucht werden.

Die Tafeln 5b) und 5d) zeigen, daß n und noch mehr L_1 recht stark von n_0 bzw. L_{10} abweichen können, ohne daß $|\mathfrak{H}|$ dadurch stark beeinflußt wird. Bei Schätzungen kann man die aus den Tafeln 5b) und 5d) entnommenen prozentischen Abweichungen des $\frac{1}{|\mathfrak{H}|}$ von $\frac{1}{|\mathfrak{H}_0|}$ einfach addieren.

6. Der Einfluß des τ und des ω auf $|\mathfrak{H}|$.

Mit ω_0 haben wir den gewählten ω-Wert, für den n_0 bestimmt wird, bezeichnet.

Aus 4l) geht hervor, daß $|\mathfrak{H}_0|$ d. h. das erreichbare Minimum von $|\mathfrak{H}|$ mit wachsendem $\omega_0\tau$ abnimmt, so daß es sich bei wachsendem $\omega_0\tau$ asymptotisch von oben dem Wert

$$2\sqrt{Z_1 Z_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6a)$$

nähert.

Veränderung des $|\mathfrak{H}|$ bei konstantem $n = n_0$, konstantem Z_1 und Z_2 und veränderlichem ω: 4e) kann geschrieben werden

$$\mathfrak{H} = j\left(\frac{Z_2}{n_0} + n_0 Z_1 + 2 n_0 \frac{L_1}{\tau}\right) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{Z_2}{n_0} + \frac{n_0 L_1}{\tau}\right)\left(\frac{Z_1}{L_1} + \frac{1}{\tau}\right) \quad \ldots \quad 6b)$$

Bei wachsendem ω nimmt das zweite Glied der rechten Seite ab, und also auch $|\mathfrak{H}|$.

Satz 6c): Wir haben also in diesem Paragraphen gefunden, daß der Übertrager günstiger gestaltet werden kann, je größer τ und das für die Konstruktion und für die Beurteilung zugrunde zu legende ω_0 sind;

Satz 6d): und daß der Übertrager, wenn er fertig vorliegt, günstiger wirkt, je größer ω ist.

Es wird sich zeigen, daß diese Sätze unter Umständen verändert werden müssen, wenn auch die Kapazitäten und die Eisenverluste berücksichtigt werden (vgl. § 16). Die Abhängigkeit der $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von ω ist meistens zu schwach, um Ausnahmen von den Sätzen 6c) und 6d) zu veranlassen.

7. Komplexe $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$.

Ein komplexes $\mathfrak{Z}_2$ wirkt, wie leicht ersichtlich, auf die n_0- und L_{10}-Bestimmung nur so, daß in 4f), 4g) und 4l) $|\mathfrak{Z}_2|$ an Stelle von Z_2 zu setzen ist.



Satz 7a): Die Phase des $\mathfrak{Z}_2$ hat also keinen Einfluß auf die Optimumbedingungen für den Übertrager und keinen Einfluß auf die Größe des erreichbaren Minimums $|\mathfrak{H}_0|$.

Wenn $\mathfrak{Z}_1$ komplex ist und den Phasenwinkel φ hat, so setzen wir in 4e)

$$\mathfrak{Z}_1 = Z_1(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7b)$$

Wir dividieren 4e) durch $\cos\varphi + j\sin\varphi$. Dies ist gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit $\cos\varphi - j\sin\varphi$.

Es ergibt sich

$$|\mathfrak{H}| = \frac{1}{\omega}\left|\frac{Z_2}{n}\left[\frac{Z_1}{L_1} + \frac{1}{\tau}\cos\varphi + \omega\sin\varphi + j\omega\left(\cos\varphi - \frac{1}{\omega\tau}\sin\varphi\right)\right] + \right.$$
$$\left. + n\left[\frac{Z_1}{\tau} + \frac{L_1}{\tau^2}\cos\varphi + \frac{2L_1\omega}{\tau}\sin\varphi + j\omega\left(Z_1 + 2\frac{L_1}{\tau}\cos\varphi - \frac{L_1}{\omega\tau^2}\sin\varphi\right)\right]\right| \quad . \; . \; . \quad 7c)$$

und hieraus als Optimumbedingungen:

$$n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1 + 2R_1\cos\varphi - \frac{R_1}{\omega_0\tau}\sin\varphi}\sqrt{\frac{\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\omega_0\tau}\right)^2 + \left(\frac{Z_1 + R_1\cos\varphi + \omega_0 L_1\sin\varphi}{\omega_0\tau R_1}\right)^2}{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left(\frac{Z_1 + R_1\cos\varphi + 2\omega_0 L_1\sin\varphi}{Z_1 + 2R_1\cos\varphi - \frac{R_1}{\omega_0\tau}\sin\varphi}\right)^2}} \quad 7d)$$

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 Z_2\tau}{2\omega_0 n_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{2\omega_0\tau}\right)^2 + \left(\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{2\omega_0\tau}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7e)$$

Wir bezeichnen die aus den Formeln 7c), 7d) und 7e) hervorgehenden n_0-, L_{10}- und $\mathfrak{H}_0$-Werte mit einem Strich so: $\overline{n}_0$, $\overline{L}_{10}$ und $\overline{\mathfrak{H}}_0$. Die ungestrichenen Buchstaben mögen zu dem Fall $\varphi = 0$, d. h. zu den Formeln 4e), 4f) und 4g) gehören.

Die Abhängigkeit der Größen $\overline{n}_0$, $\overline{L}_{10}$ und $|\overline{\mathfrak{H}}_0^2|$ von φ wird durch die folgende Tafel 7f) demonstriert. Bei von 0^0 bis 90^0 wachsendem φ nimmt $\overline{n}_0/n_0$ dauernd (annähernd linear) zu und $\overline{L}_{10}/L_{10}$ dauernd ab. Gleichzeitig wächst das erreichbare Minimum $|\overline{\mathfrak{H}}_0^2|$ bis zu seinem höchsten Wert bei etwa $\varphi = 60^0$, um nachher wieder abzunehmen.

Tafel 7f).

Bezeichnung für die Tafel: $N = \overline{n}_0/n_0$; $l = \overline{L}_{10}/L_{10}$; $h = \left|\frac{\overline{\mathfrak{H}}_0^2}{\mathfrak{H}_0^2}\right|$.

$\omega\tau$	z. B. entsprechend	$\varphi =$	0^0	10^0	30^0	60^0	90^0
6	$\tau = 0{,}002$	N	1,00	1,06	1,19	1,38	1,57
		l	1,00	0,93	0,83	0,74	0,64
	$\omega = 3000$	h	1,00	1,14	1,32	1,36	1,16
10	$\tau = 0{,}002$	N	1,00	1,05	1,15	1,30	1,46
		l	1,00	0,95	0,87	0,77	0,69
	$\omega = 5000$	h	1,00	1,16	1,37	1,44	1,29
14	$\tau = 0{,}002$	N	1,00	1,04	1,13	1,26	1,41
		l	1,00	0,96	0,88	0 79	0,71
	$\omega = 7000$	h	1,00	1,17	1,40	1,51	1,35
20	$\tau = 0{,}004$	N	1,00	1,03	1,10	1,22	1,33
		l	1,00	0,92	0,90	0,83	0,75
	$\omega = 5000$	h	1,00	1,18	1,42	1,57	1,44

Der erreichbare Effekt wird also durch φ verschlechtert (in praktischen Fällen bis hinauf zu $50\,^0/_0$). Dazu tritt eine etwas geringere (bis hinauf zu $25\,^0/_0$) Verschlechterung des Effekts, wenn n_0 und L_{10} nach 4g) und 4f) anstatt nach 7d) und 7e) berechnet werden.

8. Ungleiche τ_1 und τ_2.

Unter den gemachten vereinfachenden Voraussetzungen gilt [vgl. 4c) und 4d)]:

$$L_1 = \frac{M}{n}; \qquad L_2 = nM; \qquad L_1 = \tau_1 R_1; \qquad L_2 = \tau_2 R_2 \quad \ldots\ldots \quad 8a)$$

In ähnlicher Weise, wie 4e) aus 2e) und 4f) und 4g) aus 4e) berechnet wurden, erhalten wir hier von 2e) ausgehend:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{j\omega}\left\{\frac{Z_2}{n}\left(\frac{Z_1}{L_1} + \frac{1}{\tau_1} + j\omega\right) + n\left[\frac{Z_1}{\tau_2} + \frac{L_1}{\tau_1\tau_2} + j\omega\left(Z_1 + L_1\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\right)\right]\right\} \quad . \quad 8b)$$

$$n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1 + R_1\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{Z_1 + R_1}{\omega_0 \tau_1 R_1}\right)^2}{1 + \left\{\frac{Z_1 + R_1}{\omega_0 \tau_2\left[Z_1 + R_1\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)\right]}\right\}^2}} \quad \ldots \quad 8c)$$

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 Z_2}{n^2 \omega_0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 \tau_1 \tau_2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \quad 8d)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann eine Verschiedenheit der τ_1 und τ_2 berücksichtigt werden. Mit Hinweis auf die Tafeln 5b) und 5d), die auch zu Schätzungen des jetzt vorliegenden Falles benutzt werden dürfen, kann behauptet werden, daß man in praktischen Fällen meistens nur mit e i n e m τ zu rechnen braucht. Weil in 8c) τ_1 aber nicht τ_2 in dem einflußreicheren Zähler unter der Wurzel vorkommt, setzt man zweckmäßigerweise $\tau = \tau_1$.

9. Windungskapazität einer Spule.

Die Spule möge m übereinander gewickelte Lagen haben. Es wird ein stationärer Zustand angenommen, bei dem die Potentialdifferenz zwischen den Spulenenden V ist. Die von der gesamten Windungskapazität aufgenommene positive Elektrizitätsmenge Q soll berechnet werden. Die gesamte Windungskapazität k wird definiert durch

$$k = \frac{Q}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9a)$$

Die Oberfläche einer Wicklung möge f sein. Alle derartige Flächen werden annäherungsweise gleich groß angesetzt.

Zuerst denken wir uns, daß die Spule aus Metallbandwindungen besteht. Die einzelnen Windungen mögen eng aneinander schließen, doch ohne Kontakt. Zwischen den Wicklungen seien Isolationslagen von der Dicke d vorhanden. Für diesen Fall erhalten wir das Kraftlinienbild Abb. 2, I.

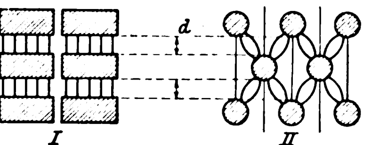


Abb. 2.

In Wirklichkeit besteht die Spule aus Drahtwindungen. Die Drähte haben kreisförmigen Querschnitt. Das betreffende Kraftlinienfeld hat etwa die Form der Abb. 2, II. Bei gleicher Potentialdifferenz zwischen den entsprechenden Lagen muß offenbar die Kraftlinienzahl und also auch die Gesamtladung

bei I größer als bei II sein, denn im letzten Fall ist die mittlere Kraftlinienlänge größer und demnach die mittlere Feldkraft kleiner als bei I. Wir berechnen die Kapazität k_1 für den Fall I. Die zu II gehörende Kapazität k ist

$$\left.\begin{array}{l} k = \varkappa k_1, \\ 0 < \varkappa < 1 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 9b)$$

wo

ist.

Berechnung des k_1. Die mittlere Potentialdifferenz zwischen zwei Lagen ist

$$\frac{1}{2} \frac{V}{m-1}.$$

Die positive Ladung einer Schicht ist also:

$$\frac{1}{2} \frac{V}{m-1} \cdot \frac{f\varepsilon}{4\pi d},$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante der Isolation ist.

Es sind $m-1$ derartige positive Schichtladungen vorhanden. Es gilt also

$$Q = (m-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{m-1} \cdot \frac{f\varepsilon}{4\pi d} = V \frac{\varepsilon f}{8\pi d}$$

und schließlich

$$k_1 = \frac{\varepsilon f}{8\pi d} \quad \ldots \ldots \quad 9c)$$

Wenn r der mittlere Radius einer Spulenlage und l die Spulenlänge ist, so kann man setzen

$$f = 2\pi r l$$

und also

$$k_1 = \varepsilon \frac{rl}{4d} \quad \ldots \ldots \quad 9d)$$

und laut 9b)

$$k = \varkappa\varepsilon \frac{rl}{4d} \quad \ldots \ldots \quad 9e)$$

$\varkappa$ muß für eine zweilagige Spule größer sein als für mehrlagige, weil bei einer zweilagigen Spule die Kraftlinien sich stärker auf die einander nächstliegenden Flächenteile konzentrieren.

Wenn eine Spule, wie die betrachtete, sich in einem Wechselstromkreis eingeschaltet befindet, schluckt die Windungskapazität einen Teil des zur Spule gelangenden Stromes. Wenn dabei die Stromwelle so lang ist, daß die Spule nur einen kleinen Teil der Welle umfaßt, wirkt die Windungskapazität wie eine Kapazität von der in 9e) definierten Größe k. Wir können demnach k die Windungskapazität der Spule für quasistationäre Ströme nennen.

Eine experimentelle Bestätigung von 9e) und der daran geknüpften Aussage über $\varkappa$ für zwei- und mehrlagige Spulen findet man in einer Abhandlung von W. Rietz[1]. Seine Messungen zeigen, daß die wirksame Windungskapazität durch 9e) gut ausgedrückt sein dürfte, auch wenn die Spule recht beträchtliche Teile einer Welle umfaßt. Man kann aus Rietz' Daten ausrechnen, daß für Seide und Papierisolation

bei einer zweilagigen Spule $\varkappa\varepsilon$ = etwa 2,5
„ „ mehrlagigen „ $\varkappa\varepsilon$ = etwa 1,7 ist.

Wenn die Spule genügend kleine Dämpfung hätte, um Eigenschwingungen ausführen zu können, würde bei solchen die Stromstärke in der Spulenmitte am größten

[1] W. Rietz, Ann. d. Phys. **41**, 543, 1913.

und an den Spulenenden gleich null sein. Die Windungskapazität wäre demnach für den Schwingungsvorgang je nach der Entfernung vom Spulenende verschieden gut ausgenützt. Wenn L die Selbstinduktion der Spule für quasistationäre Ströme wäre, so würde die Eigenfrequenz ω_1 der Spule nicht durch

$$\omega_1^2 kL = 1,$$

sondern durch

$$\omega_1^2 kL\alpha = 1, \qquad 9f)$$

wo $0 < \alpha < 1$ ist, definiert sein.

Wir werden im folgenden die mathematische Größe ω_0, welche durch

$$\omega_0^2 kL = 1 \qquad 9g)$$

definiert wird, die Quasieigenfrequenz der Spule nennen.

10. Hysteresis.

Telephonübertrager arbeiten angenähert mit Gansschen[1]) reversiblen magnetischen Vorgängen. Die sehr kleinen Hysteresisschleifen, welche noch vorkommen, sind angenäherte Ellipsen. Man kann dies mit großer Genauigkeit in Rechnung setzen, indem man annimmt, daß das magnetische Feld B mit einem gewissen kleinen Phasenwinkel φ dem von den Amperewindungen herrührenden H-Feld nachhinkt. Wenn also

$$H = H_1 + H_2 \cos \omega t$$

ist, so setzt man

$$B = B_1 + B_2 \cos(\omega t - \varphi), \qquad 10a)$$

wo

$$B_2 = \mu' H_2 \qquad 10b)$$

ist. Dabei bedeutet μ' die Gans sche differentielle Permeabilität.

Beim Rechnen mit komplexen Vektorsymbolen stellt sich der Zusammenhang zwischen $B_2 \cos(\omega t - \varphi)$ und $\mu' H_2 \cos \omega t$ folgendermaßen, 10c), dar:

Es sei $\mathfrak{B}_2$ der komplexe Vektor für $B_2 \cos(\omega t - \varphi)$ und $\mathfrak{H}_2$ der komplexe Vektor für $H_2 \cos \omega t$. Außerdem sei $\delta = \operatorname{tg} \varphi$. Dann wird (vgl. Abb. 3).

$$\mathfrak{B}_2 = \mu' \mathfrak{H}_2 \frac{1 - j\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \qquad 10c)$$

oder bei kleinem δ angenähert

$$\mathfrak{B}_2 = \mu' \mathfrak{H}_2 (1 - j\delta) \qquad 10d)$$

Die Induktionsspannungen, von deren absoluten Verminderung infolge δ wir absehen können, werden natürlich um denselben Phasenwinkel φ wie die Magnetfelder verzögert. Dies kommt zum Ausdruck, wenn wir in den Übertragergleichungen statt L_1 die Größe

$$L_1 (1 - j\delta) \qquad 10e)$$

verwenden.

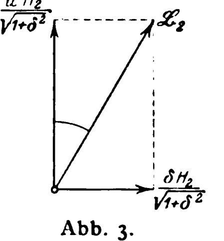


Abb. 3.

Wir können weiter angenähert damit rechnen, daß die Hysterese bei allen in Frage kommenden, im Übertragerkern auftretenden Magnetfeldern dasselbe Nachhinken veranlaßt. Wir haben also anstatt der oben gebrauchten Größen M und L_2 die Größen

$$\left.\begin{array}{l} M(1 - j\delta) \\ L_2(1 - j\delta) \end{array}\right\} \qquad 10f)$$

und

einzuführen.

[1]) Siehe z. B. Graetz, Handbuch der Elektr. u. Magnetismus, 1913, Bd. IV, Seite 135.

Durch den Gebrauch der Ausdrücke 10e) und 10f) werden die „Hystereseverluste“ in den Übertragergleichungen berücksichtigt.

11. Wirbelstromverluste.

Die Wirbelströme entstehen durch Induktion infolge der Magnetfeldveränderung genau so wie die Ströme im sekundären Kreis eines Übertragers. Ihr eigenes Magnetfeld hat also eine Phasendifferenz zwischen -90^0 und -180^0 gegen das sie erzeugende Feld. Wir denken uns das Magnetfeld der Wirbelströme in zwei Komponenten zerlegt, die eine 180^0 hinter dem ohne sie vorhandenen Magnetfeld, die andere um 90^0 hinter demselben Feld laufend. Die erste Komponente vermindert das für das Eisen in Rechnung zu setzende μ', gibt aber nicht Veranlassung zur Umwandlung elektrischer Energie in Wärme. Wir denken uns diese Komponenten beim Ansetzen des μ' berücksichtigt. Die zweite Komponente wirkt genau so wie die von der Hysterese stammende Komponente $\frac{\delta H_2}{\sqrt{1+\delta^2}}$ in der Abb. 3. Sie veranlaßt also auch Faktoren von der Form

$$(1 - j\delta') \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11a)$$

zu den Induktionskoeffizienten. Dabei ist δ' proportional zu ω, denn die Wirbelströme selbst sind ja nicht nur proportional dem sie erzeugenden Feld, sondern auch proportional der Frequenz. Wir setzen $\delta' = \omega\vartheta$.

Sowohl Hysterese wie Wirbelströme werden berücksichtigt, wenn wir anstatt der der Größen L_1, M, L_2 die Größen

$$\left.\begin{array}{r} L_1[1 - j(\delta + \omega\vartheta)] \\ M[1 - j(\delta + \omega\vartheta)] \\ L_2[1 - j(\delta + \omega\vartheta)] \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11b)$$

verwenden. Weil sowohl die Hysterese- und Wirbelstromarbeit wie die Induktionskoeffizienten proportional dem Eisenvolumen sind, sind δ und $\omega\vartheta$ von diesem Volumen unabhängig.

ϑ ist bekanntlich proportional dem Quadrat der Eisenblechdicke.

Für 0,03 mm dicke Bleche gilt bei kleinen H-Amplituden[1]) etwa:

	δ	ϑ
Schwedisches Eisen geglüht:	0,02	$5 \cdot 10^{-6}$
Hochlegiertes „ „	0,01	$1,5 \cdot 10^{-6}$

Im folgenden setzen wir

$$\delta + \omega\vartheta = \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad 11c)$$

Es ist also etwa

bei	$\omega = 3000$	5000	10 000
für schwed. gegl. Bleche	$\varrho = 0,035$	0,045	0,070
„ legierte „ „	$\varrho = 0,015$	0,018	0,025

Diese Werte gelten für den Fall, daß praktisch keine Kraftlinien (z. B. Streuungslinien) gegen die Blechoberflächen senkrechte Komponente haben.

12. Streuung.

Die Streuung veranlaßt unter Umständen (vgl. Ende des vorigen Paragraphen) eine Vergrößerung des ϱ. Diese Wirkung möge beim Ansetzen des ϱ berücksichtigt worden sein.

[1]) Auf die Abhängigkeit des ϱ von der H-Amplitude, dem Entmagnetisierungsfaktor und dem Material sei hier nicht weiter eingegangen.



Ein anderer Effekt der Streuung ist, daß nicht alle von der einen Wicklung herrührenden Kraftlinien der andern Wicklung voll durchsetzen. Hierdurch wird die gegenseitige Induktion herabgesetzt. Diese Wirkung können wir berücksichtigen, indem wir anstatt M die Größe

$$M(1 - \sigma) \quad \ldots \ldots \quad 12a)$$

verwenden, wobei σ angibt, ein wie großer Teil des primären Feldes durch Streuung für die sekundäre Wicklung verloren geht.

13. Übertragergleichungen bei Berücksichtigung von Eisenverlusten, Streuung, Windungskapazität und gegenseitiger Kapazität der Wicklungen.

Die Windungskapazität raubt den Windungen Ströme. Die mittleren Windungen verlieren in der primären Spule mehr, in der sekundären weniger als die Endwindungen. Denkt man sich die betreffenden Kapazitäten nicht mehr gleichmäßig verteilt, sondern nur an den Wicklungsenden wirksam, so ist ihr Einfluß ein etwas veränderter, indem sie allen Windungen gleich viel Strom rauben. Wenn es sich um quasistationäre Ströme handelt, wenn also die Spule nur einen kleinen Teil einer Welle umfaßt, so ist die Ladungsphase aller Teilkapazitäten angenähert die gleiche. Mit Bezug auf die Ladungsphase begeht man also keinen großen Fehler, wenn man sich die in Wirklichkeit verteilten Kapazitäten in bestimmten Punkten vereinigt denkt. Ebenso kann man sich die gegenseitigen Wicklungskapazitäten (zwischen der primären und der sekundären Wicklung) zu bestimmten Punkten verlegt denken. Wir denken uns weiterhin die Windungskapazitäten k_1 und k_2 und die gegenseitige Wicklungskapazität h so verlegt oder, wenn man so sagen soll, so an den Übertrager angeschlossen wie es die Abb. 4 veranschaulicht. Allerdings ist dabei zu bemerken, daß je nach der Wickelart h oben, wie in der Abbildung, oder unten an die sekundäre Wicklung angeschlossen zu betrachten ist. Dank des h kann der Übertrager auch einseitig angeschlossen Energie übertragen, indem er als Kapazität wirkt. Auf diese Frage soll allerdings hier nicht näher eingegangen werden.

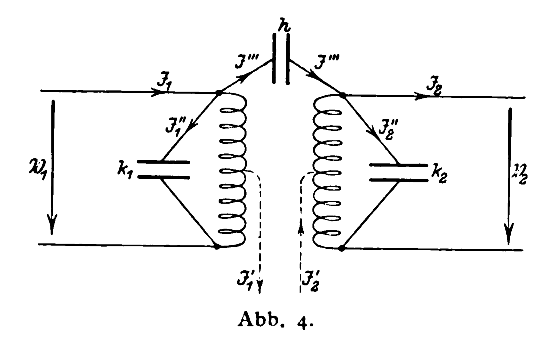


Abb. 4.

Wenn k_1, k_2 und h die ganzen für quasistationäre Ströme berechneten Kapazitäten bedeuten, so wird, laut dem oben Gesagten, bei den Berechnungen die Wirkung der Kapazitäten etwas überschätzt. Da es sich für uns überhaupt nur um recht rohe Schätzungen handelt, können wir in der etwas zu hohen Bewertung der Kapazitätswirkungen einen zweckmäßigen Sicherheitskoeffizienten unserer Schätzungen erblicken.

Aus der Abb. 4 (vgl. Breisigs „Theoret. Telegr." Fig. 188, Seite 338) ist zu ersehen:

1. der gedachte Anschluß der Kapazitäten; mit Bezug auf den rechten Anschluß des h vgl. oben;
2. die Bezeichnung der Ströme und Spannungen;
3. die positive Richtung der Ströme und Spannungen.

Der Wickelsinn ist so gedacht, daß die magnetischen Felder positiver Ströme J_1' und J_2' gegeneinander wirken.

In Übereinstimmung mit den §§ 11 und 12 und mit der durch 4c) und 4d) ausgedrückten Annahme über n, τ und die Kupfermengen der Wicklungen brauchen wir folgende Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \tau R_1 \\ \mathfrak{L}_1 &= R_1 + (j+\varrho)\,\omega L_1 \\ \mathfrak{L}_2 &= R_2 + (j+\varrho)\,\omega L_2 = n^2 \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{M} &= (j+\varrho)(1-\sigma)\,\omega M = (j+\varrho)(1-\sigma)\,\omega n L_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 13a)$$

Es gilt (vgl. Breisigs Gleichungen 302)!):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}_2 + \frac{\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}}\mathfrak{J}_2' \\ \mathfrak{J}_1' &= \frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}_2 + \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}}\mathfrak{J}_2' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13b)$$

Außerdem gilt infolge der durch die Abb. 4 veranschaulichten Annahmen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \mathfrak{J}_1' + \mathfrak{J}_1'' + \mathfrak{J}''' \\ \mathfrak{J}_2 &= \mathfrak{J}_2' - \mathfrak{J}_2'' \pm^{1)} \mathfrak{J}''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13c)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1'' &= j\omega \mathfrak{B}_1 k_1 \\ \mathfrak{J}_2'' &= j\omega \mathfrak{B}_2 k_2 \\ \mathfrak{J}''' &= j\omega (\mathfrak{B}_1 \mp^{1)} \mathfrak{B}_2) h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13d)$$

Mit Hilfe von 13b), c) und d) berechnen wir die Koeffizienten der Gleichungen 2b). Wir erhalten, wenn $\Theta = \left[1 \pm j\omega h \frac{\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{M}}\right]^{-1}$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{\Theta}{\mathfrak{M}}\left[\mathfrak{L}_1 + j\omega(\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2)(k_2 + h)\right] \\ \mathfrak{E} &= \frac{\Theta}{\mathfrak{M}}(\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2) \\ \mathfrak{F} &= \frac{1}{\mathfrak{M}}\left\{1 + j\omega\left[\Theta\mathfrak{L}_1\left(k_1 + h\left[1 \mp \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}}\right]\right) + \mathfrak{L}_2(k_2 + h)\right] - \right. \\ &\qquad \left. - \omega^2\Theta(\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2)\left[k_1 + h\left(1 \mp \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}}\right)\right](k_2 + h) \mp j\omega h\mathfrak{M}\right\} \\ \mathfrak{G} &= \frac{1}{\mathfrak{M}}\left\{\mathfrak{L}_2 + j\omega\Theta(\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2)\left[k_1 + h\left(1 \mp \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}}\right)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \ 13e)$$

Bemerkung: $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ aus 13e) erfüllen, wie leicht bestätigt wird, die Gleichung:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{G} - \mathfrak{E}\mathfrak{F} = \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13f)$$

Die Ausdrücke 13a) werden nun in den Gleichungen 13e) eingesetzt. Dabei machen wir Vereinfachungen auf Grund der folgenden Voraussetzungen 13g):

Voraussetzungen 13g)

$$\varrho \ll 1; \qquad \sigma \ll 1;$$

und für Größen von der Form $\omega^2 Lk$, wo L gleich L_1 oder L_2 und $k = k_1$, k_2 oder h sein kann:

$$\omega^2 Lk \ll 1^{2)}.$$

Wir vernachlässigen demnach höhere Potenzen als die erste von den Größen ϱ, σ und $\omega^2 Lk$.

Auch nehmen wir R_1 als gegen ωL_1 so klein an, daß in sonst ziemlich kleinen Gliedern $\frac{R_1}{\omega L_1}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann.

---

[1]) Das obere Zeichen gilt für die Abb. 4, das untere für den Fall, daß h als unten an die sekundäre Wicklung angeschlossen zu betrachten ist.

[2]) Vgl. § 16!

Wir finden

$$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}^2 = n^2 [R_1^2 + 2(j+\varrho)\omega R_1 L_1 - 2\sigma\omega^2 L_1^2]$$

annähernd gleich

$$2 j \omega n^2 L_1 (R_1 + j\sigma\omega L_1).$$

Weiter ergibt sich:

$$\Theta = \left[1 \pm \frac{j\omega}{1-\sigma} 2nh \left(R_1 - \frac{\sigma\omega L_1}{j+\varrho}\right)\right]^{-1}.$$

Mit Annäherung ist also

$$\Theta = [1 \pm j 2nh (R_1 + j\sigma\omega L_1)]^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13h)$$

Wir erhalten schließlich als mit guter Annäherung gültig:

$$\mathfrak{D} = \frac{\Theta}{(j+\varrho)(1-\sigma)\omega} \left\{\frac{1}{nL_1}[R_1 + (j+\varrho)\omega L_1] - 2\omega^2 n (k_2 + h)(R_1 + j\sigma\omega L_1)\right\} \quad . \quad 13i)$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\Theta n}{(j+\varrho)(1-\sigma)\omega} \left[2\omega j (R_1 + j\sigma\omega L_1 - j\varrho R_1) + \frac{R_1^2}{L_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13k)$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{(j+\varrho)(1-\sigma\omega)n} \left\{\frac{1}{L_1} + \omega^2 [\pm hn - \Theta(k_1 + h[1 \mp n]) - n^2 (k_2 + h)]\right\} \quad . \quad 13l)$$

$$\mathfrak{G} = \frac{n}{(j+\varrho)(1-\sigma)\omega} \left\{\frac{R_1 + (j+\varrho)\omega L_1}{L_1} - 2\omega^2 \Theta [k_1 + h(1 \mp n)][R_1 + j\omega\sigma L_1]\right\} \quad 13m)$$

14. Vollständige Formel für $\mathfrak{H}$.

Wir wollen die Resultate 13i) bis m) in 2e) einsetzen. Um die Formeln übersichtlicher zu machen, verwenden wir die Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \gamma k_1 \\ \omega^2 L_1 k_1 &= p_1 \\ \omega^2 L_2 k_2 &= n^2 \gamma p_1 = p_2 \\ \omega^2 L_1 h &= p_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14a)$$

Laut der Voraussetzungen 13g) haben wir nur die ersten Potenzen der Größen p_1, p_2 und p_3 zu berücksichtigen.

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} = \frac{1}{(j+\varrho)(1-\sigma)\omega} &\left\{\frac{\Theta}{n}\frac{\mathfrak{Z}_2}{L_1}\left[\mathfrak{Z}_1\left(\frac{1}{\Theta} - p_1 - p_3\right) + R_1 + (j+\varrho)\omega L_1\right] + \right. \\ &+ n\frac{\Theta}{\tau}\left[\mathfrak{Z}_1\left(\frac{1}{\Theta} - 2[p_1 + p_3(1 \mp n)] + \frac{\varrho\omega\tau}{\Theta}\right) + R_1(1 + 2\varrho\omega\tau) - \right. \\ &- \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\frac{\tau}{\Theta L_1}(\gamma p_1 + p_3) - 2\mathfrak{Z}_2(\gamma p_1 + p_3) - 2\sigma\tau\omega^2 L_1 + \\ &+ j\omega\tau\left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{\Theta} + 2R_1 - 2\sigma L_1[\mathfrak{Z}_2(\gamma p_1 + p_3) + \mathfrak{Z}_1(p_1 + p_3[1 \mp n])]\right)\Bigg] + \\ &\left. + \frac{\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2}{L_1} p_3 (1 \pm \Theta)\right\} \end{aligned}\right\} \quad 14b)$$

15. Reelle, endliche $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$.

Wie in § 4 setzen wir $\mathfrak{Z}_1 = Z_1$ und $\mathfrak{Z}_2 = Z_2$. Wird dies in 14b) substituiert, so erhalten wir eine 4e) entsprechende Gleichung. Wenn wie in § 4 weiter gerechnet wird, so ergibt sich anstatt 4f) mit guter Annäherung[1][2])

---

[1]) Während der Berechnung ist zu beachten, daß laut 14a) die Größen p_1 und p_3 als Faktoren ω und L_1 enthalten.

[2]) Siehe die Fußnote 2 auf nächster Seite.

$$n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1(1 \mp 2\sigma p_3 n_0) + 2R_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\left[\frac{Z_1(1 - p_1 - p_3) + R_1(1 + \omega_0 \tau \varrho)}{R_1}\right]^2}{1 + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\left[\frac{A}{Z_1(1 \mp 2\sigma p_3 n_0) + 2R_1}\right]^2}}$$

wo

$$A = Z_1[1 - 2p_1 - 2p_3(1 \mp n) + \varrho\omega_0\tau] + R_1(1 + 2\varrho\omega_0\tau - 2\omega_0^2\tau^2\sigma) -$$
$$- Z_2(\gamma p_1 + p_3)\left(2 + \frac{Z_1}{R_1}\right) \qquad 15a)$$

Mit einer etwas weiter gehenden Annäherung[1])[2]) erhält man anstatt 4g):

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 Z_2 \tau}{2\omega_0 n^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varrho}{\omega_0 \tau} + \frac{1}{4\omega_0^2 \tau^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15b)$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left[\frac{Z_1(1 - p_1 - p_3) + R_1(1 + \omega_0\tau\varrho)}{R_1}\right]^2 &= S_1 \\ \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}\left[\frac{Z_1(1 - p_1 - p_3[1 + n]) + R_1(1 + \omega_0\tau\varrho)}{R_1}\right]^2 &= S_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 15c)$$

In ähnlicher Weise wie die Gleichung 4k) gewonnen wurde, erhalten wir hier:

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{2Z_2[Z_1(1 \mp 2\sigma p_3 n_0) + 2R_1]}{1 - 2\sigma}\left\{1 + \frac{1 + S_2}{\sqrt{1 + S_1}}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 15d)$$

Die Bedeutung einer Ungenauigkeit der n_0- oder L_{10}-Bestimmung kann mit Hilfe der Tafeln 5b) und 5d) auch für den hier vorliegenden Fall geschätzt werden.

Der Einfluß des τ und des ω_0 auf $|\mathfrak{H}_0^2|$ ist, nach 15d) geschätzt, wesentlich derselbe wie auf Grund der Gleichung 4e) hergeleitet und durch den Satz 6e) ausgedrückt wurde.

Wenn Z_1 und Z_2 nicht sehr verschieden groß sind (das eine etwa höchstens 3 mal so groß wie das andere), ist n nicht sehr von 1 verschieden. Wir können dann p_1 und p_2 zu derselben Größenordnung rechnen. Bedeutend kleiner ist meistens p_3, denn h wird durch eine der Gleichung 9e) ähnliche Formel ausgedrückt, worin die betr. Isolationsdicke d meistens bedeutend größer als bei der Berechnung von k_1 und k_2 anzusetzen ist.

In diesem Fall wirken p_1 und γp_1 auf $|\mathfrak{H}|$ laut 14b) vermindert, d. h. günstig. Bei Vergrößerung des ω wachsen, vgl. 14a), p_1, p_2 und p_3 proportional zu ω^2. Wenn $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$, wie meistens der Fall ist, sich langsamer mit ω ändern, entsteht also eine Vergrößerung von p_1, p_2 und p_3 im Verhältnis zu den übrigen Gliedern des $\mathfrak{H}$-Ausdruckes. Die Vergrößerung von ω erhöht also meistens den günstigen Einfluß der p_1- und p_2-Glieder. Dies hängt damit zusammen, daß wir bei wachsendem ω uns (vgl. die Voraussetzungen 13g) einer Resonanzstelle des Übertragers von unten nähern. Einige p_3-Glieder, deren Vergrößerung für sich ungünstig ist, können sich neben den p_1- und p_2-Gliedern infolge der Kleinheit des p_3 nicht geltend machen. Je nach dem Zeichen des $\mathfrak{Z}'''$ in der unteren Gleichung 13c) wirken, wie ersichtlich, gewisse p_3-Glieder in 14b) vergrößernd oder vermindernd auf $|\mathfrak{H}|$. Durch zweckmäßiges Wickeln kann man den letzten vorteilhaften Fall verwirklichen. Allerdings gewinnt man meistens hierdurch sehr wenig.

---

[1]) L_{10} braucht, vgl. Tafel 5d) nicht so genau wie n_0 bestimmt zu werden.

[2]) Wegen der Methode der sukzessiven Annäherung bei Benutzung der Formeln 15a) und 15b) vgl. § 4 bei den Formeln 4f) und 4g).



Wenn $\mathfrak{Z}_1$ im Verhältnis zu $\mathfrak{Z}_2$ sehr groß ist, so ändert dies unsere bisherigen Schätzungen nur insofern, als es bei dem nötigen großen L_{10}-Wert schwierig sein kann, die Bedingung 13g)

$$p_1 \ll 1$$

zu verwirklichen.

Ein im Verhältnis zu $\mathfrak{Z}_1$ großes $\mathfrak{Z}_2$ dagegen bewirkt eine Hervorhebung der p_1- und p_3-Glieder, wie durch die Behandlung des Falles $\mathfrak{Z}_2 = \infty$ veranschaulicht werden soll.

16. Der Fall $\mathfrak{Z}_2 = \infty$.

In diesem Fall überwiegen die mit $\mathfrak{Z}_2$ multiplizierten Glieder des $\mathfrak{H}$, so daß zunächst von den übrigen abgesehen werden kann. Unser Problem wird hier, $|\mathfrak{H}|$ zu einem Minimum zu machen, wenn

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{Z}_2}{(j+\varrho)(1-\sigma)\omega L_1}\Bigg[\frac{\Theta}{n}\left\{Z_1\left(\frac{1}{\Theta} - p_1 - p_3\right) + R_1 + (j+\varrho)\,\omega L_1\right\} - \\ - n\,\Theta\left(Z_1\frac{1}{\Theta} + 2R_1\right)(\gamma p_1 + p_3) + Z_1 p_3 (1 \pm \Theta)\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \; 16a)$$

ist. Es ist laut (2f) $|\mathfrak{H}| = \dfrac{V\,|\mathfrak{Z}_2|}{V_2}$.

Die günstigen n^2- und L_1^2-Werte werden in ähnlicher Weise wie in § 4 bestimmt, und ergeben sich annähernd zu:

$$n_0^2 = \frac{1}{\omega_0 (Z_1 + 2R_1)(\gamma k_1 + h)}\sqrt{1 + \left[\frac{Z_1(1 - p_1 - p_3) + R_1(1 + \varrho\,\omega_0 \tau)}{\omega_0 \tau R_1}\right]^2}\,, \quad 16b)$$

bezüglicherweise:

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 \tau}{2\,\omega_0^2\, n^2 (\gamma k_1 + h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 16c)$$

Die aus 16c) hervorgehende Größe $\omega_0^2 n^2 L_1 \gamma k_1 = p_2$ wird meistens größer als 1. Hierin liegt ein Verstoß gegen die Bedingung 13g). Eine Durchmusterung der gemachten Vereinfachungen zeigt indessen, daß die Formeln dieses Paragraphen mit guter Annäherung gültig sind, wenn nur $p_1 \ll 1$ und $p_3 \ll 1$ sind.

Durch Einsetzen von 16b) in 16c) erhält man

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1 (Z_1 + 2R_1)\tau}{2\,\omega\sqrt{1 + \left[\dfrac{Z_1(1 - p_1 - p_3) + R_1(1 + \varrho\,\omega_0\tau)}{\omega_0 \tau R_1}\right]^2}} \quad \ldots \; 16c')$$

oder annähernd

$$L_{10}^2 = \frac{Z_1^2 \tau}{2\,\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 16c'')$$

Die letzte Formel ist mit 4g') identisch, ein recht bemerkenswertes Resultat.

Um hier $|\mathfrak{H}_0|$ übersichtlich ausdrücken zu können, verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{Z_1(1 - p_1 - p_3) + R_1(1 + \varrho\,\omega_0\tau)}{\omega_0 \tau R_1} \\ b &= \omega_0 (Z_1 + 2R_1)(\gamma k_1 + h) \\ c &= 2\,\omega_0 Z_1 h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; 16d)$$

Wir erhalten dann annähernd

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{|\mathfrak{Z}_2^2|}{1-2\sigma}\left(\frac{j}{n}+\frac{a}{n}-nb+c\right)^2$$

$$= \frac{|\mathfrak{Z}_2^2|}{(1-2\sigma)n^2}\left[1+a^2+n^4b^2+n^2c^2-2an^2b-2cn(n^2b-a)\right].$$

Wenn wir nun beachten, daß infolge 16b) $1+a^2=n^4b^2$ ist, und daß das Glied n^2c^2 relativ klein ist, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$|\mathfrak{H}_0^2| = \frac{2|\mathfrak{Z}_2^2|}{1-2\sigma}(Z_1+2R_1)\,\omega_0(\gamma k_1+h)(\sqrt{1+a^2}-a)\left(1-\frac{c}{\sqrt{b}\sqrt[4]{1+a^2}}\right) \quad . \; 16e)$$

Die Gleichung 16e) zeigt uns, daß das zu erreichende Minimum $|\mathfrak{H}_0^2|$ nahezu proportional zu ω_0 und (γk_1+h) ist. Hier ist allerdings zu beachten, daß γk_1 praktisch nicht beliebig klein gemacht werden kann, sondern eine untere Grenze besitzt.

Durch eine der für n_0 und L_{10} ausgeführten ähnlichen Berechnung ergibt sich ein günstigster ω-Wert. Man findet, daß $|\mathfrak{H}|$ bei konstantem n und L_1, also bei unverändertem Übertrager, so von ω abhängt, daß es für kleine ω mit ω abnimmt; wenn

$$\omega^2 = \frac{Z_1+R}{n^2L_1(Z_1+2R_1)(\gamma k_1+h)+L_1Z_1(k_1+h)+nL_1Z_1h(1\pm\Theta)},$$

d. h. annähernd

$$\omega^2 n^2 L_1(\gamma k_1+h) = \omega^2 L_2(k_2+h) = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16f)$$

ist, ein Minimum erreicht um für größere ω mit ω zu wachsen. Hier gilt also nicht der Satz 6d).

17. Die Wirkung von σ und ϱ bei endlichen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$.

Auf $|\mathfrak{H}_0^2|$ wirkt σ vergrößernd (also ungünstig) durch den Faktor $\frac{1}{1-2\sigma}$, vgl. 15d).

Die Einwirkung des σ auf n_0 ist vernachlässigbar klein, vgl. 15a).

Bei der Schätzung des Einflusses von ϱ auf $\mathfrak{H}_0$ und n_0 sehen wir von σ-, p_1- und p_3-Gliedern ab. Wir setzen demnach:

$$\left.\begin{aligned} &|\mathfrak{H}_0^2| = 2Z_2(Z_1+2R_1)(1+\sqrt{1+S}) \\ \text{und}\quad &n_0^2 = \frac{Z_2}{Z_1+2R_1}\sqrt{1+S} \\ \text{wo}\quad &S = \left[\frac{1+s(1+\omega_0\tau\varrho)}{\omega_0\tau s}\right]^2 \quad \text{und} \quad s = \frac{R_1}{Z_1} \text{ ist.}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 17a)$$

Annähernd gilt

$$\left.\begin{aligned} &1+S = (1+S_0)(1+S_1), \\ \text{wo}\quad &S_0 = \left[\frac{1+s}{\omega_0\tau s}\right]^2 \\ \text{und}\quad &S_1 = \frac{2s\varrho\omega_0\tau\cdot(1+s)^2}{(1+s)(1+S_0)(\omega_0\tau s)^2} = 2\varrho\frac{1+s}{\omega_0\tau s(1+S_0)}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 17b)$$

Mit Hilfe von 17a) und b) ist die Wirkung von ϱ leicht zu schätzen. Sie ist, wenn keine Kraftlinien senkrecht zu den Eisenblechen laufen, und wenn die Blechdicke unterhalb 0,05 mm liegt, so daß etwa die unter 11c) angegebenen Größenordnungen gelten, unbedeutend. Da ϱ [vgl. 11c)] linear mit — aber nicht proportional zu — ω wächst, nimmt die Bedeutung des ϱ bei wachsendem ω etwas ab.

Ein Beispiel: Wenn $\tau\omega = 4$ (also $s = 0{,}29$) und $\varrho = 0{,}1$ sind, bewirkt das Vorhandensein von ϱ

eine Vergrößerung von n_0^2 um $4\,\%$,
" " " $|\mathfrak{H}^2|$ " $2\,\%$.

Ein vorkommender ϱ-Wert ist $\varrho = 0{,}5$. Mit diesem erhält man im obigen Beispiel bzw. $12\,\%$ und $6\,\%$.

Bei der Beurteilung der Eisenwirkung darf die in § 11 erwähnte Verminderung des μ' nicht außer acht gelassen werden.

Bemerkung: In der Praxis geschieht die Berücksichtigung des ϱ oft so, daß man anstatt τ und R_1 ein τ' und ein R_1' einführt, so gewählt, daß

$$\tau' L_1 = R_1 + \varrho\omega L_1 = R_1'$$

wird. Dieses Verfahren ist unzulässig. Man erhält dadurch allerdings, wie leicht bestätigt, einen richtigen Ausdruck für S. Der in $|\mathfrak{H}^2|$ und n_0^2 vorhandene Faktor $Z_1 + 2R_1$ wird aber fälschlicherweise durch den größeren $Z_1 + 2R_1'$ ersetzt. Vor allen Dingen wird L_{10}, das nach 15b) nahezu unabhängig von ϱ ist, bei Benutzung von τ' ganz unrichtig (z. B. 1,5 mal zu groß) bestimmt. Man soll also τ und R_1 auf Gleichstromwiderstand beziehen.

18. Komplexe $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$.

Im wesentlichen gelten die Resultate des Paragraphen 7.

19. Optimumbedingungen für Übertragerwirkung in beiden Richtungen.

In den häufigsten Fällen müssen in der Telephontechnik die Übertrager für Energievermittlung in beiden Richtungen gebaut werden. Die in den vorhergehenden Paragraphen gefundenen Optimumbedingungen sind aber meistens nicht für beide Übertragerrichtungen gleichzeitig erfüllbar. Wir betrachten zuerst den in § 4 behandelten Fall. Die Formel 4f) gibt das günstigste $n = n_0$, wenn der Energiestrom von $\mathfrak{Z}_1$ zu $\mathfrak{Z}_2$ übermittelt wird.

Für die umgekehrte Übertragerrichtung lautet die entsprechende n-Formel, wenn das günstigste n jetzt als n_1 bezeichnet wird:

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{Z_1}{Z_2 + 2n_1^2 R_1} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}\left(\frac{Z_2 + n_1^2 R_1}{n_1^2 R_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}\left(\frac{Z_2 + n_1^2 R_1}{Z_2 + 2n_1^2 R_1}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \quad 19a)$$

Die Formel 19a) gibt nun leider ein n_1, das nicht mit dem aus 4f) hervorgehenden n_0 übereinstimmt. Um beide Bedingungen 4f) und 19a) zu berücksichtigen, können wir mit einem n_m-Wert rechnen, der gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{n_0 n_1}$ ist. Diese Berechnung können wir für praktische Fälle ein für allemal ausführen. Es wird im nächsten Paragraphen bewiesen, daß 4f) in den meisten praktischen Fällen ergibt

$$\text{etwa } n_0^2 = 0{,}8\,\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Ebenso gibt 19a)

$$\frac{1}{n_1^2} = 0{,}8\,\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Das geometrische Mittel n_m ist demnach mit guter Annäherung

$$n_m^2 = \frac{Z_2}{Z_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19b)$$

Die Formel 19b) ist nun gerade die Breisigsche Formel 4f').

Die Formel 4g) gibt das günstigste L_{10} für beide Übertragerrichtungen.

Auch in den Fällen, wo $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ Phasenwinkel besitzen oder die Windungskapazität berücksichtigt wird, können wir ein mit dem erwähnten ähnliches Verfahren verwenden, um n zu bestimmen. Der so ermittelte n-Wert wird meistens näher an dem Wert der Breisigschen Formel liegen, als es die n-Werte für einseitige Übertragerwirkung tun würden.

20. Praktisch zulässige Vereinfachungen.

Wir wollen uns ein Urteil darüber verschaffen, mit welcher Genauigkeit n_0 und L_{10} in praktischen Fällen bestimmt werden müssen. Die für $|\mathfrak{H}|$ aufgestellten Formeln interessieren uns hier also, insofern sie über den Einfluß einer Ungenauigkeit der n_0- und L_{10}-Bestimmungen Auskunft geben.

Dabei setzen wir zunächst voraus, daß der Übertrager nur von $\mathfrak{Z}_1$ nach $\mathfrak{Z}_2$ Energie vermitteln soll. Wir werden finden, daß man meistens schon in diesem Fall recht gut mit den Breisigschen Formeln 4f′) und 4g′) auskommt. Laut § 19 treffen diese Formeln das Richtige noch besser, wenn es sich um Energievermittlung in beiden Richtungen handelt. Hierfür führen wir keine besondere Schätzung aus.

Der Streuungskoeffizient σ hat keinen merklichen Einfluß auf n_0 und L_{10}. Man sucht ihn natürlich, um $|\mathfrak{H}|$ zu verringern, möglichst klein zu machen, braucht ihn aber bei der Berechnung von n_0 und L_{10} nicht zu berücksichtigen.

Praktisch kommen fast nur Fälle in Frage, bei denen $\omega\tau > 4$ und $\frac{1}{6} < \frac{R_1}{Z_1} < \frac{1}{2}$ ist.

In solchen Fällen wird, bei Benutzung von Eisendrähten oder von Eisenblechen mit der üblichen Dicke $< 0{,}05$ mm, die Anwesenheit von ϱ die n_0- und L_{10}-Werte wohl nur um den vernachlässigbar kleinen Betrag von weniger als $10\,^0/_0$ verändern, so daß auch ϱ bei Berechnung von n_0 und L_{10} vernachlässigt werden kann. Die mancherseits übliche Art, die Eisenverluste bei der Berechnung des τ mitzuzählen, gibt Fehler (vgl. das Ende vom § 17).

Wie weiter unten näher begründet wird, kann man meistens auch die von k_1, k_2 und h herrührenden Glieder vernachlässigen. Es ist sogar meistens gestattet, auch an den Formeln 4f) und 4g) weitergehende Vereinfachung vorzunehmen, so daß folgender, schon ausgesprochener Satz behauptet werden kann:

Satz 20a): Bei reellen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von derselben Größenordnung leisten die Breisigschen Formeln 4f′) und 4g′) praktisch genügende Genauigkeit.

Wir wollen nun dies beweisen, nämlich daß die Formeln 4f′) und 4g′) die Formeln 4f) und 4g) ersetzen können. Wir bezeichnen die aus den erwähnten Breisigschen Formeln hervorgehenden Optimumwerte mit n′ und L′. Wenn n_0 und L_{10} die aus unseren Formeln 4f) und 4g) hervorgehenden Werte sind, so finden wir

Tafel 20b)

für	$\omega\tau = 3$	10	30
	$n_0^2/n'^2 = 0{,}78$	0,79	0,83

Alle diese Werte entsprechen einem Quotienten $|\mathfrak{H}'^2|/|\mathfrak{H}_0^2|$ von etwa 1,02.

Die angegebenen $\omega\tau$-Werte umfassen das praktisch in Frage kommende $\omega\tau$-Gebiet.

Die Abweichung des $|\mathfrak{H}'^2|$ vom $|\mathfrak{H}_0^2|$ ist praktisch vernachlässigbar.

Fast genau gleichwertig mit 4f) ist offenbar laut Tafel 20b) die Formel:

$$n_0^2 = 0{,}8\,\frac{Z_2}{Z_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20c)$$



Es ist nun leicht sich davon zu überzeugen, daß die Größen p_1 und γp_1, wenn nur keine von ihnen $1/4$ übersteigt und wenn $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von derselben Größenordnung sind, das oben berechnete n_0^2/n'^2 näher an 1 rücken lassen, d. h. etwas verbessernd auf n' wirken.

Wir haben hierdurch die Behauptung begründet, daß die Kapazitäten bei nicht sehr verschiedenen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ meistens nicht berücksichtigt werden brauchen. Anders verhält es sich, wie im § 16 bewiesen, wenn $\mathfrak{Z}_2$ sehr groß ist.

Wenn $\mathfrak{Z}_1$ einen großen Phasenwinkel hat, kann die Benutzung der Breisigschen Formeln für n_0 und L_{10} zu Effektverlusten bis hinauf zu etwa 25% (vgl. §§ 7 und 18) führen. Manchmal erachtet man solche Verluste als gering. Die Breisigschen Formeln wären dann für alle Fälle außer dem eines großen Wertes $|\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1|$ recht brauchbar, ganz besonders, wie gesagt, im Falle beiderseitiger Energievermittlungsaufgabe des Übertragers.

21. Übersicht.

Zu lösendes Problem: Zwei Leitungsgebilde mit den Scheinwiderständen, bzw. Charakteristiken $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sollen mittels eines Übertragers verbunden werden. Es gilt den zweckmäßigsten Übertrager zu berechnen (§ 1).

Für die in das zweite Leitungsgebilde gelangende Energie, $\mathfrak{W}$, wird eine allgemeine Formel 2g) hergeleitet, aus welcher hervorgeht, daß $\mathfrak{W}$ direkt proportional dem $\cos\varphi$ von $\mathfrak{Z}_2$ und umgekehrt proportional einer gewissen Größe $|\mathfrak{H}^2|$ ist. Im § 4 wird das Problem unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen behandelt. Dabei wird, um die Optimumbedingungen zu finden, eine Rechnungsmethode verwendet, die auch in verschiedenen anderen Paragraphen eine wesentliche Rolle spielt.

Mit Berücksichtigung von Widerstand, Eisenverluste, Windungskapazitäten und Streuung werden für $\mathfrak{H}$ eine allgemeine Formel 14b) und für das Zustandekommen eines kleinstmöglichen $\mathfrak{H}^2$ die Bedingungen 15a) und 15b) hergeleitet.

Die Methoden Windungskapazitäten, Eisenverluste und Streuung zu berücksichtigen sind in §§ 9 bis 12 auseinandergesetzt. Diese Paragraphen enthalten auch einige Anweisungen und numerische Angaben zur Berechnung der Kapazitäten und der Eisenverluste.

Der Fall, wo $\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1}$ sehr groß ist, stellt sich als ein Sonderfall mit hervortretender Bedeutung der Kapazitäten dar (§ 16). Wenn $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von derselben mäßigen Größenordnung sind, kann man meistens mit den sehr einfachen Breisigschen Formeln 4f') und 4g') rechnen, um die zweckmäßige Übersetzungszahl n_0 und primäre Selbstinduktion L_{10} zu finden (§ 19). Diese Behauptung stützt sich auf die Resultate mehrerer Paragraphen.

Weil der Einfluß verschiedener Größen (z. B. Phase des $\mathfrak{Z}_1$, Eisenverluste, Kapazitäten) meistens klein ist, wird der Einfluß jeder dieser Größen meistens unter Vernachlässigung der übrigen untersucht (z. B. §§ 6, 7, 8, 17). Der Einfluß der Abweichungen von den Optimumbedingungen wird geschätzt (§§ 5 und 20). Im allgemeinen erhöht sich der Effekt des Übertragers bei wachsendem ω (§ 6). Eine Ausnahme bildet der Fall eines sehr großen $\mathfrak{Z}_2$ (§ 16).

Zum Schluß wird für das Problem 2, das sich vom Problem 1 nur dadurch unterscheidet, daß es sich hier um Energieströme in beiden Richtungen handelt, in § 19 eine auf die Lösung des Problems 1 gestützte Lösung angegeben.



Probleme der Potentialtheorie.

Von

Adolf Bolliger, Zürich.

(Fortsetzung von Seite 112.)

IV. Vervollständigte Theorie der linearen Leiter für das Vakuum.

Die Aufstellung der Gesetze für das elektromagnetische Feld von linearen Leitern im Vakuum verdanken wir verschiedenen Autoren. So rührt das *Elementargesetz für den magnetischen Bestandteil* desselben von Biot und Savart her, und Franz Neumann hat uns durch Einführung des sog. „*elektrodynamischen Potentiales*" die Möglichkeit geschaffen, die längs eines beliebigen Integrationsweges durch lineare Ströme „*induzierte Spannung*" in einfacher Weise auszudrücken. Außerdem sind von Ampère und manchen andern Autoren noch eine ganze Reihe solcher Elementargesetze angegeben worden, die in ihrer Anwendung auf geschlossene Ströme im Einklange mit den obengenannten Gesetzen stehen. Den üblichen Ableitungen und Darstellungen der Gesetze mangelt aber ihrer stückweisen Entstehung wegen die Einheitlichkeit. Außerdem ist zu bemerken, daß sich in der Literatur nirgends eine vollständige Darstellung der Bestandteile findet, die den gesamten elektromagnetischen Zustand ausmachen. So fehlt z. B. überall die genaue Formulierung für diejenigen Feldteile, welche durch den „*Ohmschen Spannungsabfall*" und durch die *mitgeführte Elektrizitätsmenge* hervorgerufen werden. Die Gleichungen der genannten Autoren sind von mir nach dieser Richtung hin vervollständigt worden. Außerdem habe ich danach getrachtet, die Theorie der linearen Leiter unter etwas allgemeineren Voraussetzungen, als dies bis jetzt geschehen ist, zu behandeln. Hauptsächlich ist zu beachten, daß fast alle Gesetze aus denjenigen von Leitern mit endlichem Querschnitt durch entsprechende Grenzübergänge gewonnen worden sind. Es bietet daher keine Schwierigkeiten, die für die ideellen linearen Leiter geltenden Gesetze in der richtigen Weise als Näherungsgesetze auf Leiter mit endlichen und nur hinlänglich kleinen Querschnitten zu übertragen. Auch dem Umstande, daß die Leitungsdrähte heute vielfach aus Eisen hergestellt werden, ist durch *Einführung einer für die Leiter vom umgebenden Medium verschiedenen Permeabilität* Rechnung getragen worden. Es hat sich dabei gezeigt, daß die induzierte elektrische Feldstärke unter den vorliegenden Verhältnissen ein nicht zu vernachlässigendes *Korrektionsglied* erhält, während der magnetische Zustand des Feldes außerhalb der Leiter ungeändert bleibt.

Meine Untersuchung hat zudem ergeben, daß man bei der Formulierung der Elementargesetze des magnetischen und elektrischen Feldes mit Vorteil von der Einführung des sog. „*Vektorpotentiales*" absieht. Dem Vektorpotentiale geht ja ohnehin die Eigenschaft, welche die statischen Potentiale so wertvoll macht, daß die Komponenten der Kraft daraus als partielle Differentialquotienten abgeleitet werden können, vollständig ab. Die Bezeichnung — Potential — rührt hier lediglich davon her, daß die Komponenten des Vektorpotentiales formell derselben Differentialgleichung, der sog. Poissonschen genügen, wie die statischen Potentiale.

Bei unseren Betrachtungen gehen wir aus von den Maxwellschen Feld- und zugehörigen Ergänzungsgleichungen. Bei der Integration machen wir die Annahme, daß der Bestandteil der magnetischen Feldstärke, welcher durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes hervorgerufen wird, vernachlässigbar sei. Dies ist bekanntlich für alle Vorgänge auf dem Gebiete der Elektrotechnik mit fast absoluter Genauigkeit zulässig. Von hervortretendem Einfluß wird das erwähnte zusätzliche Glied erst



bei Hochfrequenz, also z. B. für die Erscheinungen an den Antennen bei der drahtlosen Telegraphie. Zudem mache ich die Voraussetzung, die beim Grenzübergang vom endlichdimensionierten zum linearen Leiter mit den wirklichen Verhältnissen vereinbar ist, daß μ im Leiterinnern nur eine Funktion der Zeit und nicht des Ortes ist.

Entsprechend unserer ersten Annahme lauten die Maxwellschen Feld- und Ergänzungsgleichungen:

$$\text{I.}\quad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = 4\pi j \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho \quad \text{I}'.$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \quad \text{II}'.$$

$\mathfrak{H}$ = magnetischer } Feldvektor, $\mathfrak{B}$ = magn. Induktion, j = Stromdichte,
$\mathfrak{E}$ = elektrischer } Feldvektor, $\mathfrak{D}$ = elektr. Verschiebung, ϱ = elektr. Raumdichte,
t = Zeit.

Außerdem sollen die Materialgleichungen gelten:

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \;\ldots\; 1) \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} \;\ldots\; 2) \qquad j = \lambda\mathfrak{E} \;\ldots\; 3)$$

[μ = magn. Permeabilität; ε = Dielektrizitätskonstante; j = elektr. Leitfähigkeit.]

Um Gleichung I allgemein zu integrieren, bilden wir:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \nabla^2\mathfrak{H} = 4\pi\operatorname{rot} j \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

In dem die Leiter umgebenden Vakuum ist $\mu = 1$ und im Leiter bezeichnen wir die Permeabilität als konstante Ortsfunktion mit μ. Dann ist $\operatorname{div}\mathfrak{H}$ im Leiteraußen- und -innenraum sicher gleich Null, und Gl. 4) nimmt die Form an:

$$\nabla^2\mathfrak{H} = -4\pi\operatorname{rot} j, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

welche für die einzelnen Komponenten von $\mathfrak{H}$ formell übereinstimmt mit der Poissonschen Gleichung der Elektrostatik. Sie hat demnach für $\mathfrak{H}$ das Integral:

$$\mathfrak{H} = \int_\tau \frac{\operatorname{rot} j}{r}\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

[r = Abstand des Quellpunktes $Q(x, y, z)$ im stromdurchflossenen Raumelement $d\tau$ vom Aufpunkte $P(a, b, c)$ für $\mathfrak{H}$].

Aus der Analogie mit den für die Statik geltenden Verhältnissen schließen wir, daß $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ vollständig stetig sind und selbst in den stromdurchflossenen Leiterelementen keine Sprünge erleiden.

Gl. 6) kann noch durch partielle Integration auf andere Form gebracht werden. Es ist:

$$\operatorname{rot}_x j = \frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z}$$

und:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial j_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{j_z}{r}\right) + \frac{j_z}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{dy}.$$

Da aber:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = -\mathfrak{r}_{1y}$$

[$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$; $\mathfrak{r}_{1y}$ = y-Komponente des Einheitsvektors $\mathfrak{r}_1$]

ist, gilt:

$$\frac{\operatorname{rot}_x j}{r} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{j_z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{j_y}{r}\right) + \frac{j_y\cdot\mathfrak{r}_{1z}}{r^2} - \frac{j_z\cdot\mathfrak{r}_{1y}}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Das Raumintegral über die beiden ersten Terme rechts kann umgeformt werden in ein Flächenintegral über die Begrenzung dieses Raumes entsprechend [1]):

[1]) Vgl. Drude, Physik des Äthers, 2. Aufl., Verlag von Ferdinand Enke, Stuttgart, S. 32, Formel 16).

$$\int_\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{j_z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{j_y}{r}\right) \right\} d\tau = \int_\sigma \left\{ \frac{j_z}{r}\cos(n\,y) - \frac{j_y}{r}\cos(n\,z) \right\} d\sigma$$

[n = Normale im Flächenelement $d\sigma$].

Unter Einführung des Einheitsvektors n_1 in der Richtung der Normalen n und Berücksichtigung, daß die Leiteroberfläche σ durch Stromlinien begrenzt ist, folgt also:

$$\int_\sigma \frac{[n_1, j]}{r}\, d\sigma = 0.$$

Daß das Integral tatsächlich verschwindet, erkennt man sofort, wenn man sich den Übergang des Leiters in den nichtleitenden Teil statt diskontinuierlich, rasch aber stetig denkt. Von 7) bleibt also für das Raumintegral bloß die Komponente:

$$\mathfrak{H}_x = \int \frac{j_y \cdot \mathfrak{r}_{1z} - j_z \cdot \mathfrak{r}_{1y}}{r^2}\, d\tau,$$

wonach:

$$\mathfrak{H} = \int_\tau \frac{[j, \mathfrak{r}_1]}{r^2}\, d\tau. \quad \text{8)}$$

Gehen wir nun zu einem sehr dünnen Leiter über, wo:

$$j\,d\tau = (j\,df)\,d\mathfrak{s} = i\,d\mathfrak{s} \quad \text{ist,}$$

[df = Querschnitt des Leiterelementes $d\mathfrak{s}$ (Vektor vom Betrage ds), i = Strom durch df]

so liefert in 8) die Auswertung des Vektorproduktes für den Integranden:

$$d\,|\mathfrak{H}| = \frac{i \sin\gamma\, ds}{r^2}, \quad \text{9)}$$

$$[\gamma = \sphericalangle(i, r)]$$

also nichts anderes als das Biot-Savartsche Elementargesetz.

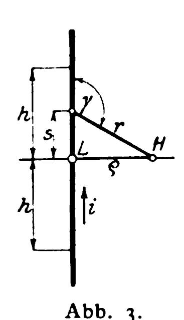


Abb. 3.

Wir wollen nun $\mathfrak{H}$ als Funktion des Abstandes ϱ von irgendeinem Punkte L eines stetig gekrümmten, stromdurchflossenen linearen Leiters bestimmen [vergleiche Abb. 3]. Wir denken uns für $\mathfrak{H}$ zwei Beiträge, wovon der eine von dem $\mathfrak{H}$ benachbarten Leiterelemente (— h, + h) und der andere von den übrigen Elementen der Strombahn herrühren möge. Auf Grund des Gesetzes 9) folgt für den ersten Beitrag $\overline{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{H}$:

$$|\overline{\mathfrak{H}}| = i \int_{-h}^{+h} \frac{\sin\gamma\, ds}{r^2} = i\varrho \int_{-h}^{+h} \frac{ds}{r^3} = \frac{2i}{\varrho} \cdot \frac{h}{r_h},$$

woraus im Grenzwert:

$$\lim_{\frac{\varrho}{r_h}=0} (|\overline{\mathfrak{H}}|) = \frac{2i}{\varrho} \quad \text{10)}$$

Der Integralbeitrag der übrigen Leiterelemente ist eine für den Punkt H endlich bleibende Funktion (functio continua). Also gilt für die ***magnetische Feldstärke*** in der Nähe des Punktes L:

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2i}{\varrho} + \text{f. c} \quad \text{11)}$$

und nach 8) steht der Vektor $\mathfrak{H}$ zum Leiterelement (— h, + h) windschief normal im Sinne einer Rechtsschraube.

Aus 11) schließen wir, daß die magnetischen Kraftlinien Drehkreise um die Leiterachse sind, und zwar sowohl innerhalb als auch in nächster Nähe außerhalb des Leiters. Da

div $\mathfrak{H}$ für ein solches Feld ganz unabhängig von der Konzentration der Kraftlinien Null ist, folgt daraus entschieden, daß dies für die Leiteroberfläche, wofür wir bis jetzt noch nichts ausgesagt hatten, in diesem Sonderfalle auch zutrifft. *Flächenbelegungen, die ein Magnetfeld im Sinne der Statik erzeugen würden, können nicht auftreten.*

Nach 11) besteht Proportionalität der Feldstärke $\mathfrak{H}$ zum Strom i. Da aber nach I wegen:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$$

$$\operatorname{div} j = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

ist, haben wir längs des ganzen Leiters denselben Strom und nach 11) die gleichen Verhältnisse für $\mathfrak{H}$. *Daraus folgt, daß für ein homogenes Leitermaterial [μ kann eine Funktion von $\mathfrak{H}$ sein] die Permeabilität keine Funktion der Längskoordinate des Leiters sein kann.* μ könnte höchstens noch in radialer Richtung eine Ortsfunktion sein. Wie leicht ersichtlich ist, läßt sich aber im Grenzfalle des linearen Leiters auch unter dieser Voraussetzung ein in radialer Richtung konstantes μ stets so definieren, daß der Induktionsfluß die richtige Größe hat. *μ ist dann, wie wir früher angenommen haben, im Leiter keine Orts-, sondern nur noch Zeitfunktion.*

Die Bestandteile des *elektrischen Feldes* finden wir durch Integration der Maxwellschen Feldgleichung II. Wir bilden:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E} - \nabla^2 \mathfrak{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

Nun ist nach I' und 2):

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 4 \pi \varrho .$$

Im Vakuum ist $\varepsilon = 1$ und $\varrho = 0$; also verschwindet div $\mathfrak{E}$ im Leiteraußenraum sicher. Im Leiterinnern ist ε konstant und stellt eine sehr große Zahl dar, die praktisch als ∞ angenommen werden darf; zudem ist dort ϱ sehr klein, so daß mit großer Genauigkeit: $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{4 \pi \varrho}{\varepsilon} \sim 0$ gesetzt werden kann.

Es gilt also für den Leiteraußen- und -innenraum $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$. Nur an der Leiteroberfläche trifft dies, wie wir zeigen werden, nicht mehr zu; die Feldstärke $\mathfrak{E}$ erleidet dort eine Unstetigkeit. Wir machen nun die folgende, für die einzelnen Komponenten algebraisch zu verstehende Zerlegung:

$$\mathfrak{E} = \overbrace{\mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

und verstehen unter $\mathfrak{E}_i$ denjenigen Anteil von $\mathfrak{E}$, der direkt durch die zeitliche Variation des Induktionsflusses entsteht, während $\mathfrak{E}_\varphi$ bloß durch Massenbelegungen an der Leiteroberfläche hervorgerufen sein soll. Es gelten dann nach 13) die Differentialgleichungen:

$$\nabla^2 \mathfrak{E}_i = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

$$\nabla^2 \mathfrak{E}_\varphi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}_\varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Nun ist aber: $\operatorname{rot} \mathfrak{B} = \mu \operatorname{rot} \mathfrak{H} - [\mathfrak{H}, \operatorname{grad} \mu]$

und nach I: $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4 \pi j$,

so daß 15) geschrieben werden kann:

$$\nabla^2 \mathfrak{E}_i = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 4 \pi j \mu - [\mathfrak{H}, \operatorname{grad} \mu] \right\} .$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \frac{j \mu}{r} d\tau + \frac{1}{4 \pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \frac{[\mathfrak{H}, \operatorname{grad} \mu]}{r} d\tau \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

[r = Abstand des Aufpunktes vom Quellpunkte].

Das Integral 17) gilt unter sehr allgemeinen Voraussetzungen; auch dann noch, wenn Körper verschiedenartiger Permeabilität im Raume vorhanden sind. μ kann selbst eine willkürliche Funktion des Ortes und der Zeit sein. Doch müßte in diesem Falle die Verteilung von j und $\mathfrak{H}$ für jeden Zeitmoment im ganzen Raume bekannt sein, was nur im Zusammenhange mit der ersten Maxwellschen Gleichung zu erreichen wäre.

Wir wollen uns hier mit dem Falle weiter befassen, der für lineare Leiter von beliebiger Permeabilität ein Interesse hat; nämlich wo μ in einzelnen Körpern nur eine Funktion der Zeit und nicht des Ortes ist. Unter dieser Voraussetzung gehen aus dem zweiten Integrale in 17) Flächenintegrale über die Begrenzungen der einzelnen magnetisierbaren Medien hervor. Im Innern dieser Medien verschwindet nämlich grad μ, während dafür an den Oberflächen sprunghafte Änderungen auftreten.

Bedeutet $d\sigma$ ein Flächenelement und n_1 den Einheitsvektor in Richtung der Normalen n desselben irgendwo an der Begrenzungsfläche eines solchen magnetisierbaren Körpers, so lautet das dem zweiten Raumintegral in 17) entsprechende Integral über diese Fläche [Vektor $\mathfrak{J}$]:

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\mu - 1}{4\pi}\int\limits_\sigma \frac{[\mathfrak{H}, n_1]}{r}\, d\sigma\right\}$$

[$\mu - 1$ gleich Sprung der Permeabilität μ des Körpers in die Permeabilität 1 des umgebenden Vakuums].

Wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{D}_t = \frac{\mu - 1}{4\pi}\cdot[\mathfrak{H}, n_1] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 17')$$

den zufolge der Unstetigkeit der Permeabilität tangential in der Trennfläche σ auftretenden Vektor, dem die Bedeutung eines „Oberflächenstromes" zukommt. Damit ist:

$$\mathfrak{J} = \int\limits_\sigma \frac{\partial \mathfrak{D}_t}{\partial t}\cdot\frac{d\sigma}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

Zur Berechnung der *induzierten Feldstärke* $\mathfrak{E}_i$ haben wir also die Gleichung:

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau j\mu\frac{d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\sigma \mathfrak{D}_t\cdot\frac{d\sigma}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

Bei der Anwendung dieses Resultates auf lineare Leiter hat man zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich für das Verhalten von $\mathfrak{E}_i$ außerhalb und innerhalb des Leiters. Das erste Integral ergibt für Punkte, die im Außenraum genügend weit vom Leiter entfernt sind[1]):

$$-\frac{d(i\mu)}{dt}\int\limits_s \frac{d\mathfrak{s}}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

[s = krummlinige Koordinate längs des Leiters].

Für das zweite Integral in 19) ist nach 8), 11) und 17'), wenn i_1 den Einheitsvektor in der Stromrichtung bedeutet, zu setzen:

$$\mathfrak{D}_t = \frac{\mu - 1}{4\pi}\cdot\frac{2i}{\varrho}\cdot i_1,$$

es lautet deshalb:

$$\frac{1}{2\pi\varrho}\cdot\frac{di(\mu - 1)}{dt}\cdot\int\limits_\sigma \frac{i_1}{r}\, d\sigma$$

[1]) Es ist für die Konvergenz des Integrales notwendig, daß der Quotient, gebildet aus der Leiterdicke ϱ und der Entfernung des Aufpunktes, vom nächsten Leiterpunkt eine verschwindend kleine Größe darstellt.

und mittelst des Differentialvektors $d\mathfrak{s}$ der Strombahn:

$$\frac{di(\mu-1)}{dt} \cdot \int_s \frac{d\mathfrak{s}}{r}\,^{1}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

Mit Rücksicht darauf, daß es wegen $\operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$ nur geschlossene Ströme gibt, folgt durch Zusammenfassung von 20) und 21) für den Außenraum das Resultat:

$$\mathfrak{E}_i = -\frac{di}{dt} \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22)$$

Man ersieht daraus, daß es für den Außenraum ganz einerlei ist, aus was für einem Material der lineare Leiter besteht. Der Betrag der Feldstärke $\mathfrak{E}_i$ ergibt sich lediglich aus der Konfiguration des Leiters und aus der zeitlichen Änderung des Stromes. Das Resultat 22) ist auch physikalisch vollständig plausibel. Wie wir nämlich früher, S. 136, gesehen haben, ist die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ außerhalb und innerhalb eines linearen Leiters vollständig unabhängig vom Leitermaterial und das Linienintegral der elektrischen Feldstärke hängt im Außenraume für einen beliebigen Integrationsweg wegen $\mu = 1$ dort nach der zweiten Maxwellschen Differentialgleichung bloß von $\mathfrak{H}$ ab und damit auch die Feldstärke $\mathfrak{E}_i$.

Bildet man das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}_i$ über eine Kurve s' durch skalare Multiplikation der Werte von $\mathfrak{E}_i$ mit den Kurvenelementen, so erhält man:

$$e_i = \int_{s'} (\mathfrak{E}_i\, d\mathfrak{s}') = -\frac{di}{dt} \int_{s'} \left(d\mathfrak{s}' \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right) = -\frac{di}{dt} \int_{s'} \oint_s \frac{(d\mathfrak{s}'\, d\mathfrak{s})}{r}$$

und wenn s' eine geschlossene Kurve ist:

$$e_i = -\frac{di}{dt} \oint_s \oint_{s'} \frac{(d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{s}')}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

Das hier vorkommende Doppelintegral ist das sog. F. Neumannsche Konfigurationsintegral, nach welchem die *Induktionskoeffizienten der Leiter* berechnet werden. Meistens wird angenommen, daß s und s' auch dieselben Kurven sein dürfen und daß unter dieser Voraussetzung das Neumannsche Integral den sog. *Selbstinduktionskoeffizienten* dieser Kurve bzw. eines gleichgestalteten linearen Leiters darstelle. Dies ist indessen meiner Beurteilung nach nicht zulässig, weil die Singularität im Integranden von 23) bei zusammenfallender Lage der Elemente $d\mathfrak{s}$ und $d\mathfrak{s}'$ [also für $r = 0$] stets so hoch ist, daß das Integral unter allen Umständen divergiert. Das Neumannsche Integral trägt der Tatsache nicht Rechnung, daß der Selbstinduktionskoeffizient eines Leiters stark von dessen Dicke abhängig ist und im Falle eines unendlich dünnen Leiters überhaupt seinen Sinn verliert.

Die richtige Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten ergibt sich auf Grund der Werte, welche die Formel 19) im Innern von sehr dünnen Leitern für $\mathfrak{E}_i$ liefert. Jenes Integral gibt auch sofort Aufschluß darüber, wovon die Singularität im Neumannschen Integral herrührt. *Während beim endlich dimensionierten Leiter die durchströmten Teilchen stets so gruppiert sind, daß in nächster Nähe des Aufpunktes für $\mathfrak{E}_i$ auch nur eine verschwindend kleine Strommenge passiert, trifft dies beim linearen Leiter nicht zu. Die einzelnen Teilströme sind ohne Reduktion ihrer Wirkung in ihrer ganzen Zahl in den Aufpunkt hineinverlegt, wodurch die Konvergenz des Integrales aufhört.* Die richtige Formel läßt sich aber nur dadurch erhalten, daß bei der Zurückführung des

---

[1]) Es ist nämlich im vorhergehenden Ausdrucke:

$$\int_\sigma \frac{i_1}{r}\, d\sigma = \int_s \frac{d\mathfrak{s}}{r} \int_0^{2\pi} \varrho\, d\alpha = 2\pi\varrho \int_s \frac{d\mathfrak{s}}{r}.$$

Leiters mit endlichem Querschnitt auf den linearen die ursprüngliche Stromverteilung durch eine solche fingierte [in Wirklichkeit unmögliche, die der Kontinuität des Stromes widerspricht] in der Leiterachse ersetzt wird, daß der nunmehr für den linearen Leiter berechnete Selbstinduktionskoeffizient demjenigen des endlich dimensionierten möglichst nahe kommt.

Um die erwähnte Stromverteilung finden zu können, nehmen wir an, daß der Strom beim räumlichen Leiter sich gleichmäßig über den Querschnitt verteile. Für unsere Untersuchung ist dies berechtigt, weil der *Skineffekt* erst bei relativ hohen Frequenzen und größeren Leiterdicken, als sie für uns in Frage kommen, in störender Weise bemerkbar wird. Wir berechnen die beiden Integrale in 19) für einen beliebigen Punkt P in der Achse eines Leiters vom Durchmesser 2ϱ [vergleiche dazu Abb. 4], den wir uns zu diesem Zwecke durch sehr viele Normalebenen zur Achse segmentiert denken. Die räumliche Stromverteilung jedes Segmentes ersetzen wir durch eine solche lineare in der Leiterachse, daß deren Beiträge an die Integrale in 19) der ursprünglichen Stromverteilung entsprechen. Unsere Betrachtungen führen zu einfachen Resultaten, wenn wir uns die Näherung gestatten, die aber beim Übergang zu unendlich dünnen Leitern asymptotisch richtig wird, daß alle Punkte eines Segmentes, die den gleichen Abstand R von der Leiterachse besitzen, auch ein und dieselbe Entfernung x vom Aufpunkte haben. Dann ist nach der Figur:

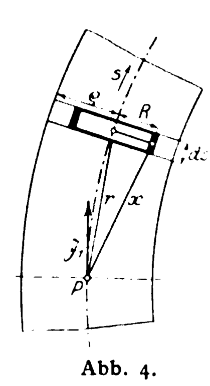


Abb. 4.

$$x = \sqrt{r^2 + R^2}$$
$$d\tau = 2\pi R\, dR\, ds$$

und das erste Integral [Vektor $\mathfrak{J}_1$] in 19) lautet:

$$\mathfrak{J}_1 = -2\pi |j| \mu \oint_s d\mathfrak{s} \int_0^{\varrho} \frac{R\,dR}{\sqrt{r^2 + R^2}},$$

und da das innere Integral vom Betrage:

$$\sqrt{r^2 + \varrho^2} - r = \frac{\varrho^2}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}}$$

und

$$i = |j| \pi \varrho^2$$

ist, folgt:

$$\mathfrak{J}_1 = -2 i \mu \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

Für die auf den Aufpunkt *reduzierte (fingierte) Dichte* hat man also den Ausdruck:

$$\lambda_1 = -\frac{2 i r \mu}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

In ganz analoger Weise berechnen wir mit Hilfe von Abb. 5 das zweite Integral von 19) für einen innern Punkt des Leiters. Wir nehmen dazu an, daß alle Flächenelemente an der Umgrenzung eines Leitersegmentes denselben Abstand y vom Aufpunkte der Feldstärke haben. Dann ist:

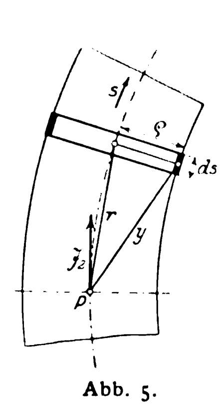


Abb. 5.

$$y = \sqrt{r^2 + \varrho^2},$$
$$d\sigma = 2\pi \varrho\, ds$$

und nach S. 138 muß gesetzt werden:

$$\mathfrak{L}_t = \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \frac{2i}{\varrho}\, \mathfrak{i}_1,$$

so daß das zweite Integral [Vektor $\mathfrak{J}_2$] in 19) lautet:

$$\mathfrak{J}_2 = \mathrm{i}(\mu - 1) \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 26)$$

und die diesbezügliche *reduzierte lineare Dichte* ist:

$$\lambda_2 = \frac{\mathrm{i}\, r(\mu - 1)}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 27)$$

Die Dichten λ_1 und λ_2 sind also abhängig von der Stromstärke i, der Permeabilität μ des Drahtes, dann aber hauptsächlich auch von der Drahtdicke 2ϱ und dem Abstande r des Aufpunktes. Sie haben die Eigenschaft, daß sie in der Gegend des Aufpunktes die räumliche Stromverteilung der Wirklichkeit entsprechend mit asymptotischer Genauigkeit berücksichtigen, weil dort die Konstanz der Abstände x und y für alle Punkte, welche auf Drehkreisen zur Leiterachse liegen, zutrifft. Am Aufpunkte ist:

$$\lim_{r=0} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r} \right) = - \frac{\mathrm{i}(\mu + 1)}{\varrho}.$$

Man erkennt daraus den schwerwiegenden Einfluß der Permeabilität, des Leitermaterials und der Drahtdicke, während für größere Entfernungen r vom Aufpunkte mit der Vernachlässigung von ϱ gegen r näherungsweise gilt:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r} \sim - \frac{\mathrm{i}}{r},$$

d. h. auch in diesem Falle geben die Dichten genähert richtige Werte. Die Ströme erscheinen dafür beinahe als konzentriert, wie es der Auffassung beim Neumannschen Integrale entspricht, und der Einfluß der Permeabilität tritt in den Hintergrund. Außerdem ist zu bemerken, daß beim Übergang zu unendlich kleinen Werten des Drahtdurchmessers λ_1 und λ_2 asymptotisch richtig werden, und damit auch:

$$\mathfrak{E}_i = \frac{\partial}{\partial t} \oint_s (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

d. h.

$$\mathfrak{E}_i = -2 \frac{d(\mathrm{i}\mu)}{dt} \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}} + \frac{d\,\mathrm{i}(\mu - 1)}{dt} \oint_s \frac{d\mathfrak{s}}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots \quad 28)$$

$\mathfrak{E}_i$ ist für $\varrho = 0$ selber unendlich, wird aber für hinlänglich dünne Drähte durch 28) sehr genau ausgedrückt.

Die ***induzierte Spannung*** e_i längs der Drahtachse ist numerisch gleich dem diesbezüglichen Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}_i$, wird also in analoger Weise erhalten wie auf S. 139. Ich gelange so zu der für $\varrho = 0$ ***asymptotischen Darstellung:***

$$e_i = -2 \frac{d(\mathrm{i}\mu)}{dt} \oint\oint_{(s)} \frac{(d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{s}')}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}} + \frac{d\,\mathrm{i}(\mu - 1)}{dt} \oint\oint_{(s)} \frac{(d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{s}')}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} \quad \ldots \quad 29)$$

[die Integrationen der innern und äußeren Integrale erstrecken sich über dieselbe Kurve s].

Im Falle eines nichtmagnetisierbaren Leiters ist:

$$e_i = -L \frac{d\mathrm{i}}{dt};$$

es wird daher der *Selbstinduktionskoeffizient* L nach 29) mit Berücksichtigung des Drahtdurchmessers asymptotisch folgendermaßen dargestellt:

$$L = 2 \oint\limits_{(s)} \oint \frac{(d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{s}')}{r + \sqrt{r^2 + \varrho^2}} \text{ [1]} \quad . . . . 30)$$

[r hat hierin die gleiche Bedeutung wie im Neumannschen Integrale].

Die vollständige Behandlung unserer Aufgabe über die linearen Leiter benötigt noch die Integration von Gl. 16), welche lautet:

$$\nabla^2 \mathfrak{E}_\varphi - \text{grad div } \mathfrak{E}_\varphi = 0 .$$

Man kann zeigen, daß der Feldvektor $\mathfrak{E}_\varphi$ ein ***Potential φ im Sinne der Elektrostatik*** hat. Danach müßte sein:

$$\mathfrak{E}_\varphi = -\text{grad}\, \varphi \quad . . . . 31)$$

Die Verifikation ergibt sich durch Einführung von 31) in die vorige Gleichung, aus der so die gültige Vektorformel hervorgeht:

$$\nabla^2 \text{ grad}\, \varphi = \text{grad}\, \Delta\varphi \text{ [2]}, \quad . . . . 32)$$

worin $\Delta\varphi$ den Laplaceschen Operator bedeutet.

Da wir im Leiteraußenraum (Vakuum) keine freie Elektrizität angenommen haben, liegt das Quellgebiet des Potentials φ einzig im Leiter. Zur Formulierung der Randbedingungen von φ gehen wir aus vom Strömungszustand, den wir für einen sehr dünnen Leiter als bekannt voraussetzen dürfen. Aus $\text{div}\, j = 0$ folgt nämlich die Kontinuität des Stromes i und daraus für einen Draht von durchweg gleichem, kreisförmigem Querschnitt f und homogenem Material [Leitfähigkeit λ = konst.] bei gleichmäßiger Verteilung des Stromes über denselben die Konstanz von j längs des Leiters. Wegen $j = \lambda \mathfrak{E}$ ist dann, wenn der Leiter nur hinlänglich dünn ist, das Feld so gut wie homogen und die $\mathfrak{E}$-Linien fallen mit den Stromlinien zusammen. An der Leiteroberfläche ist, wie mit dem Gaußschen Satze aus $\text{div}\, j = 0$ folgt, $j_n = 0$; d. h. die Stromlinien fallen dort in die Grenzfläche, und die Niveauflächen des Potentials φ bilden Normalschnitte zur Strombahn.

Da der Strom im ganzen Kreise nach einerlei Richtung fließt, fällt φ in dieser Richtung fortwährend und das Linienintegral von $\mathfrak{E}_\varphi$ kann nicht verschwinden. Es muß also irgendwo eine *Diskontinuitätsstelle des Potentials* geben. Eine solche kann erfahrungsgemäß hervorgerufen werden durch *kontakt-elektromotorische Kräfte, galvanische Elemente* oder *eingeprägte induzierte Spannungen.* Bezeichnen φ_1 und φ_2 die Potentialwerte von φ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle, so folgt für die längs der ganzen Strombahn konstante Feldstärke $\mathfrak{E}_\varphi$ nach 31):

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{e_\varphi}{l},$$

[l = Länge der Strombahn]

und im Leiter gilt also als Integralgesetz von

$$j = \lambda \mathfrak{E}$$

[1]) Von der nicht vollständig exakten, sondern bloß asymptotischen Darstellung abgesehen, wird Formel 30) allerdings den physikalischen Verhältnissen noch nicht in jeder Beziehung gerecht, weil der Skineffekt nicht in Rücksicht gezogen worden ist. In Wirklichkeit sind die in Parallelkurven zur Drahtachse induzierten Spannungen von der berechneten etwas verschieden. Doch ist nach den bereits oben angegebenen Gründen der Fehler sehr klein.

[2]) Es ist nämlich für die x-Komponente:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\},$$

und Analoges gilt für die andern Komponenten.

das Ohmsche Gesetz:

$$i = \frac{e_\varphi}{w}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 33)$$

in welchem

$$w = \frac{1}{\lambda \cdot f}$$

den sog. *Leitungswiderstand* bedeutet. Der Übergang von einem räumlichen Leiter zu einem linearen als Ersatz muß nun logischer Weise stets so erfolgen, daß der Strom i und die Spannungsdifferenz e_φ dabei ungeändert bleiben. Nach dem Ohmschen Gesetze muß deshalb der Widerstand w und danach also das Produkt $\lambda \cdot f$ konstant gehalten werden. λ wird daher beim Grenzübergang unendlich.

Nach unseren Betrachtungen ist bei gegebener Spannungsdifferenz $e_\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ nach dem Ohmschen Gesetze im Leiterinnern die Feldstärke $\mathfrak{E}_\varphi$ vollständig; hingegen das Potential φ nur bis auf eine additive Konstante Φ bestimmt. Diese Konstante Φ hat offenbar auf den Strömungszustand keinen Einfluß; sie ist vollständig willkürlich. So kann man ohne Nachteil irgendeinen Punkt des Leiters erden oder künstlich auf ein beliebiges Potential bringen.

Soll das Potential φ aber auch für den Leiteraußenraum ermittelt werden, so ist die Angabe dieser Konstanten Φ bzw. der absoluten Potentialwerte unerläßlich; denn nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie [1]) ist das statische Potential in einem Raume dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Randwerte von φ an der ganzen Begrenzung dieses Raumes gegeben sind. Zu der Begrenzung unseres Außenraumes (des die Leiter umgebenden Vakuums) zählt aber auch die unendlich ferne Kugel, wo φ verschwindet; es ist daher gar nicht einerlei, welchen Wert Φ hat.

Für den Leiteraußenraum ist nun φ nach 16) und 31) der Gleichung:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 34)$$

entsprechend so zu bestimmen, daß die Randwerte an der Leiteroberfläche mit denjenigen des Leiterinnern übereinstimmen und daß φ im Unendlichen verschwindet. φ ist im Außenraum darstellbar als eine Potentialfunktion von Massenverteilungen, welche teils im Leiter und teils auf dessen Oberfläche verteilt sind Für die Bestimmung von φ kommt es also lediglich darauf an, diese Massenverteilung zu finden. Die vorliegende Aufgabe wird für beliebige Randwerte eines räumlichen Leiters allgemein gelöst durch die Hilfsmittel, welche in jüngster Zeit die Theorie der Fredholmschen Integralgleichung geschaffen hat. Da jedoch die auf diesem Wege gewonnenen, sehr allgemeinen Resultate für die praktische Anwendung unbrauchbar sind, schlage ich hier einen andern Weg ein, der uns allerdings für einen räumlichen Leiter nicht die exakte Lösung, hingegen numerisch verwertbare Näherungsresultate zu liefern imstande ist. Wir denken uns zu diesem Zwecke den endlichen Leiter durch einen unendlich dünnen ersetzt.

An einer linearen Massenverteilung wird φ unendlich und läßt sich in unmittelbarer Nähe derselben darstellen als das Produkt Π einer Funktion Λ, die nur von der Längskoordinate der Massenverteilung und einer Funktion Γ, die nur vom Abstande des Aufpunktes vom nächsten Massenpunkte abhängig ist. φ ist an der Grenze also von der Form:

$$\Pi = \Lambda \cdot \Gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

[1]) Siehe C. Neumann, Untersuchungen über das Newtonsche und logarithmische Potential, S. 41, wo folgender Satz bewiesen wird: Bezeichnet φ das Potential irgendwelcher unbekannter, außerhalb des Gebietes τ oder auf seiner Grenze gelegener Massen, so ist dieses Potential φ für alle Punkte innerhalb τ völlig bestimmt, sobald nur seine Werte auf der Grenze von τ gegeben sind.

Wir lösen nun die Aufgabe:

Es soll ein Potential φ bestimmt werden, für welches die Randwerte längs einer stetigen, aber sonst beliebigen, linearen Massenverteilung durch die Funktion Λ willkürlich vorgegeben sind.

Zu diesem Zwecke berechnen wir das Potential irgendeiner linearen Verteilung für einen Punkt P in der Mittelnormalebene des Linienelementes $(-h, +h)$ mit der Liniendichte [Elektrizitätsmenge pro Längeneinheit] λ [vgl. Abb. 6].

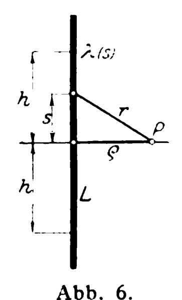


Abb. 6.

Es ist:

$$\bar{\varphi} = \lambda \int_{-h}^{+h} \frac{ds}{r} = \lambda \cdot \lg \frac{r_h + h}{r_h - h} \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

oder:

$$\bar{\varphi} = 2\lambda \left[\lg \frac{1}{\varrho} + \lg (r_h + h) \right].$$

Der Beitrag der übrigen Massen ist eine für den Punkt P reguläre Funktion; daher gilt im Grenzwerte $\varrho = 0$:

$$\Pi = 2\lambda \cdot \lg \frac{1}{\varrho} + \text{f. c}, \quad \ldots\ldots \quad 37)$$

und nach 35) kann gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= 2\lambda \\ \Gamma &= \lg \frac{1}{\varrho} \end{aligned} \right\}, \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

und es resultiert daraus der Satz:

Satz: An einer stetigen linearen Massenverteilung ist das Potential proportional der linearen Dichte; der Proportionalitätsfaktor ist bestimmt durch den Logarithmus der kürzesten Entfernung des Aufpunktes von der Achse der Verteilung[1]).

Damit ist aber die oben gestellte Aufgabe bereits gelöst. Man braucht, um das Potential φ mit dem Randwerte $\Lambda \Gamma$ zu finden, bloß die Liniendichte λ Gl. 38) entsprechend anzunehmen.

Die Anwendung des gefundenen Resultates auf den Fall von einem endlichen, aber noch hinreichend dünnen Leiter bei dem vorher behandelten Strömungsprobleme basiert darauf, daß die in 37) vorkommende functio continua bei nicht mehr verschwindendem, aber doch noch genügend kleinem ϱ praktisch vernachlässigt werden darf.

Für einen räumlichen Leiter, bei welchem die Randwerte Π des Potentials φ aus dem Strömungszustande im Leiter bekannt sind, berechnet sich dann das Potential des Außenraumes näherungsweise durch Quadratur über die folgende als Ersatz für die wirkliche Raumdichte dienende *lineare Dichte in der Leiterachse:*

$$\lambda = \frac{\Pi}{2 \lg \frac{1}{\varrho}} \quad \ldots\ldots \quad 39)$$

[1]) Für irgend zwei Punkte eines statisch geladenen, linearen Leiters, bei welchem der infinitesimale Durchmesser eine stetige Funktion der Längskoordinate ist, gilt nach 37):

$$\lambda_1 \lg \frac{1}{\varrho_1} = \lambda_2 \lg \frac{1}{\varrho_2}$$

oder also:

$$\varrho_1^{\lambda_1} = \varrho_2^{\lambda_2}.$$

Ist speziell die Leiterdicke überall gleich, so muß auch die Liniendichte längs des ganzen Leiters dieselbe sein.

Für ein homogenes Leitermaterial ist Π und damit auch λ bei überall gleichem ϱ nach dem Ohmschen Gesetze eine lineare Funktion der Längskoordinate des Leiters.

Unsere Untersuchung über die linearen Leiter erübrigt noch festzustellen, inwieweit der Einfluß der vom Durchfluß des Stromes hervorgerufenen (scheinbar statischen) Ladung des Leiters zu berücksichtigen ist. Der raschen Fortpflanzung der Elektrizität und der Kontinuität des Stromes wegen muß die Elektronendichte in einem Leiter von konstantem Querschnitte überall gleich sein. Der durch den Strom mitgeführten Elektrizität entspricht also ein „statisches" Potential mit konstanter linearer Dichte des Leiters. Nach 37) besitzt es also, genau so, wie es bei einem statisch geladenen Konduktor der Fall wäre, einen konstanten Randwert. Da aber solche konstante Leiterpotentiale bereits in der auf S. 143 eingeführten Konstanten Φ miteinbezogen sind, braucht das hier besprochene Potential überhaupt nicht mehr besonders berücksichtigt zu werden.

V. Freileitungspotential.

Bei fast allen Freileitungen sind die Drahtdurchmesser im Vergleiche zu den Abständen der einzelnen Leitungsdrähte unter sich und gegenüber der Erde sehr klein, so daß ihr „elektrisches Potential" demjenigen von linearen Massenverteilungen nahekommt. Außerdem ist es für die meisten praktischen Berechnungen in erster Annäherung zulässig, die Erdoberfläche als leitende Ebene mit dem Potential Null anzusehen. Für alle Elektrizitätsmengen, welche sich im Luftraume über der Erde befinden, also insbesondere auch für diejenigen an Freileitungsdrähten, existieren zur Kompensation des Potentiales längs dieser Ebene bestimmt verteilte Erdladungen.

Bei der Berechnung des Freileitungspotentiales, d. h. eines *Newtonschen Potentiales, welches an den linearen Leitern Randwerte im Sinne des vorhergehenden Abschnittes über die linearen Leiter [vgl. S. 142 bis 145] besitzt und an der Ebene E verschwindet,* hätte man einfach das Potential der an der Erde induzierten Belegungen zu bestimmen und zum gewöhnlichen Potential der linearen Leiter zu addieren. Die mathematische Lösung dieser Aufgabe läßt sich mittels des Fourierschen Integraltheorems für Funktionen von zwei Variabeln direkt, aber auf relativ umständliche Weise gewinnen. Doch ist es für die mathematische Behandlung vorteilhaft, ein „elektrisches Ersatzsystem" einzuführen. Zu diesem Zwecke denke man sich den *leitenden* Beleg an der Erdoberfläche entfernt und auch den Halbraum unter der letztern von Luft erfüllt. Das Potential der gegebenen linearen Massenverteilung und einer dazu spiegelbildlich in bezug auf die Erdoberfläche angenommenen, entgegengesetzt gleichen Massenverteilung genügt, wie aus Symmetriegründen und nach dem Satze [vgl. Fußnote von S. 143] folgt, den Bedingungen des gesuchten Freileitungspotentials.

Da nun ein Massenpol m über der Erdoberfläche E ein Potential

$$\varphi_1 = \frac{m}{r}, \qquad \qquad 1)$$

[r = Abstand des Aufpunktes vom Massenpol]

hat, welches an E durch das Potential

$$\varphi_2 = -\frac{m}{r^*} \qquad \qquad 2)$$

einer spiegelbildlich in bezug auf E gelegenen Masse (— m) zu Null kompensiert wird, so ist das Freileitungspotential *eines beliebigen Leiters* L *mit der Massenverteilung* λ [λ ist eine willkürliche, stetige Funktion der krummlinigen Koordinate s des Leiters L] für den Aufpunkt P gegeben durch:

$$\varphi_P = \int_L \frac{\lambda}{r} ds - \int_{L^*} \frac{\lambda}{r^*} ds^* \quad \ldots \quad 3)$$

$r =$ Abstand von P und Q [Punkt mit der Liniendichte λ].
$r^* =$ „ „ P „ dem Spiegelbilde Q^* von Q in bezug auf E.

Führt man dreifach rechtwinklige Koordinaten (x, y, z) ein und läßt einfachheitshalber die (x, y)-Ebene mit E zusammenfallen, so ist, wenn

P die Koordinaten x, y, z

und

Q „ „ ξ, η, ζ

besitzt:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \\ r^* &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 4)$$

Die Integrationen in 3) beziehen sich dann auf die Elemente ds und ds* des linearen Leiters L und dessen Spiegelbild L* zu E mit den Liniendichten $\lambda_{\xi,\eta,\zeta}$. In der Nähe irgendeines Quellpunktes $Q_{\xi,\eta,\zeta}$ ist φ_P von der Form:

$$\varphi_Q = 2\lambda_Q \cdot \lg \frac{1}{\varrho} + \text{functio continua}, \quad \ldots \quad 5)$$

wobei f. c. gegenüber $2\lambda_Q \lg \frac{1}{\varrho}$ zu vernachlässigen ist. Die Liniendichte λ für ein durch die willkürliche Randfunktion Π gegebenes Freileitungspotential bestimmt sich auch hier, wie auf S. 144 durch:

$$\lambda = \frac{\Pi}{2 \lg \frac{1}{\varrho}} \quad \ldots \quad 6)$$

[2ϱ = Dicke des endlichen Leiters].

Im praktisch wichtigsten Falle ist λ in linearer Abhängigkeit von der krummlinigen Koordinate s; denn nach dem Ohmschen Gesetze gilt für die Spannungsverteilung längs eines dünnen Leiters:

$$\Pi = a + bs \quad \ldots \quad 7)$$

Die Konstante a bestimmt den Nullpunkt des Potentials und die Konstante b das Spannungsgefälle bei überall gleichem Leiterquerschnitt durch:

$$b = \frac{\partial \Pi}{\partial s} = \frac{j}{\lambda_L} \quad \ldots \quad 8)$$

[j = Stromdichte; λ_L = Leitfähigkeit des Leitermaterials].

Kommen mehrere Leitungen im Felde vor, so erhält man die resultierende Potentialfunktion durch Summation der Potentiale der einzelnen Leiter nach dem Superpositionsprinzipe. Auch Verzweigungen von Leitungen zu berücksichtigen, bietet nach den Kirchhoffschen Sätzen keine Schwierigkeiten. Für die neuen Leiterzweige kommen im allgemeinen auch neue Konstanten a und b in Betracht; diese hängen vom Potentialnullpunkt, der diesbezüglichen Stromdichte und Materialleitfähigkeit ab.

Die hier gegebene Näherungsmethode eignet sich, wie leicht ersichtlich ist, zur Potentialbestimmung im umgebenden homogenen Dielektrikum von Gleichströmen und kann auch im Falle von nur nicht zu rasch oszillierenden Wechselströmen angewendet werden. Die Massen- und Potentialverteilung ist dann proportional der Stärke des Momentanstromes, bleibt sich jedoch immer ähnlich.

VI. Isolatorproblem.

Unter „Isolatorproblem"*[1] *verstehe ich dasjenige elektrostatische Problem, welches sich auf die Kombination einer Kreislochscheibe und eines geradlinigen, linearen Leiters in der Achse derselben als Randwertkörper bezieht.

I. Der lineare Leiter ist von unbegrenzter Länge: Für diesen Fall führt der Weg, den Herr Prof. Dr. H. Weyl mir gewiesen hat, am schnellsten zum Ziele. Man kann nämlich den unendlich langen Leiter und die Kreislochscheibe auffassen als Grenzfälle von Rotationshyperboloiden einer konfokalen Schar. Eine solche Schar wird mittelst elliptischer Koordinaten durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$\frac{r^2}{a^2 + \lambda^*} + \frac{z^2}{\lambda^*} = 1, \qquad \qquad 1)$$

wenn der Parameter λ^* in den Grenzen $-a^2 < \lambda^* < 0$ genommen wird. Im folgenden verwenden wir $\lambda = -\lambda^*$ als Parameter, wobei also: $0 < \lambda < a^2$. Die Potentialfunktion φ ergibt sich dann aus dem berühmten Potentiale des Ellipsoides (vgl. darüber z. B. in „Kirchhoffs Vorlesungen", Bd. IV, „Über das Potential des Ellipsoides") zu:

$$\varphi = \frac{m}{2} \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{(a^2 - \lambda)\sqrt{\lambda}} \qquad \qquad 2)$$

und nach Einführung der Substitution $\sqrt{\lambda} = \mu$ durch Integration:

$$\varphi = \frac{m}{a} \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{a} \qquad \qquad 3)$$

und daraus folgt unmittelbar:

$$\varphi = \frac{m}{a} \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 - \lambda}} \qquad \qquad 4)$$

Aus 3) und 4) erkennt man, daß die Flächen $\varphi =$ konst. (Niveauflächen) sich ergeben durch die Bedingung $\lambda =$ konst. Auf Grund der Gleichung:

$$\frac{r^2}{a^2 - \lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 1, \qquad \qquad 5)$$

die aus 1) hervorgeht, wenn man dort λ^* durch $-\lambda$ ersetzt, sind deshalb die Niveauflächen des berechneten Potentiales einschalige, konfokale Rotationshyperboloide. Die reelle Halbachse einer Meridianhyperbel hat die Länge $\sqrt{a^2 - \lambda}$, und die imaginäre Halbachse die Länge $\sqrt{\lambda}$. Da bei der Hyperbel die Differenz der beiden Brennstrahlen für jeden Punkt gleich der reellen Achse ist, gilt (vgl. dazu Abb. 7):

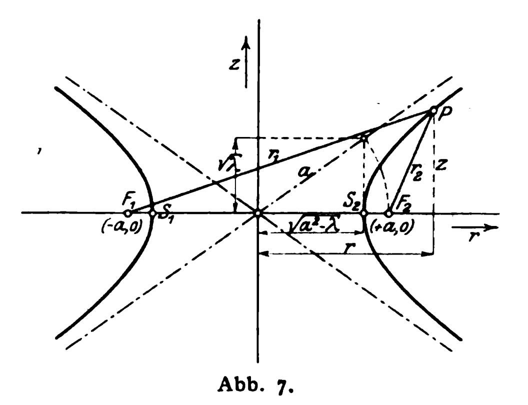


Abb. 7.

$$\sqrt{a^2 - \lambda} = \frac{r_1 - r_2}{2}, \qquad \qquad 6)$$

wobei nach der Abbildung:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(r + a)^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(r - a)^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \qquad \qquad 7)$$

[1]) Das hier vorliegende elektrische System ist die Idealisierung des bei den Hochspannungs-Durchführungsisolatoren vorkommenden Leitersystems.

ist. Aus 4) geht mit 6) und 7) für das Potential φ das Resultat hervor:

$$\varphi = \frac{m}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{2a}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}-\sqrt{(r-a)^2+z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Erweitert man das Argument des $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}$ mit der Summe der beiden Wurzeln im Nenner, so folgt dafür auch:

$$\varphi = \frac{m}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\sqrt{(r+a)^2+z^2}+\sqrt{(r-a)^2+z^2}}{2r}, \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

woraus hervorgeht, daß

$$\lim_{r=0}(\varphi) = \frac{m}{a}\cdot \lg\frac{1}{r} + \text{f. c.}$$

ist und also die Niveauflächen des Potentials sich zylindrisch an einen linearen Kern in der z-Achse des Koordinatensystems anschließen, wie es bei einem statisch geladenen linearen Leiter, der überall von derselben Ordnung unendlich dünn ist, sein muß. Der lineare Leiter entspricht in der Hyperbelschar der Hyperbel mit dem Werte $\lambda = a^2$.

Der Grenzübergang von 9) zu $z = 0$ liefert:

$$(\varphi)_{z=0} = \frac{m}{a}\cdot\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{(a+r)\pm(a-r)}{2r},$$

wobei das positive Zeichen zu verwenden ist, wenn $r < a$, und das negative, wenn $r > a$ ist. Daraus folgt aber:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi)_{z=0} &= \frac{m}{a}\cdot\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{a}{r}, \quad \text{wenn } r < a\\ &= 0 \quad\quad ,\quad\quad „ \quad r > a\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

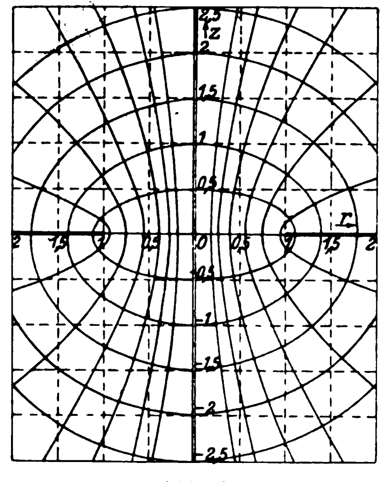


Abb. 8.

d. h. φ verschwindet an der Kreislochscheibe, welche somit auch Niveaufläche des Potentials ist. Die Kreislochscheibe ist ein zweiter Grenzfall der Rotationshyperboloide für den Wert $\lambda = 0$ und ist in der Auffassung als degeneriertes Rotationshyperboloid doppelblättrig.

Die Elektrizitätsdichte an der Kreislochscheibe erhält man nach Formel 16), Abschnitt I, aus:

$$\eta = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

und also aus 9) durch Differentiation nach z und den Grenzübergang zu $z = 0$. Es ergibt sich so:

$$\eta = -\frac{m}{2\pi a\sqrt{r^2-a^2}} \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

Die Dichte wird demnach am Rande der Kreislochscheibe unendlich.

Durch Integration über die Liniendichte des unbegrenzten linearen Leiters einerseits und über die elektrische Dichte an der Scheibe andererseits folgert man leicht, daß die Gesamtmengen des Drahtes und der Scheibe einander entgegengesetzt gleich sind. Der Verlauf der Niveau- und Kraftlinien des Potentials 8 bzw. 9 wird in Abb. 8 für einen Meridianschnitt dargestellt.

Willkürliche konzentrische Randwerte an der Kreislochscheibe: Sollen die Leiter des Isolatorproblems mit andern koaxialen Leitern kombiniert werden, so braucht man die Lösung des Isolatorproblems mit willkürlichen konzentrischen Rand-

werten des Potentials an der Kreislochscheibe. Man kann zu diesem Zwecke zur Formel 8) dieses Paragraphen die in Abschnitt II Formel 14) gefundene allgemeine Kreislochscheibenlösung addieren. Die Potentialwerte der Kreislochscheibe werden dann durch jene Funktion dargestellt, während der Potentialwert des linearen Leiters durch den Faktor m von Gl. 8) dieses Abschnittes gegeben werden kann.

II. Der lineare Leiter ist von endlicher Länge: *Es sollen für das Potential die Randwerte längs des linearen Leiters und eine konzentrische Verteilung an der Kreislochscheibe willkürlich vorgeschrieben sein.* Wir haben dann eine Funktion zu bestimmen, die den Bedingungen genügt:

I. $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$

[φ verschwindet im Unendlichen].

II. φ ist am linearen Leiter von der Form:

$$\varphi = 2\,\lambda(z)\lg\frac{1}{r} + \text{f. c.},$$

sonst aber vollständig stetig.

III. $\varphi = F(r)$ an der Kreislochscheibe [also für $z = 0$, $r > a$].

IV. Ableitungen von φ stetig, ausgenommen am Stäbchen und in der Normalenrichtung an die Kreislochscheibe.

Bei der Lösung der Aufgabe führt uns das Superpositionsprinzip zum Ziele. Wir berechnen zuerst das Potential des linearen Stäbchens für sich und lagern darüber noch das entsprechende Kreislochscheibenpotential.

Das lineare Stäbchen werde begrenzt durch die z-Ordinaten h_1 und h_2 (vgl. dazu Abb. 9). Der Ausdruck des Stäbchenpotentials lautet dann nach unseren Untersuchungen auf S. 143 und 144:

$$\varphi_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}}\,d\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

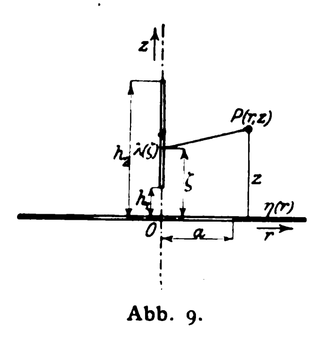


Abb. 9.

Um ein Potential mit der Randfunktion F(r) an der Kreislochscheibe [Radius des Begrenzungskreises $= a$] zu erhalten, addieren wir zu φ_1 eine Kreislochscheibenlösung φ_2 mit der Randfunktion $F(r) - (\varphi_1)_{z=0}$ an der Scheibe. Eine solche Funktion ist nach Abschnitt II möglich; ihre Flächendichte befindet sich ganz innerhalb der Scheibe und außerhalb derselben verläuft sie mit ihren Ableitungen stetig. Nach Abschnitt II, Formel 12) und Fußnote 1 von Seite 108 ist φ_2 der Imaginärteil von

$$\check{\varphi}_2 = \int_a^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2 + (z + i\xi)^2}}\,d\xi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13)$$

und da φ_1 an der Kreislochscheibe regulär bleibt, ist die Flächendichte dort gegeben durch die Formel 11), von Abschnitt II, welche lautet

$$\eta(r) = -\frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{d}{dr}\int_a^r \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}\,\xi\,d\xi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

wobei nach dem Besprochenen und Gl. 10), Abschnitt II zu setzen ist:

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\Phi(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r\,dr \quad \ldots \ldots \quad 15)$$

$$\Phi(r) = F(r) - \left| \varphi_1(r, z) \right|_{z=0} \quad \ldots \ldots \quad 16)$$

$$\varphi_1(r, z)\Big|_{z=0} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}} d\zeta \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

Führt man den Ausdruck 17) von $(\varphi_1)_{z=0}$ in 16) ein, so tritt in 15) folgendes Doppelintegral auf:

$$\frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \int_{h_1}^{h_2} \lambda(\zeta) \frac{r\,dr\,d\zeta}{\sqrt{r^2 - \xi^2}\sqrt{r^2 + \zeta^2}},$$

worin:

$$\lim_{g=\infty} \left(\frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{g} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}\sqrt{r^2 + \zeta^2}} \right) = -\frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \text{ [1]}$$

ist.

Für unser Isolatorproblem wird daher bei den willkürlichen Randfunktionen des Potentials

F(r) an der Kreislochscheibe und

$\Pi(z) = 2\lambda(z) \lg \frac{1}{\varrho}$ am Stableiter

$f(\xi)$ allgemein dargestellt durch:

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r\,dr + \xi \int_{h_1}^{h_2} \frac{\lambda(\zeta)}{\xi^2 + \zeta^2} d\zeta \right] \quad \ldots \ldots \quad 18)$$

Spezialisierung:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= -h_1 = h \\ \lambda(z) &= \frac{m}{2h} = \text{konst.} \\ F(r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

Um bei diesen vereinfachenden Annahmen $\eta(r)$ leicht berechnen zu können, formen wir das Integral in 14) partiell um. Es ist:

$$\int_a^r \frac{f(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \xi\,d\xi = f(a)\sqrt{r^2 - a^2} + \int_a^r f'(\xi) \cdot \sqrt{r^2 - \xi^2} \cdot d\xi \quad \ldots \ldots \quad 20)$$

und folglich:

$$\eta(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{f(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \int_a^r \frac{f'(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi \right] \quad \ldots \ldots \quad 21)$$

Ferner ergibt sich aus 18) und 19)

$$f(\xi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{h} \int_0^h \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} d\zeta,$$

[1]) Nähern Aufschluß über die Notwendigkeit der hier angewandten Grenzwertbildung gibt Gl. 2) der zur „Formeltabelle" gehörenden Fußnote.

d. h. also nach Integration und nachträglicher Differentiation nach ξ:

$$\left.\begin{aligned} f(\xi) &= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m}{h}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{h}{\xi}\right) \\ f'(\xi) &= \frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{m}{h^2+\xi^2} \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Substituiert man hieraus die Funktionen f(a) und $f'(\xi)$ nach 21) und wertet das dabei entstehende Integral

$$\int_a^r \frac{d\xi}{(h^2+\xi^2)\sqrt{r^2-\xi^2}} = -\left|\frac{1}{h\sqrt{r^2+h^2}}\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{\xi\sqrt{r^2+h^2}}{h\sqrt{r^2-\xi^2}}\right)\right|_{\xi=a}^{\xi=r} \qquad 23)$$

des zweiten Termes aus, so gelangt man zu dem folgenden Resultate für die *konzentrische Verteilung der Dichte an der Kreislochscheibe:*

$$\eta(r) = -\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{m}{h}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{h}{a}\right)}{\sqrt{r^2-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{a}{h}\sqrt{\frac{r^2+h^2}{r^2-a^2}}\right)\right] \qquad 24)$$

Damit ist aber das Problem der Elektrizitätsverteilung für den in 19) formulierten Spezialfall vollständig gelöst.

Führt man in Gl. 24) die neue Konstante $\overline{m} = \frac{a}{h}m$ ein und macht dann die Spezialisierung $h = \infty$, so ergibt sich:

$$\overline{\eta(r)} = -\frac{\overline{m}}{2\pi a\sqrt{r^2-a^2}} \qquad 25)$$

d. h. ein Resultat, das mit 11) im Einklange steht und nichts anderes bedeutet als die Flächendichte bei dem zuerst behandelten Isolatorproblem mit unendlich langem Leiter.

Um die Gesamtmenge an der Kreislochscheibe berechnen zu können, ermitteln wir zuerst die Elektrizitätsmenge zwischen den Kreisen $[r = a]$ und $[r = r]$:

$$q(r) = \int_0^{2\pi}\int_a^r \eta(r)\, r\, dr\, d\gamma \qquad 26)$$

Nach 14) folgt dafür:

$$q(r) = \int_a^r f(\xi)\frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}} \qquad 27)$$

Nach den Regeln über die Berechnung von Grenzwerten bei Integralen erhält man für die Gesamtmenge $q(\infty)$ aus Gl. 27), was hier übrigens auch durch partielle Integration und den entsprechenden Grenzübergang leicht bestätigt werden kann, bei einer beliebigen Funktion $f(\xi)$:

$$q(\infty) = \left|\xi\cdot f(\xi)\right|_{\xi=\infty}\cdot\left|\int_a^r \frac{d\xi}{\sqrt{r^2-\xi^2}}\right|_{r=\infty}$$

bzw. also:

$$q(\infty) = \frac{\pi}{2}\cdot\left|\xi\cdot f(\xi)\right|_{\xi=\infty} \qquad 28)$$

Für die in 19) angenommenen speziellen Werte ergibt sich somit nach 22):

$$q(\infty) = -m,$$

d. h. es ist in diesem Sonderfalle, wie aus 19) hervorgeht, die Gesamtmenge an der Scheibe entgegengesetzt gleich der Menge des linearen Leiters.

VII. Axiale Verteilung an einem unendlich langen Rotationszylinder.

Bei verschiedenen für die Anwendung wichtigen elektrostatischen Systemen, bei welchen zylindrische Leiter von kreisförmigem Querschnitte vorkommen, benötigt man die allgemeine Lösung eines Potentials, das durch eine willkürliche axiale Verteilung an einer Zylinderoberfläche gegeben ist.

Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie ist das Potential innerhalb eines geschlossenen Raumes vollständig bestimmt durch die Potentialwerte an der Oberfläche dieses Raumes [vgl. die Fußnote von S. 143]. *Dies ermöglicht unter der Voraussetzung, daß φ im Unendlichen verschwindet, eine Zerlegung unserer Aufgabe. Wir berechnen die Potentiale $\varphi^{(a)}$ und $\varphi^{(i)}$ des Zylinderaußen- und -innenraumes je für sich.*

Gemeinsam ist für die beiden Funktionen $\varphi^{(a)}$ und $\varphi^{(i)}$, daß sie überall stetig verlaufen und im Unendlichen verschwinden [die Randfunktion am Zylinder ist dafür entsprechend zu wählen], ferner, daß sie beide der Differentialgleichung:

$$\text{I.} \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügen und längs der Zylinderfläche in dieselbe willkürliche Randfunktion

$$\text{II.} \qquad F(z)$$

übergehen.

Zur Integration von Gl. I verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$\varphi_P = \cos(\alpha z)\,\Phi(r) + \sin(\alpha z)\,\Psi(r) \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

[$\Phi(r)$ und $\Psi(r)$ sollen nur Funktionen von r allein sein].

Für Φ und Ψ gelten dann die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\Phi}{dr} - \alpha^2\Phi = 0 \\ \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\Psi}{dr} - \alpha^2\Psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch die Besselschen Funktionen nullter Ordnung von rein imaginärem Argument. Für irgendeine solche Besselfunktion wollen wir einstweilen die Bezeichnung $B(i\alpha r)$ einführen. Gl. I wird dann erfüllt durch ein Partikularintegral von der Form:

$$\varphi_P = \cos(\alpha z)\,B(i\alpha r)\,f_1(\alpha) + \sin(\alpha z)\,B(i\alpha r)\,f_2(\alpha) \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

und durch das allgemeine Integral:

$$\varphi = \int_0^\infty B(i\alpha r)\,[\cos(\alpha z)\,f_1(\alpha) + \sin(\alpha z)\,f_2(\alpha)]\,d\alpha \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Um auch der Bedingung II zu genügen, verfügen wir über $f_1(\alpha)$ und $f_2(\alpha)$ so, daß nach dem Fourierschen Integraltheorem [Formeltabelle I, C] an der Zylinderoberfläche für das Potential φ der Randwert F(z) herauskommt. — Bezeichnet R den Zylinderradius, so ist zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha) = \frac{1}{\pi\cdot B(i\alpha R)}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos(\alpha\lambda)\,d\lambda \\ f_2(\alpha) = \frac{1}{\pi\cdot B(i\alpha R)}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\sin(\alpha\lambda)\,d\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Es folgt so:

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{B(i\alpha r)}{B(i\alpha R)} \cdot \left[\cos(\alpha z)\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos(\alpha\lambda)\,d\lambda + \sin(\alpha z)\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\sin(\alpha\lambda)\,d\lambda\right] d\alpha \quad . \; . \quad 6)$$

und nach Vereinigung der innern Integrale:

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{B(i\alpha r)}{B(i\alpha R)}\,d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha(z-\lambda)\,d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

Weil die Differentialgleichungen 2) von der zweiten Ordnung sind, existieren nur zwei linear unabhängige Besselfunktionen nullter Ordnung $B(ix)$; nämlich die Besselfunktion „erster Art" $J(ix)$ und die Besselfunktion „zweiter Art" $N(ix)$ [Neumannsche Zylinderfunktion]. Beide verlaufen für $0 < x < \infty$ durchaus monoton und besitzen an den Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$ die aus der folgenden Tabelle ersichtlichen speziellen Werte:

	$x = 0$	$x = \infty$
$J(ix)$	1	$\frac{e^{+x}}{\sqrt{2\pi x}}$ [1]
$N(\pm ix)$	$-\frac{2}{\pi}\lg\frac{2}{\gamma x} \pm i$	$-\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \pm iJ(ix)$

$\quad . \; . \; . \quad 8)$

Bezeichnen wir in 7):

$$\frac{B(i\alpha r)}{B(i\alpha R)} = \psi(\alpha), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$

so ist das Doppelintegral in 7) konvergent, wenn:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha(z-\lambda)\,d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

den Fourierschen Bedingungen gemäß gegeben ist [vergleiche darüber: Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, S. 47] und $\psi(\alpha)$ von einem bestimmten α an mit wachsendem α beständig abnimmt und sich dabei für $\alpha = \infty$ stetig (asymptotisch) der Grenze Null nähert[2]), d. h. es muß also sein:

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(\frac{B(i\alpha r)}{B(i\alpha R)}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11)$$

Wegen des eigentümlichen Verhaltens der Funktionen $J(ix)$ und $N(ix)$ für ein unendlich großes Argument [nach den asymptotischen Darstellungen in 8) werden dafür nämlich beide unendlich wie $\frac{e^{+x}}{\sqrt{x}}$], müssen wir, um der Bedingung 11) Rechnung zu tragen, zwei Fälle unterscheiden; nämlich wo $r < R$ und wo $r > R$ ist.

Zylinderinnenraum [$r < R$]: Die einzige Funktion $B(ix)$, die hierfür in Betracht kommt, ist $J(ix)$; diese bleibt nämlich an der Grenze $x = 0$ mit ihren Ableitungen stetig [was für $N(ix)$ nicht zutrifft]; auch steht, solange wenigstens $r < R$ ist, $J(i\alpha r)$ zu $J(i\alpha R)$ in einem solchen Verhältnis, daß:

---

[1]) Siehe z. B. Jahnke und Emde, Funktionentafeln, Verlag B. G. Teubner 1909, S. 92, 96 und 100.

[2]) Vergleiche darüber: Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, 5. Aufl., Bd. I, S. 17 oben.

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}\right)=\left|\sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\alpha(R-r)}\right|_{\alpha=\infty}=0 \quad \text{ist.}$$

Für den Zylinderinnenraum haben wir deshalb die folgende allgemeine Lösung für das Potential:

$$\varphi^{(i)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha(z-\lambda)\, d\lambda\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

die für $r=R$ stetig in die Randfunktion $F(z)$ übergeht.

Zylinderaußenraum $[r>R]$: Für den Fall, daß $r>R$ ist, kann für $B(ix)$ keines der Partikularintegrale $J(ix)$ und $N(ix)$ der Differentialgleichungen 2) allein verwendet werden, weil beide für $x=\infty$ wie $\frac{e^{+x}}{\sqrt{x}}$ unendlich werden. Nach 8) wäre dann, abgesehen von nebensächlichen Konstanten

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(\frac{B(i\alpha r)}{B(i\alpha R)}\right)=\left|\sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{+\alpha(r-R)}\right|_{\alpha=\infty},$$

also sicher von sehr hoher Ordnung [im Grenzwert sogar unendlich hoher Ordnung] unendlich. Die einzige Funktion, die den Differentialgleichungen 2) genügt und 11) nicht widerspricht, ist die folgende lineare Kombination:

$$H(\pm ix)=N(\mp ix)\pm i\,J(ix), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

die sog. „Hankelsche Zylinderfunktion", aus den Partikularintegralen $J(ix)$ und $N(ix)$. Nach 8) gilt dafür die asymptotische Darstellung:

$$H_{x=\infty}(\pm ix)=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

so daß:

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(\frac{H(i\alpha r)}{H(i\alpha R)}\right)=\sqrt{\frac{R}{r}}\cdot e^{-\alpha(r-R)} \quad \text{für} \quad r>R \quad \ldots\ldots \quad 15)$$

ist; ein Ausdruck, der also im Grenzwert stark gegen Null konvergiert. — *Das Potential des Außenraumes wird daher allgemein dargestellt durch*:

$$\varphi^{(a)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H(i\alpha r)}{H(i\alpha R)}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha(z-\lambda)\, d\lambda \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

VIII. Zylinder-Hohlraumpotential.

In irgendeinem Punkte der Achse eines hohlen, leitenden und im Unendlichen geerdeten Rotationszylinders befinde sich ein elektrischer Pol P mit der Masse m (s. Abb. 10). Der Pol P erregt im Zylinderhohlraume ein elektrisches Feld mit für die Zylinderinnenfläche verschwindenden Potentialwerten. Bei der Ermittlung der für den Zylinderhohlraum geltenden Potentialfunktion φ verwenden wir das Superpositionsprinzip und bestimmen zum Potentiale

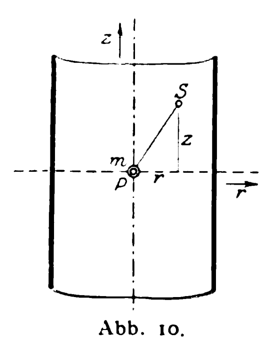


Abb. 10.

$$\varphi_1=\frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

des Poles ein Potential φ_2, das an der Zylinderfläche [Zy-

linderradius = R] die entgegengesetzt gleiche Randfunktion

$$F(z) = -\frac{m}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \ldots \quad 2)$$

wie dieses besitzt und im Zylinderinnern vollständig stetig verläuft. Wir haben dazu bloß im Integrale, Formel 12) des vorigen Abschnittes, $F(\lambda)$ Gl. 2) entsprechend zu wählen. Für φ_2 gilt also:

$$\varphi_2 = -\frac{m}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha(z-\lambda)}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\, d\lambda, \quad \ldots \quad 3)$$

und da für jede „gerade Funktion“ $F(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos\alpha(z-\lambda)\, d\lambda = 2\cos(\alpha z)\int_0^\infty F(\lambda)\cos(\alpha\lambda)\, d\lambda \quad \ldots \quad 4)$$

ist, muß auch sein:

$$\varphi_2 = -\frac{2}{\pi} m \int_0^\infty \cos(\alpha z)\cdot\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}\, d\alpha \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\lambda)}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\, d\lambda \quad \ldots \quad 5)$$

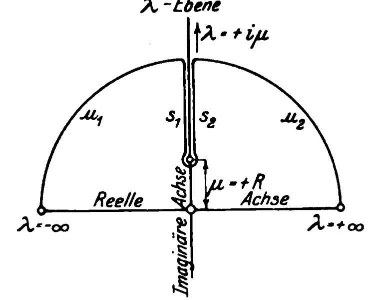
Hierin ist aber:

$$H(i\alpha R) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\lambda)}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\, d\lambda) \text{ [1]} \quad \ldots \quad 6)$$

nichts anderes als eine exakte Integraldarstellung für die Hankelsche Zylinder funktion $H(+i\alpha R)$.

[1]) Für das hier vorkommende Integral kann man nämlich auch schreiben:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\lambda) + i\sin(\alpha\lambda)}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\, d\lambda \quad \ldots \quad (I)$$



Der Integrationsweg erstreckt sich für ein reelles λ in der „λ-Ebene“ über die reelle Achse von $\lambda = -\infty$ bis $\lambda = +\infty$ und ist für ein imaginäres $\lambda = i\mu$ nach dem Integralsatz von Cauchy zu ersetzen durch den „Schleifenweg“ (u_1, s_1, s_2, u_2). (Vergleiche nebenstehende Figur.) Da nun die Integralbeiträge von den Intervallen u_1 und u_2 gleich 0

$$\left[\text{folgt aus } \lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right) = 0\right]$$

und diejenigen der Intervalle s_1 und s_2 auf der imaginären Achse absolut gleich sind, geht für $\lambda = i\mu$ aus (I) hervor:

$$\frac{2}{\pi}\int_R^\infty \frac{e^{-\alpha\mu}}{\sqrt{\mu^2 - R^2}}\, d\mu \quad \ldots \quad (II)$$

Nach der dritten Gleichung auf Seite 489 von Riemann-Weber, Partielle Diff.-Gl. Bd. I, 5. Aufl. und Gl. 8) und 13) des vorhergehenden Abschnittes ist II aber identisch mit der Hankelschen Zylinderfunktion $H(i\alpha R)$ und besitzt, was für die nachfolgenden Betrachtungen wesentlich ist, für $\alpha = \infty$ eine asymptotische Darstellung von der Form:

$$-\frac{e^{-\alpha R}}{\sqrt{\alpha R}}.$$

Für das Potential φ_2 hat man daher folgendes Integral:

$$\varphi_2 = -m \int_0^\infty \cos(\alpha z) \frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)} \cdot H(i\alpha R)\, d\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Um dieses Integral durch elementare Funktionen ausdrücken zu können, entwickeln wir den Quotienten $\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}$ mit Hilfe der für jedes reelle und komplexe x gültigen Reihe:

$$J(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{3!^2} + \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

in eine Potenzreihe durch den Ansatz:

$$J(i\alpha r) = J(i\alpha R) \cdot [a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots] \ldots \ldots \quad 9)$$

Da in den Reihen von $J(i\alpha r)$ und $J(i\alpha R)$ nur Potenzen von α mit geraden Exponenten vorkommen, ergibt sich leicht, daß in der Reihenentwicklung alle Koeffizienten mit ungeradem Index Null sind. Das Integral in 7) ist deshalb von der Form:

$$\int_0^\infty \cos(\alpha z) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot \alpha^{2k} \right) \cdot H(i\alpha R)\, d\alpha \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

und darf hier gliedweise ausgeführt werden. Um mich kurz fassen zu können, will ich mich auf den diesbezüglichen Beweis nicht weiter einlassen; doch sei bemerkt, daß er sich der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe und der für $\alpha = \infty$ monoton zu $\frac{e^{-\alpha R}}{\sqrt{\alpha R}}$ verlaufenden Funktion $H(i\alpha R)$ wegen relativ einfach erbringen läßt.

Für 10) ist dann also zu schreiben:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \int_0^\infty \cos(\alpha z) \cdot \alpha^{2k} \cdot H(i\alpha R)\, d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_{2k} \cdot \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\int_0^\infty \cos(\alpha z) H(i\alpha R)\, d\alpha \right).$$

Um das Integral auswerten zu können, verwenden wir die Integraldarstellung 6) von $H(i\alpha R)$ und berücksichtigen das Fouriersche Integraltheorem (Formeltabelle I, B). Es folgt so:

$$\int_0^\infty \cos(\alpha z) H(i\alpha R)\, d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, d\alpha \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\lambda)}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

und also mit Berücksichtigung der Konstanten ($-$ m) in 7) für das Potential φ_2 die Reihe:

$$\varphi_2 = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_{2k} \cdot \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\frac{m}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

von der beliebig viele Glieder berechnet werden können.

Die Koeffizienten $a_0, a_2, a_4 \ldots a_{2k}$ lassen sich aus 9) nach Ausmultiplizierung der Glieder von $J(i\alpha R)$ mit der angesetzten Potenzreihe durch die Methode der Koeffizientenvergleichung sukzessive berechnen. Man findet so, daß der Anfang der Potenzreihe lautet:

$$\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)} = 1 - \frac{R^2 - r^2}{4} \cdot \alpha^2 + \frac{(R^2 - r^2)(3R^2 - r^2)}{64} \cdot \alpha^4 - \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

Da r der 8) entsprechenden Reihe für $J(i\alpha r)$ wegen in allen Koeffizienten a_{2k} bloß als gerade Potenz vorkommen kann und außerdem:

$$\left|\frac{d^{2k+1}}{dz^{2k+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right|_{z=0}$$

verschwindet, sind die Randwerte:

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)_{r=0}; \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Null. Die Niveaulinien des Potentials φ_2 verlaufen also ohne Knickung durch die z-Achse und Ebene $(z=0)$ hindurch; auch hat φ_2 als „analytische" Funktion in seinem ganzen Geltungsbereich $[r<R]$ sonst stetigen Charakter [vgl. dazu 11)].

Bricht man die Entwicklung 11) schon nach dem zweiten Gliede ab, so folgt mit Rücksicht auf 12):

$$\varphi_2 = -\frac{m}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[1-\frac{(R^2-r^2)(R^2-2z^2)}{4(R^2+z^2)^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

und für das *„Zylinderhohlraumpotential"* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$\varphi = \frac{m}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{m}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[1-\frac{(R^2-r^2)(R^2-2z^2)}{4(R^2+z^2)^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

Hieraus läßt sich die elektrische Dichte η der Zylinderfläche bestimmen durch:

$$\eta = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

Man erhält so:

$$\eta(z) = -\frac{3}{8}\cdot\frac{m}{\pi}\cdot\frac{R^3}{(R^2+z^2)^{5/2}}, \quad . \quad 15)$$

und durch Integration über die ganze Zylinderfläche (Z) folgt:

$$q = \int_{(Z)} \eta\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} \eta(z)\cdot R\, dz\, d\gamma = -m,$$

d. h. auch die Näherungslösung zeigt schon, wie es notwendigerweise sein muß, wenn φ wie im vorliegenden Falle im Zylinderaußenraum Null ist, daß die am Zylinder induzierte Menge entgegengesetzt gleich der Menge des Poles $(+m)$ ist.

Die zur Auswertung des Integrals 7) verwendete Methode der Reihenentwicklung führt, wie leicht einzusehen ist, auch dann noch zum Ziele, wenn an Stelle der Randfunktion:

$$\frac{m}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

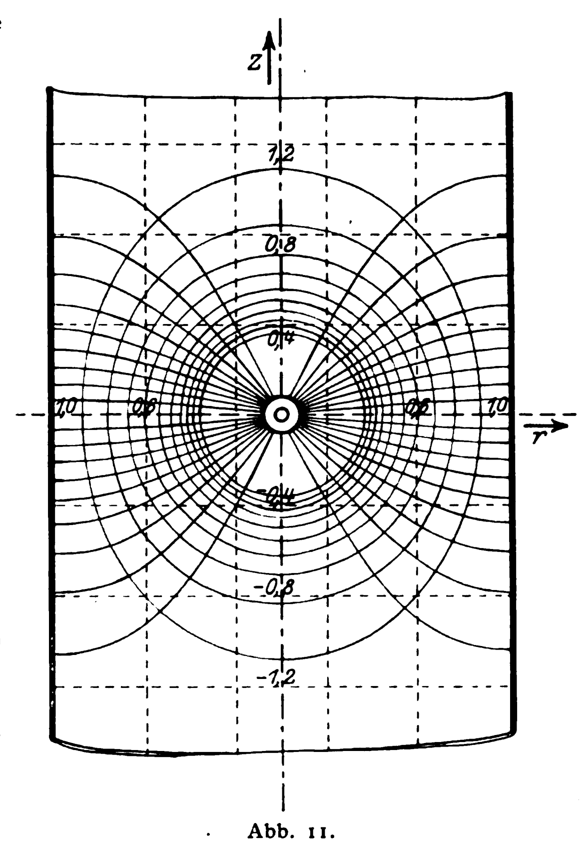


Abb. 11.

der Zylinderfläche irgendeine andere willkürliche Funktion F(z) tritt, die bloß der folgenden Bedingungsgleichung, in welcher k irgendeine positive ganze Zahl bedeutet, zu genügen hat:

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(\alpha^{2k}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{i\alpha\lambda}\cdot d\lambda\right) = 0\,^{1)}.$$

[1]) **Diese Bedingungsgleichung ergibt sich unter der Voraussetzung, daß in Gleichung 3) die**

Das Potential $\varphi^{(1)}$ [Formel 12) des vorhergehenden Abschnittes] ist deshalb mathematisch besonders interessant, weil es sich, abgesehen von der erwähnten Konvergenzbedingung, sonst für eine willkürliche Randfunktion durch eine der Formel 11) dieses Abschnittes entsprechende Reihe ausdrücken läßt, von der beliebig viele Glieder auf elementare Weise berechenbar sind.

Anwendung der Potentiallösung des Zylinder-Hohlraumpotentials auf das konzentrische Kabel. Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß sich die mathematische Lösung des Zylinder-Hohlraumpotentials zur Bestimmung der Potentialverteilung im Isoliermantel des gestreckten, konzentrischen Kabels verwenden läßt, sofern nur der Isoliermantel aus homogenem Material besteht und die Kabelader im Vergleich zu dessen Durchmesser dünn ist. Dann ist es zulässig, die Kabelader als linear und also als Superposition von Massenpolen aufzufassen. Die auf den äußern Begrenzungszylinder der Kabelisolation bezogenen Zylinder-Hohlraumpotentiale aller dieser Massenpole liefern in ihrer Summe ein Potential, das sich, falls die Massenverteilung stetig ist, dort verhält wie das Potential eines linearen Leiters (vgl. darüber S. 144) und an der Zylinderfläche verschwindet. Das Potential φ des Kabelinnern sei gegeben durch die Randwerte

$$\Pi = 2\lambda(z)\cdot \lg\frac{1}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

[$\lambda(z)$ = lineare Dichte (willkürliche Funktion); 2ϱ = Leiterdicke]

des in der z-Achse liegenden linearen Leiters und wird also nach 1) und 7) dargestellt durch:

$$\varphi = \int\limits_{(L)} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\,d\zeta - \int\limits_{(L)} \lambda(\zeta)\,d\zeta \int\limits_0^\infty \cos\alpha(z-\zeta)\cdot\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}\cdot H(i\alpha R)\,d\alpha \quad . \quad 17)$$

Anhang.

Konstruktion der Kraftlinienbilder.

Alle in der Arbeit gezeichneten Kraftlinienbilder sind Meridianschnitte von axialsymmetrischen Feldern. Überall wurden Zylinderkoordinaten (r, z) mit der z-Achse als Symmetrieachse verwendet.

Zur Konstruktion der Bilder denke man sich das Potential φ als dritte, rechtwinklige Koordinate über einer Meridianebene [Tafel (r, z)] aufgetragen. φ wird dann dargestellt durch eine in bestimmter Weise verlaufende Fläche [Potentialfläche], aus welcher die Niveaulinien als Schnitte mit den Ebenen φ = konst. hervorgehen. Die Potentialfläche ist für die Bilder festgelegt durch zwei Kurvenscharen, welche in zwei zueinander senkrecht stehenden Parallelebenen-Büscheln liegen. Die Achsen dieser Büschel sind die Tafelnormalen in den unendlich fernen Punkten der r- und z-Achsen. — Die Niveaulinien der Abbildungen besitzen je gleiche Potentialunterschiede; sie sind

Reihenentwicklung 12) für $\frac{J(i\alpha r)}{J(i\alpha R)}$ verwendet und die Integration dann gliedweise ausgeführt wird, aus einem Satze über „bedingt" konvergierende Integrale. [Vgl. dazu: Riemann-Weber, Part. Diff.-Gl., 5. Aufl. Bd. I, Seite 17 oben.]



daher hervorgegangen aus den Schnittkurven eines Systems äquidistanter „Hauptebenen" mit der Potentialfläche.

Für die Kraftlinien (Begrenzungen der Kraftröhrenschnitte) wurden die Anfänge und Enden an den Leitern derart ermittelt, daß die Kraftröhren dort je gleiche Elektrizitätsmengen überdecken und somit für jede beliebige Querschnittsfläche auch denselben Kraftfluß besitzen. Von der Konstruktion weiterer Punkte wurde abgesehen; die Kraftlinien sind hernach einfach unter möglichster Berücksichtigung des rechtwinkligen Schnittes mit den Niveaulinien zwischen Anfang und Ende eingezeichnet worden.

Während also die Niveaulinien vollständig einwandsfrei konstruiert sind, gilt dies für die Kraftlinien in Anbetracht der Konstruktionsweise nur mehr oder weniger.

Um die Berechnung und Konstruktion der Kraftlinienbilder an Hand eines Beispieles deutlicher zu machen, sind nachfolgend noch die nötigen Tabellen und Hilfskurven des Bildes von Abschnitt III beigegeben.

Influenzwirkung eines elektrischen Poles auf die Kreislochscheibe.

(Vergleiche Abschnitt III.)

Formel 6):

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}} \cdot \arccos \frac{\sqrt{a^2 z^2 + (r^2 + z^2 + a r)^2} - \sqrt{a^2 z^2 + (r^2 + z^2 - a r)^2}}{2 a r}.$$

Tabelle für φ ($a = 1$, $m = 1$):

z	r							
	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5
0	∞	3,3333	1,3303	0,6143	0	0	0	0
0,25	3,3762	2,1992	1,1426	0,5876	0,2589	0,05876	0,02313	0,01087
0,50	1,4096	1,1960	0,8144	0,5021	0,2902	0,09716	0,04083	0,02077
1,0	0,50000	0,4709	0,3979	0,3097	0,2284	0,1164	0,06071	0,03446
1,5	0,24956	0,2417	0,2202	0,1904	0,1581	0,1014	0,06299	0,03976
2,0	0,14758	0,1447	0,1365	0,1244	0,1101	0,08087	0,05679	0,03942
3,0	0,068278	0,06764	0,0658	0,0469	—	—	—	—

Formel 10):

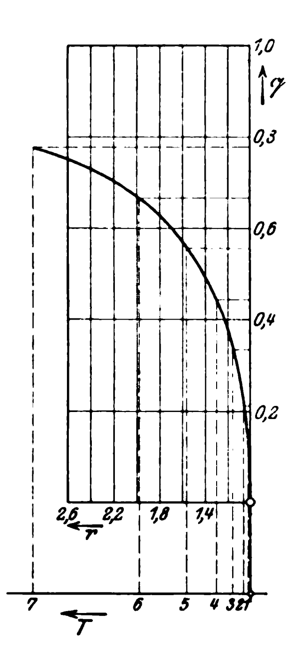
$$q(r) = -\frac{2}{\pi} m \cdot \arccos\left(\frac{a}{r}\right).$$

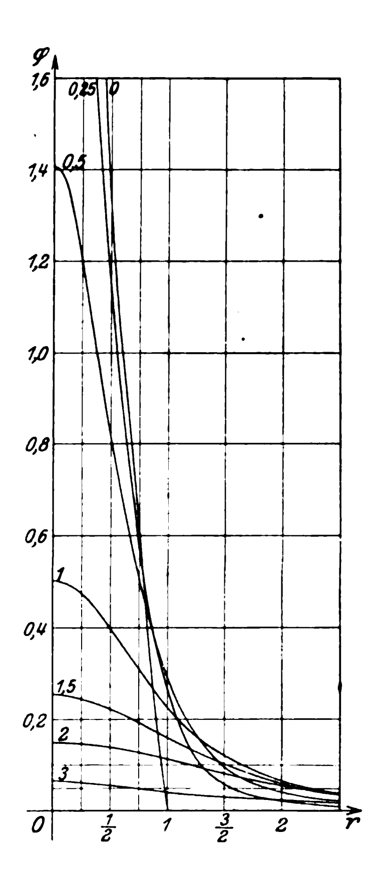
(Berechnung der Tabellen mittels fünfstelliger Logarithmen.)

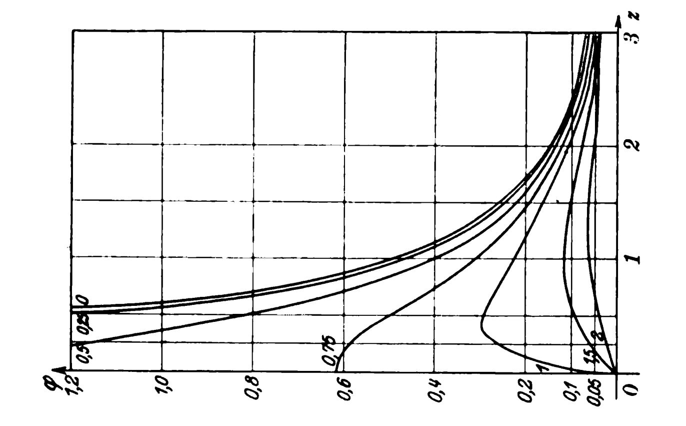
Tabelle für $\mathfrak{q}$ ($a = 1$, $m = 1$):

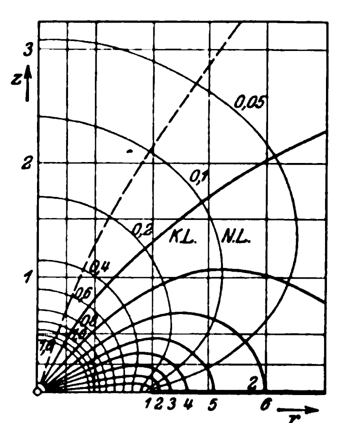
r	$-\mathfrak{q}(r)$
1,0	. 0
1,2	0,3729
1,4	0,49349
1,6	0,57019
1,8	0,62500
2,0	0,66666
2,2	0,69959
2,4	0,72639
2,6	0,74867
∞	1

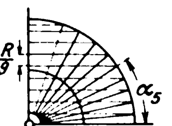
Zugehörige Zeichnungen findet man nebenstehend und auf Seite 110.











Über Messungen an Wechselstromkurven von der Frequenz elektrischer Wellen.

Nachtrag zu: Über Aufnahme von Wechselstromkurven unter Benutzung der ionisierenden Wirkung von Kathodenstrahlen.

Von

Ernst Lübcke.

In der oben genannten Arbeit[1]) habe ich gezeigt, wie man nach Art der Joubertschen Scheibe durch einen Kontakt, der auf Ionisation von Gasen durch Kathodenstrahlen beruht, die Augenblickswerte von Wechselstromkurven bis zu einer Frequenz von $5 \cdot 10^4$ (Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^7$ m) bestimmen kann. Im Abschnitt VI ist dort angedeutet, wie man die Versuchsanordnung durch Verwenden einer weiteren, angesetzten Braunschen Röhre für die Messungen an Wechselstromkurven höherer Frequenz umgestalten kann. Im folgenden sollen eine genaue Angabe einer derartigen Versuchsanordnung gegeben und die Grenzen der Methode bestimmt werden.

I. Versuchsanordnung.

In Abb. 1 sind zwei kombinierte Braunsche Röhren dargestellt. Als Kathode K dient eine Glühkathode[2]), die es ermöglicht, Kathodenstrahlen beliebiger Geschwindigkeit zu benutzen. Die von K ausgehenden Kathodenstrahlen gelangen durch die Blende A in den Ablenkungsraum bei D; dort wirkt ein Drehfeld, das entweder von

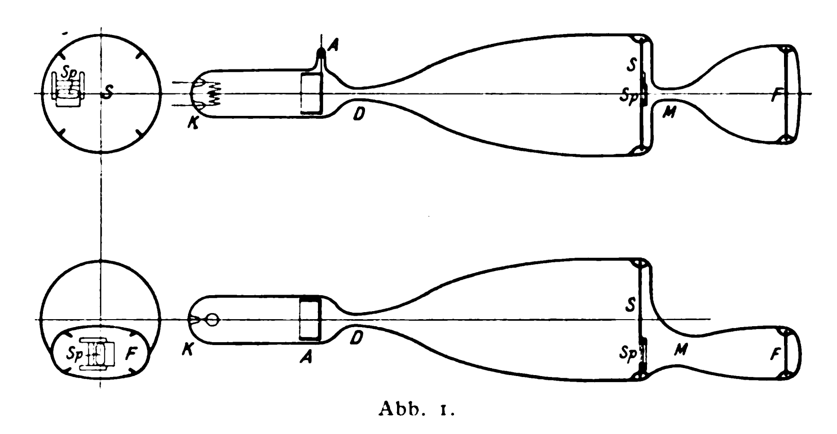


Abb. 1.

zwei senkrecht zueinander stehenden magnetischen Feldern oder einem magnetischen und einem dazu parallelen elektrischen Felde hervorgebracht wird. Die die Felder erzeugenden Ströme, oder Strom und Spannung, sind um 90^0 in Phase gegeneinander verschoben und von derselben Frequenz wie der aufzunehmende Wechselstrom. Unter der Einwirkung des Drehfeldes beschreibt der Kathodenstrahl den Mantel eines Kegels und seine Spur einen Kreis auf dem Schirm S. In dem Schirm ist ein in der Breite veränderlicher, radialer Schlitz Sp angebracht, der den Kathodenstrahl bei jedem Kreisumlauf einmal in die zweite Braunsche Röhre eintreten und dann durch das zwischen

[1]) Diese Zeitschr. **5**, 314, 1917.

[2]) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. **14**, 425, 1904. Phys. Zeitschr. **6**, 732, 1905. W. D. Coolidge, Phys. Rev. Dez. 1913. F. J. Koch, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **23**, 1, 1915.

den Platten bei M herrschende elektrische Feld hindurchgehen läßt. An den Ablenkungsplatten M liegt die aufzunehmende Wechselspannung. Das durch sie hervorgerufene Wechselfeld lenkt den Kathodenstrahl also nach seiner im Augenblick des Durchgangs herrschenden Größe ab. Diese Ablenkung wird auf dem Fluoreszenzschirm F abgelesen. Dreht man die Drehfeldeinrichtung bei D, so wandert der Kathodenstrahlfleck auf F auf einer Geraden.

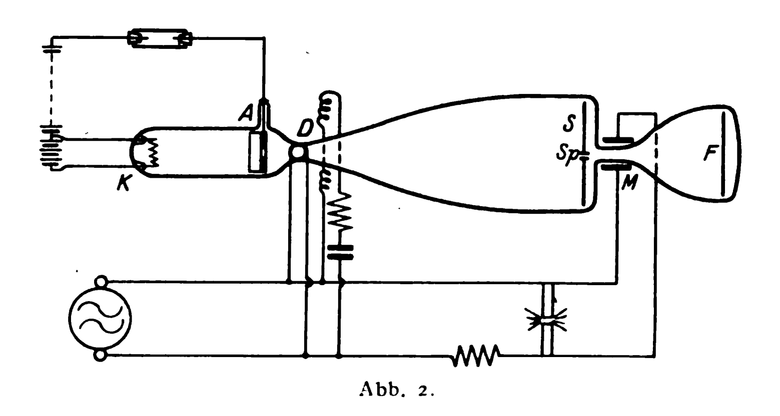


Abb. 2.

Abb. 2 stellt eine Schaltungsskizze dar, wie sie zur Aufnahme der Spannungskurve z. B. eines Wechselstromlichtbogens Verwendung finden kann.

II. Fehlerquellen und Grenzen der Methode.

Die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ist nicht unendlich groß, sondern hat einen endlichen Wert $v = 5{,}95 \cdot 10^7 \sqrt{V}$ cm/sec, wobei V in Volt gemessen ist[1]). Der Kathodenstrahl gebraucht also eine gewisse Zeit, um vom Drehfeldraum D zum Ablenkungsraum M und von dort zum Fluoreszenzschirm F zu gelangen. Tabelle 1 gibt in der 1. Spalte die an der Braunschen Röhre angelegte Spannung in Volt an, in der 2. Spalte die zugehörige Geschwindigkeit der entstehenden Kathodenstrahlen, in der 3. und 4. Spalte die Zeiten t_{40} bzw. t_{20}, die zum Zurücklegen der Strecke DM = 40 cm und MF = 20 cm erforderlich ist.

Tabelle 1.

Volt	v cm/sec	t_{40} Sek.	t_{20} Sek.
10	$1{,}88 \cdot 10^8$	$2{,}12 \cdot 10^{-7}$	$1{,}06 \cdot 10^{-7}$
220	$8{,}83 \cdot 10^8$	$4{,}52 \cdot 10^{-8}$	$2{,}26 \cdot 10^{-8}$
440	$1{,}48 \cdot 10^9$	$2{,}70 \cdot 10^{-8}$	$1{,}35 \cdot 10^{-8}$
1 000	$1{,}88 \cdot 10^9$	$2{,}12 \cdot 10^{-8}$	$1{,}06 \cdot 10^{-8}$
5 000	$4{,}21 \cdot 10^9$	$9{,}52 \cdot 10^{-9}$	$4{,}76 \cdot 10^{-9}$
23 000	$9{,}03 \cdot 10^9$	$4{,}45 \cdot 10^{-9}$	$2{,}22 \cdot 10^{-9}$

Die Gleichspannungen bis 440 Volt können einer Lichtleitung, bis 5000 Volt einer Hochspannungsmaschine oder Hochspannungsakkumulatorenbatterie entnommen werden, während zur Herstellung einer noch höheren Gleichspannung eine gute Influenzmaschine oder eine Hochspannungsanlage nach Des Coudres[2]) verwandt werden müßte.

Nach der in Tabelle 1, Spalte 3 angegebenen Zeit t_{40} werden die bei D abgelenkten Kathodenstrahlen bei M nicht von dem Spannungswert der zugehörigen Phase, sondern von einem zeitlich späteren abgelenkt, und das durch den Schlitz Sp tretende

[1]) Müller-Pouillet, 4, 1043. Braunschweig 1914.
[2]) H. Kröncke, Dissertation. Göttingen 1913.



Kathodenstrahlbündel erscheint nicht gleichzeitig mit der am Index bei D angezeigten Phase, sondern um einen von der Frequenz des aufzunehmenden Wechselstromes und der Kathodenstrahlgeschwindigkeit abhängigen Winkel verschoben. Die Größe dieses Winkels ist in Tabelle 2 in Graden angegeben. An Stelle der Frequenz des Wechselstromes ist die in der Praxis der elektrischen Schwingungen übliche Bezeichnung durch Wellenlängen in m getreten.

Tabelle 2.

Wellenlänge in m	220 Voltstrahlen	440 Voltstrahlen	1000 Voltstrahlen	5000 Voltstrahlen	23000 Voltstrahlen
10 000	0,49°	0,29°	0,23°	0,10°	0,05°
1 000	4,89°	2,92°	2,29°	1,03°	0,48°
100	48,9°	29,2°	22,9°	10,3°	4,8°
10	489°	292°	229°	103°	48°
1	4890°	2920°	2290°	1030°	480°

Der Kathodenstrahlkegel erscheint um seine Mittellinie verdrillt. Da die Phasenverschiebung für eine bestimmte Wellenlänge und eine bestimmte Kathodenstrahlgeschwindigkeit gleich bleibt, kann man sie als eine Verschiebung des Nullpunktes an der Gradteilung bei D gegen den Index betrachten und ohne weiteres in Rechnung setzen.

Die endliche Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen macht sich in der zweiten, kleineren Röhre folgendermaßen bemerkbar: die Ablenkungsplatten M werden so dicht wie möglich an den Spalt herangerückt, so daß Verzögerungen zwischen der Ablenkung hier und der in Tabelle 2 angegebenen Phasenverschiebung vernachlässigt werden können. Hat der Strahl das Feld zwischen den Ablenkungsplatten M verlassen, so wirkt kein Feld mehr auf ihn ein und er geht dann geradlinig auf den Schirm F zu. Fehler können also nur dadurch entstehen, daß sich während der Zeit, die der Strahl zum Durchlaufen des Feldes braucht, die Phase der an den Platten M anliegenden Wechselspannung und damit die Feldgröße selbst geändert hat. Diese Änderung ist abhängig von der Kathodenstrahlgeschwindigkeit und der Wellenlänge. Die Zeit t_8, die ein bestimmter Voltstrahl zum Zurücklegen einer Strecke von der Länge der Ablenkungsplatten (3 cm) gebraucht, wird berechnet (Tabelle 3, Spalte 1 und 2). Die Phasenänderung der Wechselspannung während dieser Zeiten ist in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ in Tabelle 3, Spalte 3, 4, 5, 6, 7 angegeben.

Tabelle 3.

Voltstrahlen	t_8 Sek.	10000 m	1000 m	100 m	10 m	1 m
220	$3{,}39 \cdot 10^{-9}$	0,04°	0,36°	3,65°	36,5°	365°
440	$2{,}02 \cdot 10^{-9}$	0,02°	0,22°	2,18°	21,8°	218°
1 000	$1{,}59 \cdot 10^{-9}$	0,02°	0,17°	1,72°	17,2°	172°
5 000	$0{,}714 \cdot 10^{-9}$	0,01°	0,08°	0,78°	7,75°	77,5°
23 000	$0{,}333 \cdot 10^{-9}$	0,00°	0,04°	0,36°	3,60°	36,0°

Nimmt man jetzt an, daß sich die Kurve während $^1/_{100}$ der Periode sehr wenig ändert, daß man also bei der Messung eines Mittelwertes von $^1/_{100}$ Periode keinen merklichen Fehler begeht, so zeigen die Angaben in Tabelle 3, daß man bei 220 Voltstrahlen noch Wechselstromkurven von 100 m Wellenlänge, dagegen bei 23000 Voltstrahlen noch solche von 10 m Wellenlänge aufnehmen kann. Da es kaum erreichbar sein wird, ungedämpfte Schwingungen hinreichend großer Energie von 10 m Wellenlänge herzustellen, wie die Methode verlangt, so wird im allgemeinen bei der Anwen-

dung der Methode eine Spannung von 220 Volt zur Herstellung der Kathodenstrahlen hinreichend sein.

Die Genauigkeit einer Messung ist von der Schärfe des Fleckes auf dem Fluoreszenzschirm abhängig. Diese ist um so größer, je weniger sich das Feld zwischen den Platten M während des Durchganges des Kathodenstrahles ändert. Also muß die Eintrittszeit des Kathodenstrahles in die obere Röhre möglichst kurz sein. Sie darf höchstens gleich der Zeit t_3 in Tabelle 3 sein. Aus der Tabelle 3 ist auch zugleich zu ersehen, welchen Bruchteil der Periode (des Kreises der Kathodenstrahlen auf S) die Schlitzbreite betragen darf. Rechnet man den Kreisumfang zu 30 cm, so darf die Breite des Schlitzes nicht mehr als 3 mm sein, um Messungen an Wellen von 100 oder 10 m Länge vornehmen zu können. Da für die Beobachtung eine Schlitzbreite von 1 mm ausreichend ist, so kann man die Werte einer Spannungskurve von 100 m Wellenlänge bis auf $^1/_{300}$ Periode bei 220 Voltstrahlen genau messen.

Die weichen 220-Voltstrahlen haben außerdem den Vorteil, daß sie eine sehr genaue Messung der bei M herrschenden Spannung aus der Größe der Ablenkung des Kathodenstrahlfleckes auf F erlauben. Die maximale Ablenkung des Fleckes soll nach jeder Seite von der Nullage 5 cm betragen. Bei einem Abstand von 2 cm und einer Länge von 3 cm der Ablenkungsplatten gibt Tabelle 4, Spalte 2 die zum Hervorbringen der maximalen Ablenkung nötige Spannung in Volt bei verschiedenen Kathodenstrahlgeschwindigkeiten (Spalte 1) an. Die Länge des feldfreien Weges soll 17 cm sein[1]).

Tabelle 4.

Voltstrahlen	$Volt_{max}$	$Volt_{min}$
220	79,2	1,59
440	158,5	3,17
1 000	360	7,2
5 000	1800	36,0
23 000	8300	165,9

Die Grenze der Meßbarkeit soll mit einer Verschiebung des Kathodenstrahlfleckes um 1 mm aus der Nullage angenommen werden. Die zu dieser Ablenkung erforderlichen Spannungen sind in Tabelle 4 Spalte 3 angegeben.

Die Eichung der Meßeinrichtung M der kleineren Braunschen Röhre kann natürlich mit Gleichspannung und durch Vergleich mit einem technischen Spannungsmesser vorgenommen werden. Die Maximalwerte der aufzunehmenden Spannung lassen sich leicht durch Vergrößerung des Abstandes der Ablenkungsplatten M erhöhen.

III. Zusammenfassung.

Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben und im einzelnen durchdiskutiert, die es ermöglicht unter Benutzung einer Glühkathode und einer Gleichspannung von 220 Volt ohne Elektrometer die Momentanwerte einer Spannungskurve von Wechselströmen von 100 m Wellenlänge bis etwa $1,5^0$ und 1,5 Volt genau zu bestimmen.

Infolge des Krieges war es nicht möglich, die Ergebnisse der Betrachtungen durch das Experiment zu belegen.

Kiel, im April 1917.

[1]) Vgl. W. Kaufmann und Aschkinass, Wied. Ann. **61**, 544, 1897.



Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 6. Heft. 1917.

Die Berechnung des Nutenquerfeldes in unbelasteten Dynamoankern.

Von

Ludwig Dreyfus.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit erhebt den Anspruch, eine praktisch brauchbare Theorie des Nutenquerfeldes zu entwickeln, soviel mir bekannt, die erste ihrer Art. Man darf aber nicht glauben, daß in der Praxis kein Bedürfnis nach einer solchen Theorie vorgelegen hätte. Das Gegenteil zu behaupten wäre wohl richtiger. Wo immer man mit der Ausnützung großer Maschinen an die Grenze des Möglichen gehen will — und wann wollte man das heutzutage nicht —, da bewegt man sich ohne Kenntnis des Nutenquerfeldes auf unsicherem Boden. Denn die Pulsationen dieses Feldes erzeugen in den Nutenleitern Verluste, die die normalen Kupferverluste unter Umständen erreichen oder gar übertreffen. Beispiele brauche ich nicht anzuführen. In der technischen Literatur ist mehr als einmal über Fehlschläge dieser Art berichtet worden, und jeder Prüffeldingenieur ist ihnen in seiner Praxis begegnet.

Im Laufe der Zeit wurde denn auch vieles über den Charakter des Nutenquerfeldes geschrieben[1]), einige experimentelle Untersuchungen über seine Größe und die hierdurch bedingten Verluste sind veröffentlicht worden[2]), und mehr noch liegt in den

[1]) Vgl. Arnold u. La Cour, „Wechselstromtechnik" **4**, S. 490 ff.; Pichelmayer, „Dynamobau" S. 415; Lamme, Proc. of the A. I. E. E. 1916, **35**, S. 345 ff.

[2]) Ottenstein, „Das Nutenfeld in Zahnarmaturen . . .". Sammlung elektrotechnischer Vorträge. F. Enke, Stuttgart 1903.

Archiven unserer Großfirmen als ein wertvoller Erfahrungsschatz verborgen. Aber das alles hat nicht zu einer Theorie des Nutenquerfeldes geführt. Im Gegenteil. Die Autoren versicherten sich so oft, daß eine solche Theorie auf unüberwindliche Hindernisse stoßen müsse, daß sie den Kreis ihrer wissenschaftlich arbeitenden Kollegen eher abschreckten als anlockten.

Ich führe das an, damit man von vornherein kein allzu einfaches Rechenexempel erwarten möge. Auf ein paar Seiten läßt sich nicht alles klar und verständlich auseinandersetzen. Aber nicht an der Schwierigkeit ihrer Ableitung darf man die praktische Bedeutung einer Theorie messen, sondern an der Schnelligkeit, mit der sie praktische Aufgaben löst. Und daß sie in dieser Hinsicht mehr hält, als selbst ein anspruchsvoller Beurteiler erwarten könnte, das glaube ich ruhig behaupten zu dürfen.

I. Der Charakter und die Differentialgleichungen des Nutenquerfeldes.

Ehe ich in theoretische Erörterungen eintrete, ein paar Worte über die Ursachen, welche einen Teil des Ankerkraftflusses quer über die Nuten leiten: Sie sind dieselben für alle Typen des Elektromaschinenbaues. Die Gleichstrommaschine unterliegt ihnen genau so wie die Synchronmaschine oder der Asynchronmotor mit und ohne Kollektor. Und sie sind weiter dieselben für alle Nutenformen. Denn selbst die geschlossene oder halbgeschlossene Nut ist hierin der offenen nur ganz unmerklich überlegen. Ich kann es daher auch dahingestellt sein lassen, welcher Type das Kraftlinienbild der Abb. 1 zugehört. Was wir aus ihm lernen können, hat allgemeine Bedeutung.

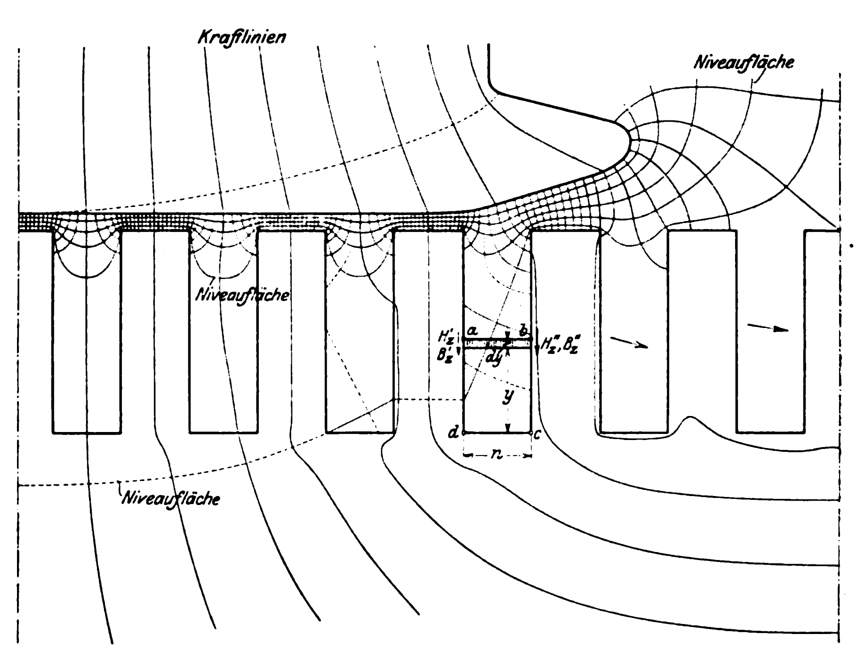


Abb. 1. Kraftlinienbild eines Nutenankers.

Auf den ersten Blick prägt sich ein, wie die Kraftlinien aus den Polen, die natürlich nicht ausgeprägt zu sein brauchten, in den Anker hinüberquellen, wo sie von den Zahnkronen gleichsam gierig aufgesogen werden. Ja dieses Aufsaugen geht so schnell vonstatten, daß in den von Leitern erfüllten Bezirk der Nut nur ganz geringfügige Ausläufer der magnetischen Strömung eindringen. Diese Ausläufer durchsetzen die Nut unter der Polmitte in durchschnittlich radialer Richtung. (Abb. 2.) Sie erscheinen dadurch dem Kraftfluß der Zähne direkt parallel geschaltet, und ihre Stärke bestimmt



sich nach den bekannten Gesetzen, welche die Parallelschaltung zweier magnetischer Wege regeln. Mit anderen Worten: Die Radialinduktion B_r in der Nut zunächst den Zahnflanken ist im Verhältnis der Zahnpermeabilität kleiner als die Zahninduktion B_z der benachbarten Eisenschicht:

$$B_r = \frac{B_z}{\mu_z} = H_z \quad \text{1)}$$

Je schwächer die Zähne gesättigt sind, um so schwächer ist auch das Längsfeld der Nut, und bei unendlich hoher Permeabilität wäre der ausgenützte Nutraum so gut wie feldfrei.

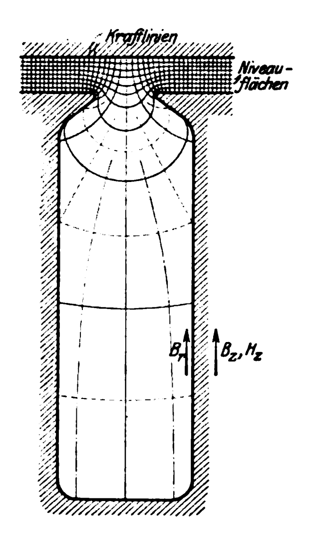


Abb. 2. Kraftlinienbild einer halbgeschlossenen Nut unter der Polmitte.

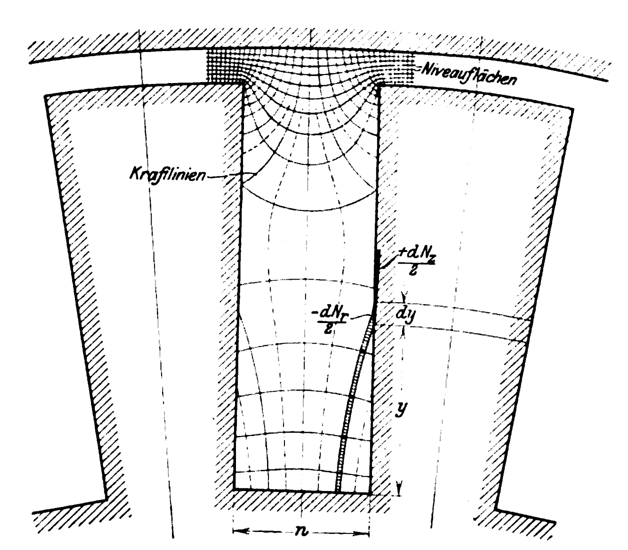


Abb. 3. Kraftlinienbild einer offenen Nut unter der Polmitte.

Wenn sich nun die Zahnfeldstärke H_z von Querschnitt zu Querschnitt ändert — etwa weil sich die Zähne selbst verjüngen (Abb. 3) —, so findet ein gewisser Austausch zwischen dem Zahnfluß

$$\frac{N_z}{cm} = B_z \cdot z_e \quad \text{2)[1]}$$

und dem auf eine Zahnteilung t entfallenden Längsfluß der beiden benachbarten Nuten

$$\frac{N_r}{cm} = 2 \cdot B_r \frac{n}{2} \quad \text{3)}$$

statt. Der gesamte Kraftfluß der Zahnteilung bleibt dabei unter der Polmitte unverändert, d. h. die Zunahme des Zahnflusses hält mit der Abnahme des Nutenlängsflusses gleichen Schritt:

$$\frac{d\left(\frac{N_z}{cm}\right)}{dy} = -\frac{d\left(\frac{N_r}{cm}\right)}{dy} \quad \text{4a)}$$

oder, wenn wir von Gleichung 2) und 3) Gebrauch machen:

$$\left(z_e \frac{dB_z}{dH_z} + n\right)\frac{dH_z}{dy} + \frac{dz_e}{dy} B_z = 0 \quad \text{4)}$$

[1]) Infolge der Isolation zwischen den Ankerblechen beträgt die effektive Zahnstärke „z_e" nur 90 bis 95% der wirklichen Zahnstärke „z".

Wenngleich aber dieser Austausch nicht ohne das Auftreten von Querfeldkomponenten innerhalb der Nut möglich ist, so ist doch der Mittelwert des Querfeldes unter der Polmitte gleich Null. D. h.: Überquere ich die Nut irgendwo senkrecht zu den Nutwänden, so verschwindet das Linienintegral

$$\int_0^n B_q dx = B_{q\,mittel} \cdot n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Das folgt ja schon aus Symmetriegründen.

Warum aber bleibt es nicht dabei, wenn wir nun von der Polmitte gegen die Polkanten weitergehen? Warum zeigen hier die Nutlinien in Abb. 1 mehr und mehr die Tendenz, nach rechts abzubiegen, während doch der Luftspalt konstant und auch der längs einer Zahnteilung eingetretene Kraftfluß unverändert geblieben ist? — Um das einzusehen, muß man die Verhältnisse dort untersuchen, wo das Luftfeld bereits gegen die neutrale Zone abfällt. Greifen wir z. B. eine Nut zwischen der Zone des konstanten und abnehmenden Luftfeldes heraus (Abb. 1): Hier führt der rechte Zahn (Index ″) einen wesentlich kleineren Kraftfluß als der linksgelegene (Index ′). Daher sind in Querschnitten gleicher Ordinate y auch die Zahninduktionen B_z und in noch höherem Grade die Feldstärken H_z verschieden. Trotzdem muß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke verschwinden, wenn man an irgendeiner Stelle a—b die Nut überbrückt und auf dem Umwege über die Zahnflanken (b—c—d—a) zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Und da dies nach dem vorigen für die Teilwege längs der Zahnflanken sicherlich nicht der Fall ist, so muß auch das Linienintegral längs der Nutbreite einen endlichen Wert liefern, und zwar einen Wert, der mit der Ordinate y stetig wächst. Das will sagen: Ein Teil des linken Zahnflusses entlädt sich quer über die Nut in den rechts benachbarten Zahn, und die Dichte dieses Querflusses wächst von der Wurzel zur Krone.

Damit hat es aber noch nicht sein Bewenden: Indem der betrachtete Querfluß den linken Zahn entlastet, verringert er zugleich die Feldstärke dieses Zahnes unterhalb der Krone. Dadurch wird nun auch die Nut zur linken Seite dieses Zahnes zur Querfeldbildung gezwungen; sie entlastet ihrerseits wieder den linksgelegenen Zahn, und so setzt sich das Spiel fort, bis wir zur Polmitte zurückgekehrt sind. Mit anderen Worten: Die Ausbildung des Nutenquerfeldes setzt schon in der Polmitte ein und setzt sich in stetig gesteigertem Anstieg bis zur Grenze des konstanten Luftfeldes fort. Jenseits dieser Grenze dauert sie zwar gleichfalls noch an. Aber wie hier alsbald die Unterschiede zwischen der Feldstärke benachbarter Zähne zurückgehen, so kann sich auch das Nutenquerfeld nicht mehr auf der erreichten Höhe halten: auf das Maximum des Querfeldes folgt sogleich ein steiler Abfall, und schon lange bevor die neutrale Zone erreicht ist, ist mit der Zahnfeldstärke auch das Nutenfeld verschwindend klein geworden.

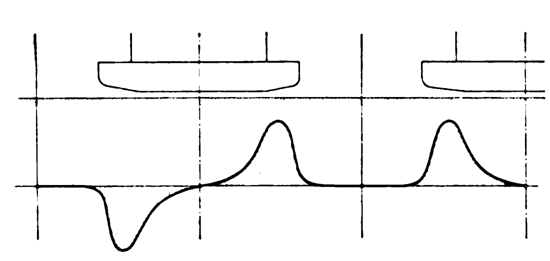


Abb. 4. Veränderlichkeit des mittleren Nutenquerfeldes in bestimmter Nulltiefe längs des Ankerumfanges.

So haben uns elementare Überlegungen auf das charakteristische Bild der Sattelkurve geführt, welche ich in Abb. 4 einer experimentellen Aufnahme nachgebildet habe. Es zeigt die Veränderlichkeit des mittleren Nutenquerfeldes für irgendeine konstante Ordinate y abhängig von der Stellung der Nut zu den Polen. Diese „Umfangskurve" aufzufinden, ist das erste Ziel unserer Theorie, die Veränderlichkeit der mittleren Querinduktion mit der Ordinate y zu ermitteln, das zweite. Dem Längsfluß innerhalb der

Nut will ich nicht weiter nachgehen. Denn alle mir erinnerlichen Leiterformen sind so schmal, daß in ihnen auch starke Längsfelder keine merklichen Verluste verursachen könnten.

Die Differentialgleichungen des Nutenquerfeldes drücken nur in mathematischer Form aus, was wir mit Worten bereits festgelegt haben. Die erste Gleichung betrifft die Veränderlichkeit des Zahnflusses zwischen Wurzel und Krone. Zu der Entlastung durch den Längsfluß der Nut, mit dem wir uns schon früher beschäftigt haben, tritt nun noch die als notwendig erkannte Berücksichtigung des Querflusses. Nehmen wir z. B. einen Zahn allgemeiner Lage, dessen Mittellinie den Abstand x von der Polmitte besitzt, und verfolgen die Verminderung des Zahnflusses zwischen zwei Querschnitten mit den Ordinaten y und y + dy (Abb. 5): Auf der rechten Seite tritt pro cm Zahnlänge ein Querfluß

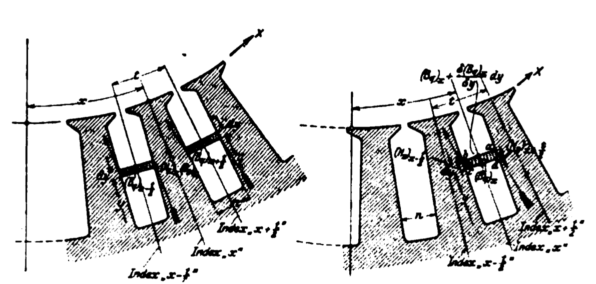


Abb. 5. Zur Ableitung der Grundgleichung 6.

Abb. 6. Zur Ableitung der Grundgleichung 7.

$$B_{q\left(x+\frac{t}{2}\right)} \cdot dy$$ [1]

in das Eisen ein, während auf der linken Seite ein — sagen wir — kleinerer Querfluß

$$Bq_{q\left(x-\frac{t}{2}\right)} \cdot dy$$

den Zahn verläßt. Da hiernach der Zahnfluß insgesamt zunimmt und obendrein die Zahnbreite abnimmt, so ist ein Anwachsen der Zahnfeldstärke um dH_z zu erwarten. Folglich verliert der Zahn gleichzeitig einen kleinen Fluß

$$dH_z \cdot n,$$

welcher dem Längsfeld der Nute zugute kommt (vgl. Gl. 3). Insgesamt haben wir somit eine Vergrößerung des Zahnflusses im Verhältnis

$$\frac{d\left(\frac{N_z}{cm}\right)}{dy} = B_{q\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{q\left(x-\frac{t}{2}\right)} - n\frac{dH_z}{dy}$$

zu buchen, und wenn wir hierin N_z durch B_z und H_z ausdrücken, so folgt:

$$\left[z_e\left(\frac{dB_z}{dH_z}\right)_x + n\right]\frac{dH_{zx}}{dy} + \frac{dz_e}{dy}B_{zx} = B_{q\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{q\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Das ist die erste Grundgleichung unseres Problems.

Die zweite Gleichung beschäftigt sich mit der Veränderlichkeit des Nutenquerfeldes zwischen Nutboden und Öffnung. (Abb. 6.) Sie wendet den Satz vom Linienintegral der magnetischen Feldstärke auf ein kleines Rechteck abcd an, das in beliebigen Abstand y vom Nutengrunde eingezeichnet ist. Da es keine Ampereleiter einschließt, muß längs seines Umfanges die magnetische Umlaufspannung verschwinden, und somit folgt

$$\text{MMK}\left[\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}\right] = 0,$$

[1]) B_q bezeichnet in Zukunft stets das mittlere Querfeld ($B_{q\,\text{mittel}}$ in Gl. 5).

d. h. $$\left(B_{qx} + \frac{dB_{qx}}{dy}\right)n - H_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)}\,dy - B_{qx}\,n + H_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}\,dy = 0$$

oder einfacher $$\frac{dB_{qx}}{dy} = \frac{1}{n}\left(H_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - H_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}\right) \quad \text{7)}$$

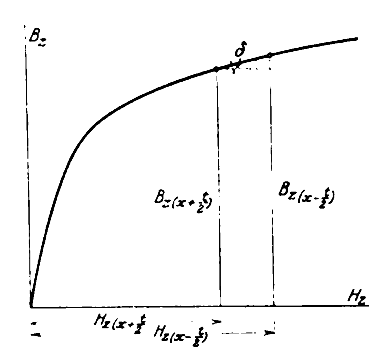


Abb. 7. Zur Ableitung der Hilfsgröße μ_x aus der Sättigungskurve.

Der Anstieg des mittleren Nutenquerfeldes ist also die Differenz der Feldstärke benachbarter Zähne direkt proportional; das ist die Schlüsselgleichung zur Berechnung der Querfeldverteilung.

Ehe wir sie indes auf spezielle Fälle anwenden, empfiehlt es sich, die beiden Grundgleichungen 6) und 7) zu einer einzigen Aussage über eine unserer Unbekannten zusammenzuschweißen. Zuerst differentiieren wir Gl. 7) und finden:

$$\frac{d^2B_{qx}}{dy^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{dH_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)}}{dy} - \frac{dH_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}}{dy}\right) \quad \text{8)}$$

Dann berechnen wir nach Gl. 6):

$$\left[z_e\left(\frac{dB_z}{dH_z}\right)_x + n\right]\cdot\left[\frac{dH_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)}}{dy} - \frac{dH_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}}{dy}\right] = \left\{\begin{aligned} &-\frac{dz_e}{dy}\left(B_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - B_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}\right) \\ &+ 2B_{qx} - \left(B_{q(x-t)} + B_{q(x+t)}\right)\end{aligned}\right\} \quad \text{9)}$$

Nun sind aber die Zahninduktionen benachbarter Zähne nicht sehr voneinander verschieden. Daher kann man gemäß Abb. 7 auch praktisch fehlerfrei annehmen:

$$B_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - B_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)} = \left[H_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - H_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}\right]\cdot\mu_x \quad \text{10a)}$$

wenn man die neu eingeführte Permeabilität durch die Gleichung

$$\mu_x = \left(\frac{dB_z}{dH_z}\right)_x = \operatorname{tg}\delta \quad \text{10)}$$

definiert. Setzt man diesen Wert in Gl. 9) ein und berücksichtigt Gl. 7) für den Differentialquotienten der Feldstärke, so wird zunächst

$$(z_e\mu_x + n)\left(\frac{dH_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)}}{dy} - \frac{dH_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}}{dy}\right) = -n\mu_x\frac{dz_e}{dy}\cdot\frac{dB_{qx}}{dy} + 2B_{qx} - \left(B_{q(x-t)} + B_{q(x+t)}\right)$$

und mit Zuhilfenahme von Gl. 8) endgültig:

$$(z_e\mu_x + n)\frac{d^2B_{qx}}{dy^2} + \mu_x\frac{dz_e}{dy}\cdot\frac{dB_{qx}}{dy} = \frac{1}{n}\left[2B_{qx} - \left(B_{q(x-t)} + B_{q(x+t)}\right)\right] \quad \text{11)}$$

Hätte man dasselbe Verfahren angewendet, um das Querfeld aus Gl. 6) und 7) zu eliminieren, so hätte sich für die Zahnfeldstärke die ähnliche Gleichung ergeben:

$$(z_e\mu_x + n)\frac{d^2H_{zx}}{dy^2} + 2\mu_x\frac{dz_e}{dy}\cdot\frac{dH_{zx}}{dy} = \frac{1}{n}\left[2H_{zx} - \left(H_{z(x-t)} + H_{z(x+t)}\right)\right] \quad \text{12)}$$

Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß μ_x nicht als Funktion von y, sondern als Konstante aufzufassen sei, ein Punkt, auf den wir noch zurückkommen werden.

Formel 11) und 12) sind die Endgleichungen unseres Problems. Die linke Seite entspricht einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit y als Unabhängig-Variabler, die rechte Seite einer Differenzengleichung mit x als Veränderlicher. Die gesuchte Lösung muß also eine gewisse Funktion beider Variablen darstellen, für welche beide Seiten der Gleichung übereinstimmen.

II. Die Lösung für gerade Zähne (z = konst.).

1. Grundlagen der Rechnung.

Es wird dem Verständnis des Aufsatzes förderlich sein, wenn ich die Lösung nicht sogleich für den allgemeinsten Fall, sondern erst unter einigen speziellen Annahmen durchführe, welche den rein mathematischen Teil der Ausarbeitung erleichtern. Darum will ich mir zunächst eine Maschine mit so großem Durchmesser oder so kleinen Nuttiefen vorstellen, daß die Vernachlässigung der Zahnverjüngung gestattet werden kann. Denn dadurch wird es möglich, die Lösung durch die jedem Ingenieur geläufigen Funktionen zu beschreiben, ohne doch weder von dem Charakteristikum des mathematischen Habitus noch des physikalischen Inhaltes das geringste einzubüßen.

Ich setze also für gerade Zähne

$$z = \text{konst.}, \quad \frac{dz}{dy} = 0\,[1]$$

und erhalte zunächst an Stelle der Grundgleichungen 6) und 7):

$$(z\mu_x + n)\frac{dH_{zx}}{dy} = B_{q\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{q\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

bzw.

$$\frac{dB_{qx}}{dy} = \frac{1}{n}\left(H_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - H_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Analog vereinfachen sich dann auch die Endgleichungen 11) und 12) zu:

$$n(z\mu_x + n)\frac{d^2B_{qx}}{dy^2} = 2\,B_{qx} - \left(B_{q(x-t)} + B_{q(x+t)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

bzw.

$$n(z\mu_x + n)\frac{d^2H_{zx}}{dy^2} = 2\,H_{zx} - \left(H_{z(x-t)} + H_{z(x+t)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Die nächste Vernachlässigung ist mehr oder minder selbstverständlich. Es ist wohl jedem des Rechnens Gewohnten klar, daß wir die Konzentration der Luftspaltlinien an der Zahnkrone und alles, was damit zusammenhängt, aus dem Spiel lassen müssen. Schneiden wir also gleich von der Zahnkrone ein entsprechendes Stück — sagen wir von der Länge der halben Nutbreite — ab, und rechnen die Nuttiefe „h" nur bis zu dieser Grenze. Bedenkt man, daß in dem oberen Nutraume doch höchstens der Keilverschluß oder Isolationshüllen, nicht aber massive Leiter untergebracht sind, so sieht man, daß damit nicht viel verloren ist.

Eine dritte Vernachlässigung betrifft die Gestalt des mittleren Luftspaltfeldes. Hier beschränke ich mich auf die Form, die bei Gleichstrom- und Synchronmaschinen die Regel bildet, die aber auch bei den meisten anderen Maschinen mit guter Annäherung angenommen werden kann, die trapezähnliche Welle. Maschinen mit konstantem Luftspalt, wie Deri-Gleichstrommaschinen oder synchrone Turbogeneratoren, besitzen die reine Trapezform nach Abb. 8a, während bei ausgeprägten Polen das Feld einem gebrochenen Trapez nach Abb. 8b gleicht. Beide Fälle gewähren den Vorteil, daß man die Differentialgleichungen für den Bereich des konstanten und abfallenden Luftfeldes gesondert auflösen kann und erst nachträglich die Konstanten so zu bestimmen hat, daß die Lösungen beider Zonen ineinander übergehen.

[1]) Der Einfachheit halber gebrauche ich im folgenden für die effektive Zahnbreite die Bezeichnung z (früher z_e), für die Induktion des Nutenquerfeldes die Bezeichnung B (früher B_q) und für die Zahnfeldstärke das Symbol H (früher H_z). Nur wo es zur Vermeidung von Mißverständnissen nötig ist, sollen noch die vollständigeren Bezeichnungen verwendet werden.

Zuvor gilt es aber noch die Grenzen dieser Feldzonen eindeutig festzulegen: In praktischen Fällen ist uns das mittlere Luftspaltfeld gegeben. Daraus greifen wir an irgendeiner Stelle die Kraftlinien einer Nutteilung

$$\frac{N_t}{cm} = B_{lx} \cdot t$$

heraus und ermitteln dazu die Zahninduktion B_{zk} und Feldstärke H_{zk} in den Zahnkronen. Doch legen wir dafür nicht nur bei offenen, sondern auch bei halbgeschlossenen Nuten die (mittlere) Breite des Zahnsteges (nicht der Zahnkrone) zugrunde, schreiben also in jedem Falle:

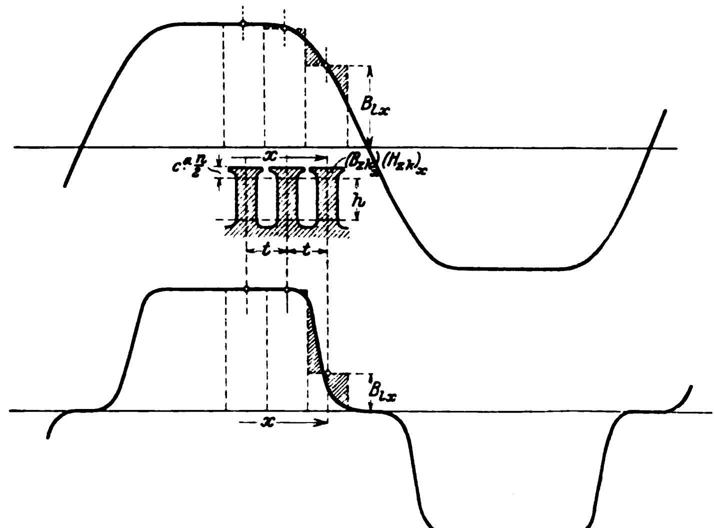


Abb. 8. Zur Verteilung des Luftspaltfeldes.

$$\frac{N_t}{cm} = B_{zk} z + H_{zk} \cdot n \quad . . . . \quad 17)$$

Die so gefundenen Werte von B_{zk} und H_{zk} tragen wir längs des Ankerumfanges über der jeweiligen Abszisse x der Zahnmittellinie auf. Dadurch entstehen zwei neue Feldkurven, von denen nur die Kurve der Zahninduktionen mit der ursprünglichen Luftfeldverteilung noch einigermaßen übereinstimmt. Hingegen fällt die Kurve der Feldstärken in den Zahnkronen unter den Polkanten weit schroffer ab, wie ja auch bei hohen Zahnsättigungen schon eine geringe Erniedrigung der Induktion einen großen Sprung in der Feldstärke zur Folge haben muß. (Abb. 9.)

Für die Ausbildung des Nutenquerfeldes ist die letzte Kurve die wichtigere, und so wollen wir sie noch etwas vereinfachen, indem wir sie durch ein Trapez von der kleinen Seite b_1 und der großen Seite b_2 ersetzen. Viel geben wir damit nicht auf. Wir eliminieren nur das ohnehin schwache Querfeld für

$$x > \frac{b_2 + t}{2}$$

ganz aus dem Kreis unserer Betrachtungen. Denn wir rechnen, als ob hier die Eisenpermeabilität nicht nur sehr groß, sondern sogar unendlich groß wäre, und in diesem Falle könnten ja überhaupt keine Kraftlinien die Nut überbrücken, wie ich das schon im vorigen Abschnitt auseinandergesetzt habe. So wird uns auch die Theorie an Stelle der experimentellen Sattelkurve (Abb. 4) einen etwas verstümmelten Linienzug, etwa nach Art von Abb. 9b liefern.

Eine natürliche Konsequenz dieser Vernachlässigung ist nun, daß wir auch den gekrümmten Abfall der B_{zk}-Kurve in dem Intervall $\frac{b_2 - b_1}{2}$ durch eine gerade Linie interpolieren. Und das ist gut so. Denn dann wissen wir auch gleich, welchen Wert wir in diesem Intervall der Hilfsgröße

$$\mu'' = \frac{dB_z}{dH_z}$$

zu geben haben. Offenbar ist hier:

$$\mu'' = \frac{\Delta B_{zk}}{H_{zk}} \quad \text{. . . . .} \quad 10b)$$

Dieses Verhältnis ist größer als der entsprechende Wert μ' unter dem Polbogen b_1, doch liegt es bei hochgesättigten Maschinen immer noch sehr niedrig. Vielleicht darf ich vorgreifend bemerken, daß wir bei unseren späteren Zahlenbeispielen auf Werte

$$\mu'' = 8 \text{ bis } 12$$

gegenüber

$$\mu' = 6{,}5 \text{ bis } 8$$

geführt werden.

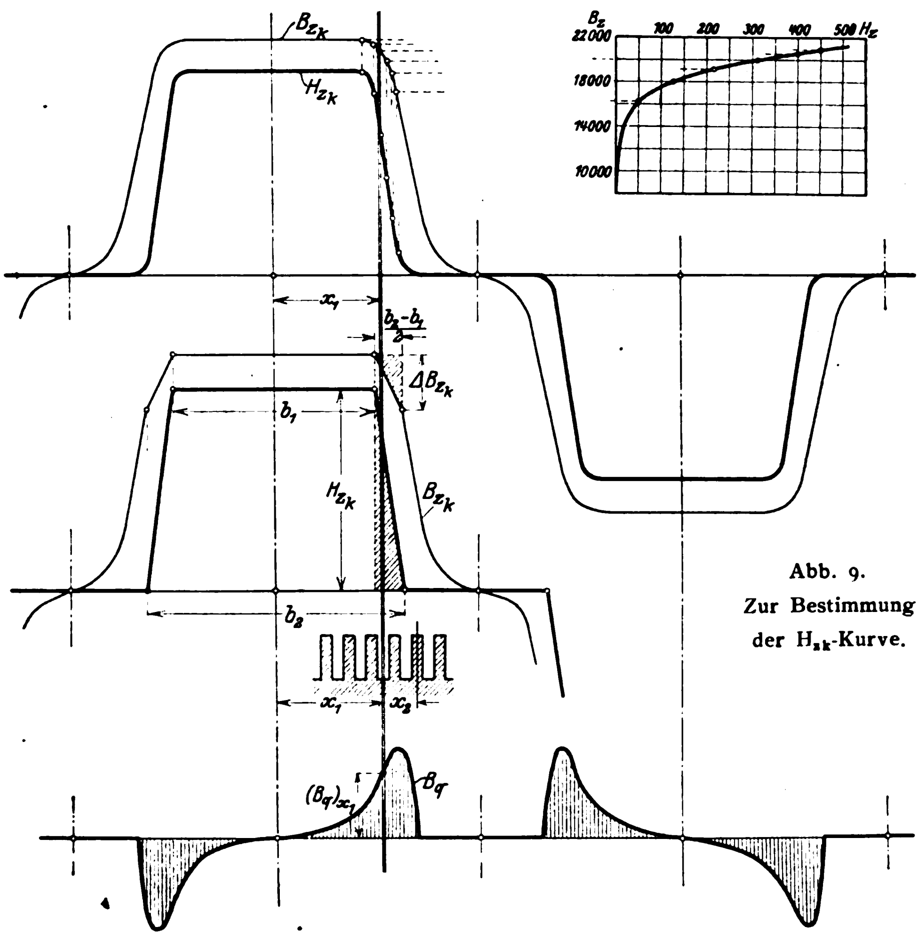


Abb. 9. Zur Bestimmung der H_{zk}-Kurve.

Abb. 9b. Reduziertes Schema der Nutenquerfeldkurve.

2. Das mittlere Nutenquerfeld unter der 1. Zone (Index ').

Die erste Zone des Nutenquerfeldes reicht von der Polmitte bis zur Nut mit der Abszisse x_1. (Abb. 9.) Von den sie flankierenden Zähnen liegt die Mittellinie des linken Zahnes noch unter dem Polbogen b_1, während der rechte schon in das Gebiet der abfallenden H_{zk}-Kurve übergetreten ist. Da unter dem Polbogen b_1 alle Zahnkronen gleich gesättigt sind, das Querfeld aber immer nur einen prozentual kleinen Anteil des Zahnflusses ableiten kann, so sind in diesem Gebiete keine großen Schwankungen der Zahninduktion zu erwarten. Wir sind daher berechtigt, zwischen

$$x = 0$$

und
$$x = \pm \frac{b_1}{2}$$
für die Hilfsgröße
$$\mu_x = \left(\frac{dB_z}{dH_z}\right)_x$$
einen gewissen Mittelwert μ' zu bilden und diesen für alle Zahnquerschnitte unabhängig von x und y als Konstante zu betrachten. Dabei wird man μ' zunächst ungefähr nach Maßgabe der maximalen Sättigung in den Zahnkronen (B_{zk}, H_{zk}) einsetzen. Hat man dann später auch die minimale Zahninduktion an der Zahnwurzel in Erfahrung gebracht, so ist es immer noch Zeit, wenn nötig eine kleine Korrektur anzubringen.

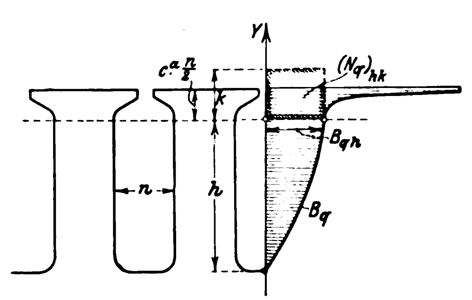


Abb. 10. Berücksichtigung des Querflusses im oberen Nutraum durch die ideelle Nutverlängerung k.

Nun würde man zwar bei offenen Nuten genau genug rechnen, wenn man die Werte B_{zk} und H_{zk} der Zahnkronen auch noch im Abstand $y = h$ vom Nutboden voraussetzte. Soll unsere Theorie aber auch der geschlossenen und halbgeschlossenen Nut gerecht werden, so müssen wir unsere Grenzbedingungen etwas allgemeiner fassen. Hier kann sich nämlich schon ein merklicher Fluß über den schmalen Schlitz in den benachbarten Zahn entladen haben, ehe wir jenen Querschnitt $y = h$ erreichen. Dieser Querfluß darf dem Nutenquerfeld in der Höhe $y = h$ proportional gesetzt werden, beträgt also pro cm Zahnlänge:
$$\left(\frac{N_q}{cm}\right)_{hk} = (B_q)_h \cdot k \quad \text{(s. Abb. 10)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$
Da ferner jeder Zahn auf der einen Seite einen solchen Querfluß empfängt, auf der anderen Seite ihn verliert, so vermindert sich der Fluß einer Zahnstellung mit der mittleren Abszisse x insgesamt um:
$$\left(\frac{N_{tk}}{cm}\right)_x - \left(\frac{N_{th}}{cm}\right)_x = \left[(B_{qh})_{x+\frac{t}{2}} - (B_{qh})_{x-\frac{t}{2}}\right] \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$
Andererseits folgt schon aus den Gleichungen 10a) und 17):
$$\left(\frac{N_{tk}}{cm}\right)_x - \left(\frac{N_{th}}{cm}\right)_x = (H_{zk} - H_{zh})(z\mu' + n).$$
Somit müssen wir fordern, daß für $y = h$ unsere Theorie
$$H_{zh} = H_{zk} - \left[(B_{qh})_{x+\frac{t}{2}} - (B_{qh})_{x-\frac{t}{2}}\right] \cdot \frac{k}{z\mu' + n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$
liefere. Das ist die erste Grenzbedingung unseres Problems.

Eine weitere und einfachere Bedingung erhalten wir, wenn wir das Querfeld im Nutengrunde untersuchen. Es ist gleich der benachbarten Feldstärke im Zahneisen, und da hier keine erheblichen Sättigungen auftreten können, so dürfen wir beide Größen getrost vernachlässigen. Setzen wir aber
$$\text{für } y = 0{:}\ B_q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$
so muß nach Gl. 13) für z = konst. auch die weitere Bedingung
$$\frac{dH_z}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21a)$$

und nach Gl. 15)

$$\frac{d^2 B_q}{d y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21b)$$

erfüllt sein, und zwar für jede beliebige Lage der Nut unter den Polen.

Unter diesen Voraussetzungen genügt der Differentialgleichung des Nutenquerfeldes jede Funktion von der Form:

$$B_x' = (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x_1} \cdot \sin p \frac{\pi}{2h} y\text{ [1] [2]}.$$

Denn führt man diesen Ansatz in die rechte und linke Seite der Gl. 15) ein, so ergibt sich:

$$-n(z\mu' + n)\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 \cdot (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x_1} \sin p \frac{\pi}{2h} y$$

$$= (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\sin p \frac{\pi}{2h} y}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x_1} \{2\, \mathfrak{Sin}\, \alpha_p x - [\mathfrak{Sin}\, \alpha_p (x - t) + \mathfrak{Sin}\, \alpha_p (x + t)]\}$$

$$= 2(1 - \mathfrak{Cos}\, \alpha_p t) \cdot (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha x_1} \sin p \frac{\pi}{2h} y.$$

Man sieht also: die Funktionen der Veränderlichen x und y heben sich auf beiden Seiten fort, und es bleibt nur eine Bedingungsgleichung zwischen den konstanten Koeffizienten übrig, nämlich:

$$\mathfrak{Cos}\, \alpha_p t = 1 + \frac{1}{2}\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 n(z\mu' + n)$$

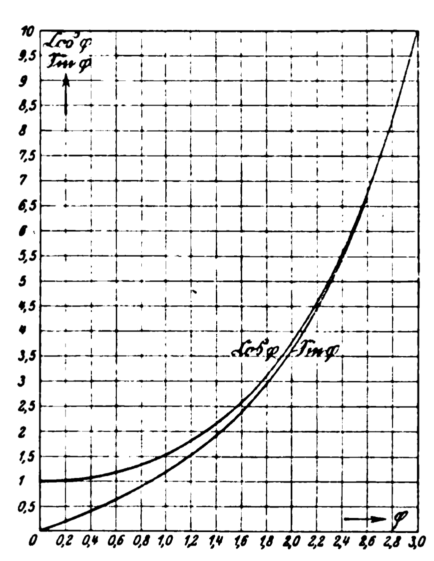


Abb. 11. Darstellung der Funktionen $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cos}\,\varphi$.

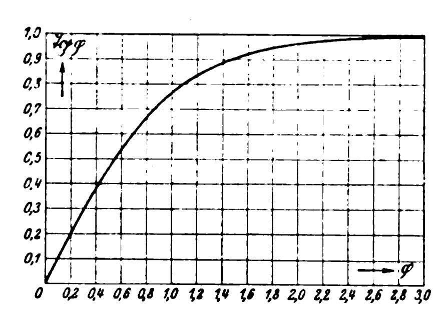


Abb. 12. Darstellung der Funktion $\mathfrak{Tg}\,\varphi$.

---

[1]) Wer mit Hyperbelfunktionen nicht vertraut ist, sei auf die ausgezeichnete Zusammenstellung der einschlägigen Formeln in **Jahnkes** und **Emdes** Funktionentafeln (Teubner 1909) verwiesen. In der Hütte findet man neben kurzen Erläuterungen sehr wertvolle Tabellen für

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

$$\mathfrak{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

sowie

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\mathfrak{Cos}\,\varphi}.$$

Nach ihnen sind die Abb. 11 und 12 entworfen, die mich weiterer Erläuterungen entheben.

[2]) Mit $\hat{B}$ oder $\hat{H}$ bezeichne ich stets die Amplitude einer Induktions- oder Feldwelle.

oder in etwas anderer Form:

$$\mathfrak{Sin}\,\alpha_p \frac{t}{2} = p\,\frac{\pi}{4h} \cdot \sqrt{n\,(z\,\mu' + n)} \qquad \text{22)}$$

Diese Bedingung können wir aber durch passende Wahl des Parameters α_p für jeden beliebigen Wert von p befriedigen. Das zeigt uns, daß das allgemeine Integral der Differentialgleichung aus einer unendlichen Reihe ähnlich gebauter Funktionen bestehen muß, und demgemäß setzen wir:

$$B'_x = \sum (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1} \sin p \frac{\pi}{2h} y. \qquad \text{23)}$$

Welche Zahlenreihe dabei dem Parameter p zugeordnet ist, lehrt uns die Grenzbedingung 20. Denn wie ich hier nicht weiter dartun will, ist ihre Erfüllung an die Nebenbedingung

$$p\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\,p\,\frac{\pi}{2} = \frac{h}{k} \qquad \text{24)}$$

gebunden. Daraus folgt für offene Nuten ($k \sim 0$) genau genug:

$$\mathrm{tg}\,p\,\frac{\pi}{2} = \infty \qquad \text{24a)}$$

und man sieht, daß p in diesem Falle die Reihe der ungeraden ganzen Zahlen durchlaufen muß ($p = 1, 3, 5 \ldots \infty$).

Im allgemeineren Falle $k > 0$ ergibt sich die Zahlenreihe des Parameters als die Abszisse der Schnittpunkte der Tangentenkurve

$$y = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\,x$$

mit der gleichseitigen Hyperbel

$$x\,y = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h}{k}.$$

Diese Parameterreihe ergibt stets kleinere Werte wie die vorige, die sich mit wachsender Ordnungszahl der Reihe der geraden ganzen Zahlen annähern. (Abb. 13.)

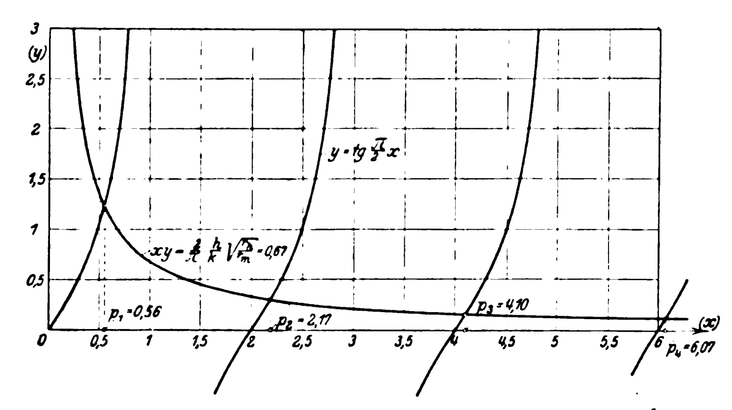


Abb. 13. Bestimmung der Parameterreihe p für $k = \frac{h}{\pi}$.

Konnten wir so der ersten Grenzbedingung durch Festsetzung des Parameters p genügen, so erfüllt der Ansatz ohne weitere Einschränkungen die übrigen Grenzbedingungen

$$B'_x = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \qquad \text{25[1])}$$

und

$$B'_x = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \qquad \text{26)}$$

Damit ist bewiesen, daß die Reihe wirklich

[1]) Die Forderung, daß das Nutenquerfeld unter der Polmitte verschwinde, ist strenggenommen nur für eine symmetrische Lage des Nutenkranzes gegen den Pol aufzustellen, also wenn entweder ein Zahn oder eine Nut gerade unter der Polmitte liegt. Doch ist das Nutenfeld unter allen Umständen in der Gegend der Polmitte so klein, daß man die obige Grenzbedingung unbedenklich auf alle Ankerstellungen ausdehnen darf.

das allgemeine Integral der Differentialgleichung darstellt. — Freilich nicht in dem Sinne, als ob sie nun auch an jeder Stelle des Ankerumfanges die Stärke des Nutenquerfeldes angäbe. Das wäre nur der Fall, wenn die noch zu bestimmenden Amplituden $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ der einzelnen Harmonischen für jede Stellung des Nutenkranzes unter dem Polbogen denselben Wert besäßen. Später wird es sich jedoch zeigen, daß diese Bedingung nur für feine Nutteilungen als erfüllt angesehen werden darf. Darum läßt sich vorderhand nur behaupten, daß in einer bestimmten Ankerstellung und in einer bestimmten Nuttiefe y die Querfeldstärken der einzelnen Nuten in der berechneten Kurve enthalten seien. (Abb. 11, Kurve a). Für eine andere Ankerstellung mag auch die Kurve ein klein wenig anders liegen (Kurve b), so daß in Wirklichkeit die Kurve zwischen zwei Leitkurven nach Art von Kurve c hin und her pendelt. Man hat es jedoch im Gefühl, daß die Nutteilung schon recht grob sein muß, damit die schraffierte Oberwelle praktisch ins Gewicht fällt. Außerdem kann man sie auch kaum genau genug berechnen, und speziell beim Ersatz der wirklichen H_k-Welle durch eine gebrochene Trapezwelle wird diese Zahnharmonische sicher überschätzt. Aus alledem folgt, daß man für gewöhnlich besser mit einer mittleren Kurve d rechnen wird, und diese befolgt dann wirklich das eben angeschriebene Gesetz.

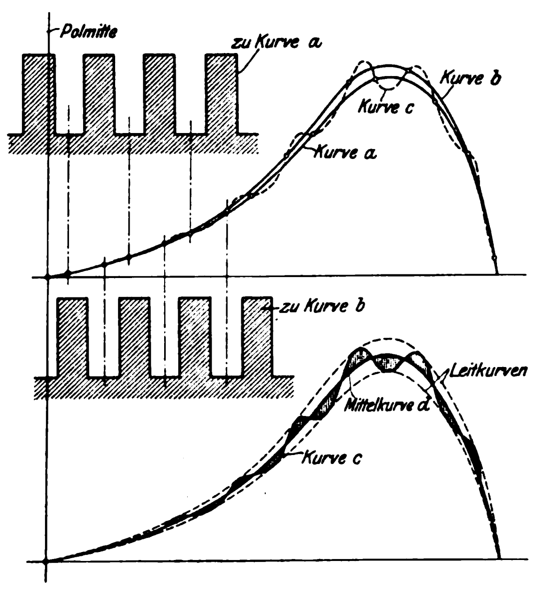


Abb. 14. Zahnharmonische in der Nutenquerfeldkurve.

Eigentümlich ist es, daß wir die Querfeldverteilung zwischen Nutboden und Nutöffnung durch eine Fouriersche Reihe von Sinuswellen beschreiben mußten. Wenn wir auch ihre Amplituden $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ an der Grenze zwischen konstantem und abfallendem Luftfeld noch nicht kennen, so sehen wir doch, daß jede Teilwelle von jener Grenze aus nach einem hyperbolischen Sinus (Abb. 11) gegen die Polmitte abfällt. Je höher die Ordnungszahl der Teilwelle, um so größer ist der Parameter α_p, um so steiler daher auch der Abfall. Mag also das Nutenfeld über $x = x_1$ auch eine unregelmäßige Form besitzen, gegen die Polmitte zu wird es sich rasch einer Sinusform annähern.

Weiter sehen wir, daß in dieser Hinsicht Maschinen mit gleichen Werten von

$$2\,\alpha\,x_1 = 2\,x_1 \cdot \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\left[\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{n}{h}\left(\frac{z}{h}\mu' + \frac{n}{h}\right)}\right]$$

ein analoges Verhalten zeigen müssen, gleichgültig wie dieser Wert im einzelnen aus x_1 und α_1 zusammengesetzt sei. Darum könnte man diese Größe auch als die „reduzierte Breite" des Trapezfeldes bezeichnen, wiewohl sie strenggenommen nur eine dimensionslose Verhältniszahl darstellt. Sehen wir von den Verhältnissen

$$\frac{z}{h} \quad \text{und} \quad \frac{n}{h}$$

ab, die bei normalen Maschinen keinen großen Schwankungen unterworfen sind, so bleibt als stark veränderliche Größe neben dem Polbogen $2\,x_1$ nur die Permeabilität

$$\mu' = \text{Mittel}\left(\frac{d\,B_z}{d\,H_z}\right).$$

Je größer also dieser Wert, d. h. je schwächer die Sättigung der Zähne, eine um so engere Zone ist der Ausbildung des Querfeldes zugewiesen. Das zeigen auch experimentelle Aufnahmen, welche für die Veränderlichkeit des Nutenquerfeldes längs des Ankerumfanges in gleichem Abstand vom Nutboden Kurven wie Abb. 15 liefern.

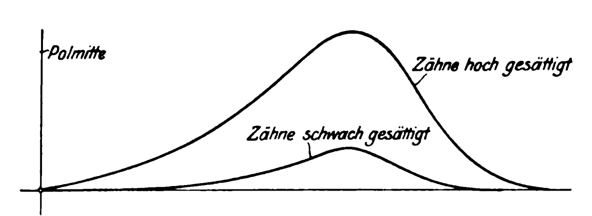


Abb. 15. Nutenquerfeldkurve bei verschiedener Zahnsättigung.

Soviel über die Eigenart des Nutenquerfeldes. Die Zahnfeldstärke ist mit dem Nutenquerfeld durch die Gleichung

$$(z\mu' + n)\frac{dH_x}{dy} = B_{\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

verknüpft. Wir berechnen daraus:

$$\frac{dH_x'}{dy} = \frac{1}{z\mu' + n} \cdot \sum 2(\widehat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\, \alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x_1} \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2} \sin p \frac{\pi}{2h} y$$

und finden durch Integration unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen:

$$H_x' = H_k' - \sum (\widehat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2}}{p \frac{\pi}{4h}(z\mu' + n)} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, \alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p x_1} \cos p \frac{\pi}{2h} y .$$

$\mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2}$ ist uns aber schon aus Gl. 22) bekannt. Wir eliminieren es also und erhalten:

$$H_x' = H_k' - \sqrt{\frac{n}{z\mu' + n}} \sum (\widehat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\, \alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_p z_1} \cos p \frac{\pi}{2h} y \quad \ldots \ldots \quad 27)$$

Darnach können wir nun auch die Zahnfeldstärke in jeder Tiefe des Zahnes und an jeder Stelle des Ankerumfanges berechnen, sobald uns die Amplituden $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ des Querfeldes bekannt sind. Daß der Ansatz die Grenzbedingungen erfüllt, ist leicht nachzuweisen. Im übrigen ist er der schon diskutierten Formulierung des Nutenfeldes so nahe verwandt, daß ich auf die mathematische Seite nicht weiter hinzuweisen brauche.

Der physikalische Inhalt ist ebenfalls klar: An der Zahnkrone mit dem Werte H_{zk} beginnend, nimmt die Zahnfeldstärke nach der Nutentiefe ab, wo sie ein Minimum erreicht.

$$\left(\frac{dH_z}{dy} = 0 \qquad \text{für} \qquad y = 0\right).$$

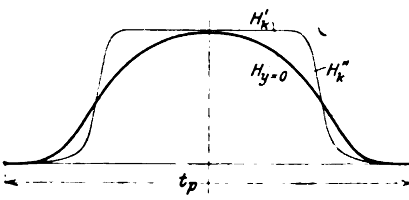


Abb. 16. Zahnfeldstärke in Wurzel und Krone.

Dieses Minimum wieder sinkt mit der Entfernung der Nut von der Polmitte, wie es Abb. 16 in schematischer Weise andeutet, und an der Grenze gegen das abfallende Luftfeld, d. i. für

$$x = x_1 - \frac{t}{2}$$

erreicht es seinen tiefsten Wert $(y = 0)$:

$$\left.\begin{aligned} H'_{\left(x_1 - \frac{t}{2}\right)} &= H_k' - \sqrt{\frac{n}{z\mu' + n}} \sum (\widehat{B}_p)_{x_1} \left(\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_p \frac{t}{2} - \mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2}\right) \\ &= H_k' - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{h} \sum (\widehat{B}_p)_{x_1} \cdot p\left(\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} - 1\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; 28)$$

Gewöhnlich ist:

$$\alpha x_1 > 2{,}0.$$

Dann kann man noch einfacher setzen:

$$H'_{\left(x_1 - \frac{t}{2}\right)} = H_k' - \sqrt{\frac{n}{2\mu' + n}} \sum (\hat{B}_p)_{x_1} e^{-\alpha_p \frac{t}{2}} \quad \ldots \ldots \quad 28a)$$

Daraus wäre also die untere Grenze der Zahninduktion zu berechnen, nach welcher man — wenn darauf Wert gelegt wird — den Mittelwert μ' kontrollieren und verbessern kann.

Die mitgeteilte Formel 27), in der die Zahnfeldstärke als die Differenz aus einer Konstanten H_k und einer Fourierschen Reihe erscheint, ist für die Rechnung nicht immer bequem. Oft werden wir uns gezwungen sehen, auch diese Konstante in die Reihe einzubeziehen, und so will ich gleich hier die erweiterte Formel noch mitteilen. Kombiniert man das Parametergesetz 24 mit den bekannten Rechenregeln für Fouriersche Reihen, so ergeben sich

zwischen $y = 0$ und $y = h$

die Entwicklungen:

$$1 = \sum \left(\frac{4}{p\pi} \cdot \frac{\sin p \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}} \cos p \frac{\pi}{2h} y \right) \quad \ldots \ldots \quad 29)$$

bzw.

$$\frac{y}{h} = \sum \left(\frac{8}{p^2 \pi^2} \frac{\sin p \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}} \sin p \frac{\pi}{2h} y \right) \quad \ldots \ldots \quad 30)$$

Statt dessen schreibe ich mit Rücksicht auf spätere Anwendungen kürzer:

$$1 = \sum \left(f_p \cdot \frac{p\pi}{2} \cdot \cos p \frac{\pi}{2h} y \right) \quad \ldots \ldots \quad 29a)$$

bzw.

$$\frac{y}{h} = \sum \left(f_p \cdot \sin p \frac{\pi}{2h} y \right) \quad \ldots \ldots \quad 30a)$$

und definiere den Faktor f_p der Reihenzerlegung durch die Gleichung:

$$f_p = \frac{8}{p^2 \pi_2} \cdot \frac{\sin p \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}} \quad \ldots \ldots \quad 31)$$

f_p durchläuft also bei offenen Nuten und $k \sim 0$ die schnell konvergierende Reihe:

$$f_p = \pm \frac{8}{p^2 \pi^2} \quad \ldots \ldots \quad 31a)$$

Für halb geschlossene Nuten mit $k > 0$ können seine Anfangswerte dem Diagramm 17 entnommen werden. Hier ist die Konvergenz sogar noch besser und namentlich wenn sich p der Reihe der geraden ganzen Zahlen schnell nähert, kommt außer der Grundwelle überhaupt kaum ein weiteres Glied in Betracht.

Die Gleichung der Zahnfeldstärke erhält durch die Reihenentwicklung 29) die neue Fassung:

$$H_x' = \sum \left[H_k' \cdot f_p \frac{p\pi}{2} - (\hat{B}_p)_{k_1} \sqrt{\frac{n}{2\mu' + n}} \frac{\mathfrak{Cof}\, \alpha x}{\mathfrak{Sin}\, \alpha x_1} \right] \cos p \frac{\pi}{2h} y \quad \ldots \quad 27a)$$



und in dieser werden wir sie im folgenden vorzugsweise verwenden. Die zweite Zerlegung 30) spielt zwar für die behandelte Zone noch keine Rolle, wird uns aber später gleichfalls gute Dienste leisten.

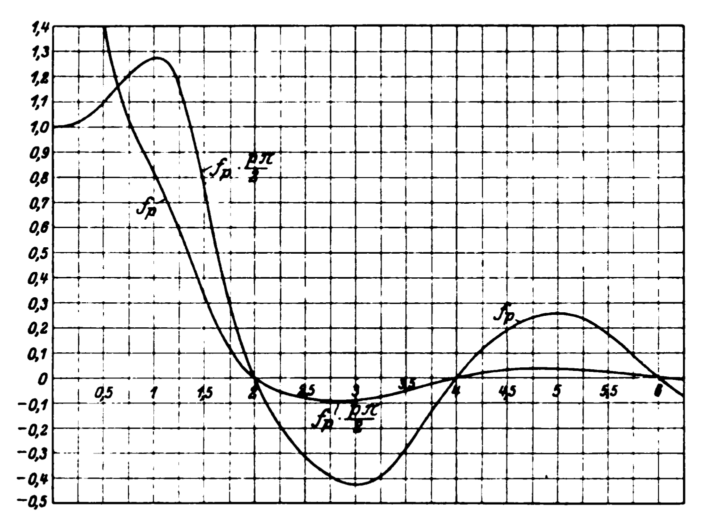


Abb. 17. Darstellung der Funktionen $f_p = \frac{8}{p^2\pi^2} \cdot \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}}$ und $f_p \cdot \frac{p\pi}{2} = \frac{4}{p\pi} \cdot \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}}$.

3. Das mittlere Nutenquerfeld unter der zweiten Zone (Index ″).

Sobald die Mittellinie eines Zahnes aus dem Polbogen b_1 heraustritt, gehorcht die rechtsgelegene Nut nicht länger den Gesetzen, die wir für die erste Zone aufgestellt haben, Die linke Nut mit der Abszisse x_1 liegt also auf der Grenze beider Zonen und ist den Gesetzen beider Zonen unterworfen. Daraus entspringt die eine Grenzbedingung, welche beide Gebiete verknüpft.

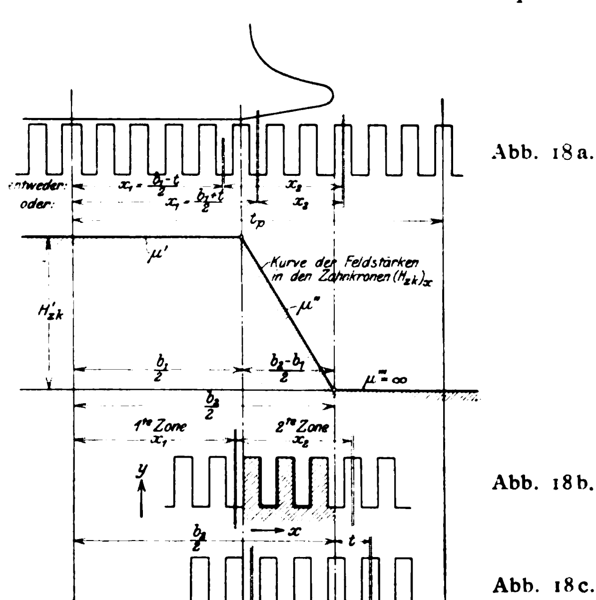


Abb. 18a.

Abb. 18b.

Abb. 18c.

Abb. 18b bis c. Zur Definition der „1ten und 2ten Zone".

Dazu kommt noch eine beachtenswerte Eigentümlichkeit. Nach unserer Definition kann x_1 zwischen $\frac{b_1 + t}{2}$ und $\frac{b_1 - t}{2}$ variieren (Abb. 18a und b). Fällt aber die Mittellinie des Zahnes gerade unter das Ende des Polbogens b_1, $\left(x_1 = \frac{b_1 + t}{2}\right)$, so können wir diesen Zahn ebensogut der ersten Zone mit der Permeabilität μ' wie der zweiten Zone mit der Permeabilität μ'' zuerkennen. Wir werden daher für die Nut mit der Abszisse x_1 und demgemäß auch für alle anderen Nuten zwei gleichberechtigte Serien von Lösungen finden, oder mit anderen Worten: die Kurve der Nutenfeld-

stärke muß in den Punkten

$$x = \frac{b_1}{2} + n' \frac{t}{2} \quad (n' = \text{ungerade ganze Zahl})$$

eine sprunghafte Änderung, eine Unstetigkeitsstelle besitzen. In der Regel ist dieser Sprung allerdings nicht beträchtlich, wie auch die Differenz zwischen μ' und μ'' selbst nach unseren Annahmen meist nicht sehr groß ist und in Wirklichkeit durch die Abrundung der H_{zk}-Kurve vollends verwischt wird.

Meist stärker ausgeprägt ist jedoch eine zweite Unstetigkeit, deren Ursprung am Ende der zweiten Zone zu suchen ist: Wenn nämlich ein Zahn mit seiner Mittellinie gerade am Ende des Polbogens b_2 angelangt ist (Abb. 18c), so können wir ihm nach unseren Annahmen ebensogut eine noch immer niedrige Permeabilität μ'' zuschreiben, als auch die hohe Permeabilität der dritten Zone, die wir der Einfachheit halber unendlich groß vorausgesetzt haben. Das macht dann natürlich einen beträchtlichen Unterschied. Im ersten Falle würden wir für die rechts gelegene Nut immer noch eine, wenn auch nicht große Querfeldstärke berechnen. Im zweiten Falle dagegen, wo wir uns die Nut durch zwei Zähne von außerordentlich großer Permeabilität flankiert denken, müßten wir die Möglichkeit eines Nutenquerfeldes überhaupt verneinen. Da wiederum beide Aussagen das gleiche Recht beanspruchen, so muß für die Nut mit der Abszisse

$$\frac{b_2 + t}{2}$$

die Feldstärke von einem endlichen Wert unvermittelt auf 0 sinken, und ein ähnlicher Sprung muß sich allen Nuten mit der Abszisse

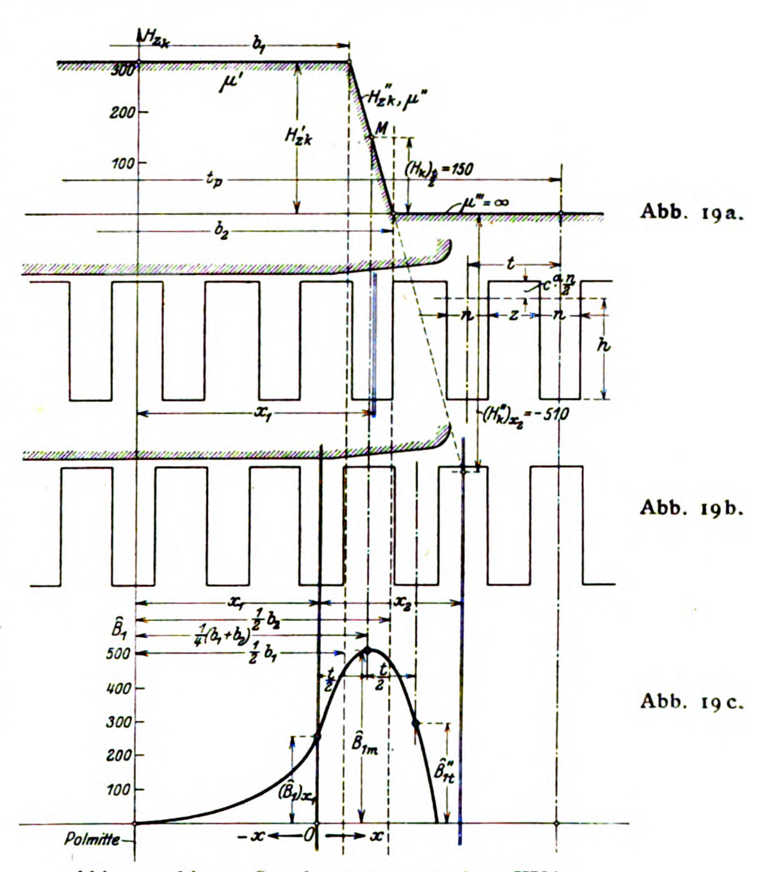


Abb. 19a bis c. Synchrongenerator 6000 KVA.
a) Kein Zahn unter der abfallenden H''_{zk}-Kurve.
b) Ein Zahn unter der Mitte M der abfallenden H''_{zk}-Kurve: $x_2 = 3\frac{t}{2}$.
c) Interpolationskurve für die erste Harmonische des Nutenquerfeldes.

$$\frac{b_2}{2} - n'' \frac{t}{2} \quad (n'' = \text{ungerade ganze Zahl})$$

mitteilen. Freilich wird auch diesmal die sprunghafte Änderung durch die in Wirklichkeit vorhandene Abrundung der Zahnfeldkurve gemildert werden. Doch dürfte sie sich bei groben Nutzteilungen experimentell noch immer nachweisen lassen.

Bei beliebiger Lage des Ankers gegen die Pole gehört diejenige Nut als letzte zur zweiten Zone, deren rechts benachbarter Zahn mit der Abszisse $x_1 + x_2$ als erster außerhalb des Pol-

bogens b_2 liegt. Somit schwankt $x_1 + x_2$ zwischen $\frac{1}{2}b_2$ und $\frac{1}{2}b_1 + t$ und x_2 beträgt stets ein ungerades Vielfaches der halben Nutteilung

$$x_2 = m\frac{t}{2} \quad (m = \text{ungerade ganze Zahl}).$$

Die analytische Behandlung wird dadurch wesentlich erschwert, daß je nach der Feinheit der Nutteilung und der Schroffheit des Abfalles der H_{zk}-Kurve beliebig viele — oder besser beliebig wenige — Nuten und Zähne unter der zweiten Zone liegen. Betrachten wir z. B. Abb. 19a, die einem später behandelten Zahlenbeispiel angehört, so können wir von einer zweiten Zone überhaupt kaum mehr sprechen. Denn unter der abfallenden H_{zk}-Kurve liegt nicht ein einziger Zahn und von den Nuten nur jene letzte mit der Abszisse x_1, welche die erste Zone abschließt.

Eine kleine Verdrehung des Ankers verwandelt dieses Bild in Abb. 19b mit

$$x_1 = 3\frac{t}{2}.$$

Jetzt fallen ein Zahn und zwei Nuten unter die zweite Zone. Nehmen wir dabei an, daß die Querinduktion dieser beiden Nuten in bestimmter Tiefe y auf einer noch zu bestimmenden Kurve enthalten sei, so können wir jetzt wenigstens auf den einen Zahn die Feldgleichung anwenden:

$$(z\mu'' = n)\frac{dH_x}{dy} = B_{\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Dagegen läßt sich die weitere Gl. 14) nicht ausnützen, solange nicht auch eine Nut von zwei unter der zweiten Zone liegenden Zähnen begrenzt wird, die einem einheitlichen Gesetz gehorchen.

Dazu aber kommt es erst, wenn wir nunmehr einen Schritt weiter gehen und auch Anker mit

$$x_2 \geqq 5\frac{t}{2}$$

ins Auge fassen. Unsere Abb. 18b ist für $x_2 = 7\frac{t}{2}$ gezeichnet. Man mag sich darunter etwa einen großen Walzwerkmotor mit besonders feiner Nutteilung vorstellen, bei dem alle durch Schraffur hervorgehobenen Zähne der zweiten Zone angehören. Wie daher alle diese Zähne ein und derselben Gleichung

$$(z\mu'' + n)\frac{dH_x}{dy} = B_{\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

gehorchen, so muß auch für die dazwischen liegenden Nuten mit den stark ausgezogenen Konturen die Ergänzungsgleichung

$$n \cdot \frac{dB_x}{dy} = H_{\left(x-\frac{t}{2}\right)} - H_{\left(x+\frac{t}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

zu Recht bestehen. Nur in diesem Falle sind also die Leitkurven der Zahn- und Nutfeldstärken ebenso vollständig definiert wie in der ersten Zone unter dem Polbogen b_1.

Trotzdem — oder wenn man so will, eben deshalb —, ist der zweite Fall $x_2 = 3\frac{t}{2}$ eigentlich der allgemeinere, und so will ich auch unser Rechenverfahren so aufbauen, daß es den weniger bestimmten zweiten Fall einschließt. Das erreiche ich, indem ich zwar für x_2 eine beliebig hohe ungerade Zahl halber Nutteilungen zulasse, aber desungeachtet von der Nutgleichung 14) keinen Gebrauch mache. Das involviert fürs erste eine gewisse Unbestimmtheit und Unhandlichkeit der Formeln, die aber sofort verschwindet, sobald man sie mit den jenen drei Fällen eigentümlichen Nebenbedingungen kombiniert.



Den Bedingungen dieses allgemeinen Falles genügt der folgende Ansatz:

$$B_x'' = B_0 \frac{y}{h} - \Sigma \left[D_p \mathfrak{Sin}\, \beta_p x + E_p \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x - x_2)\right] \sin p \frac{\pi}{2h} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

oder wenn wir auch die Funktion $\frac{y}{h}$ in die Reihenentwicklung einschließen:

$$B_x'' = \Sigma \left[B_0 f_p - D_p \mathfrak{Sin}\, \beta_p x - E_p \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x - x_2)\right] \sin p \frac{\pi}{2h} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32a)$$

Dazu tritt als Ergänzungsgleichung:

$$H_x'' = H_{kx}'' + \Sigma \left[F_p \mathfrak{Cof}\, \beta_p x + G_p \mathfrak{Sin}\, \beta (x - x_2)\right] \cos p \frac{\pi}{2h} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

oder bei Entwicklung der Konstanten H_{kx}'' in eine Fouriersche Reihe:

$$H_x'' = \Sigma \left[H_{kx}'' \cdot f_p \frac{p\pi}{2} + F \mathfrak{Cof}\, \beta_p x + G_p \mathfrak{Sin}\, \beta (x - x_2)\right] \cos p \frac{\pi}{2h} y \quad . \quad . \quad . \quad 33a)$$

Dabei habe ich den Koordinaten-Ursprung an den Anfang der zweiten Zone, also nach der früheren Abszisse x_1 verlegt, wie es Abb. 20 andeutet.

Über die Zweckmäßigkeit des Ansatzes läßt sich erst später urteilen. Insofern er sich seinem ganzen Aufbau nach eng an die Schlußgleichungen 23) und 27) des letzten Abschnittes anschließt, erregt er jedenfalls kein Bedenken. Doch wird man sich fragen, warum die Hyperbelfunktionen zweier Argumente $\beta_p x$ und $\beta_p (x - x_2)$ verwandt sind, und nicht Funktionen eines einzigen Argumentes oder noch einfacher die e-Funktionen $e^{\beta_p x}$ und $e^{-\beta_p x}$? Darauf ist nur zu antworten, daß die gewählte Formulierung die Bestimmung der Konstanten des Ansatzes erleichert. Von diesen ist uns ja nur die Feldstärke H_{kx}'' an der Zahnkrone bekannt, alle übrigen Größen B_0, D_p, E_p, F_p, G_p, und nicht zu vergessen der Parameter β_p müssen erst auf Grund der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen gegen die angrenzenden Zonen berechnet werden. Wie dies zu geschehen hat, will ich jetzt in gedrängter Kürze zeigen:

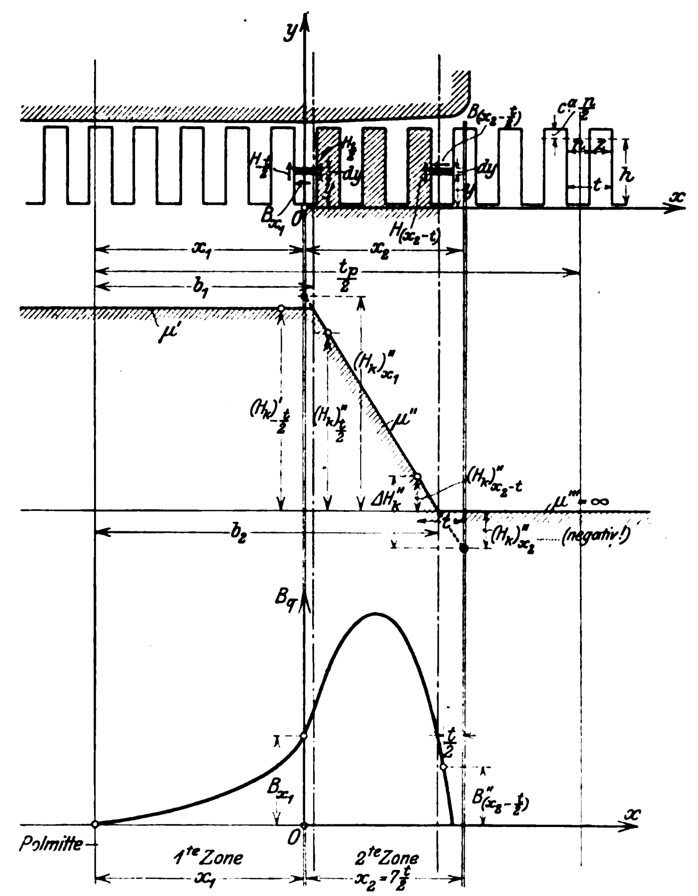


Abb. 20. Zur Berechnung des Nutenquerfeldes in der 2ten Zone.

Zunächst kann man die Zahl der Unbekannten reduzieren, indem man die Konstanten F_p und G_p der Zahnfeldstärke auf die entsprechenden Konstanten D_p und E_p der Querinduktion zurückführt. Das leistet bereits die Differentialgleichung 13). Kombiniert man diese mit den Ansätzen 32a) und 33a), so erhält man:

$$(z\mu'' + n)\,\Sigma[F_p\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p\,x + G_p\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p\,(x - x_2)]\cdot p\,\frac{\pi}{2h}\cos p\,\frac{\pi}{2h}y$$

$$= \Sigma[D_p\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p\,x + E_p\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(x - x_2)]\;2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p\,\frac{t}{2}\cos p\,\frac{\pi}{2h}y,$$

und daraus folgt:

$$\frac{F_p}{D_p} = \frac{G_p}{E_p} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p\,\frac{t}{2}}{(z\mu'' + n)\,p\,\frac{\pi}{4h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Eine ähnliche Formulierung ließe sich auch aus Gl. 14) gewinnen, hätten wir nicht verabredet, auf alle Konsequenzen dieser Gleichung zu verzichten. Solange wir daher diese Einschränkungen nicht fallen lassen, müssen wir den Parameter β_p als Unbekannte weiterführen und können uns zur Bestimmung der übrigen Konstanten nur an die Grenzbedingungen des Problems halten.

Da wissen wir vor allem, daß die Nut im Koordinatenanfangspunkt sowohl dem Ansatz der ersten Zone

$$(B)_{x=0} = B_{x_1} = \Sigma\,(\hat{B})_{x_1}\,\sin p\,\frac{\pi}{2h}y$$

als auch dem Ansatz der zweiten Zone

$$(B)_{x=0} = B_{x_1} = \Sigma\,[B_0 f_p - E_p\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p\,x_2]\,\sin p\,\frac{\pi}{2h}y$$

genügen muß. Somit können wir schon ein dritte Konstante

$$E_p = \frac{B_0 f_p - (\hat{B}_p)_{x_1}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p\,x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

aus unseren Formeln eliminieren.

Damit sind aber noch nicht alle Grenzbedingungen gegen die erste Zone erfüllt: denn die beiden Bereichen gemeinsame Induktion B_{x_1} ist außerdem mit den benachbarten Zähnen durch die Gleichung

$$n\left(\frac{dB}{dy}\right)_{x=0} = H'_{-\frac{t}{2}} - H''_{\frac{t}{2}}$$

verknüpft. Nun ist nach den Gesetzen der ersten Zone:

$$H'_{-\frac{t}{2}} = H_k' - \Sigma\left[(\hat{B}_p)_{x_1}\left(\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p\,\frac{t}{2} - 1\right)\cdot np\,\frac{\pi}{4h}\right]\cos p\,\frac{\pi}{2h}y,$$

nach den Gesetzen der zweiten Zone:

$$H''_{\frac{t}{2}} = (H_k'')_{\frac{t}{2}} + \sum \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p\,\frac{t}{2}}{(z''\mu + n)\,p\,\frac{\pi}{4h}}\left[\left(B_0 f_p - (B_p)_{x_1}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p\left(\frac{t}{2} - x\right)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + D_p\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p\,\frac{t}{2}\right]\cos p\,\frac{\pi}{2h}y$$

und nach den Gesetzen beider Zonen:

$$\left(\frac{dB}{dy}\right)_{y=0} = \Sigma\,(\hat{B}_p)_{x_1}\,p\,\frac{\pi}{2h}\cos p\,\frac{\pi}{2h}y.$$

Daraus folgt:

$$D_p = \frac{\mathfrak{Tg}\,\beta_p\,\frac{t}{2}}{v}\left\{\left(H_k' - [H_k'']_{\frac{t}{2}}\right)\frac{h}{n}\cdot 2\,f_p + B_0\left(\mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2\,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p\,\frac{t}{2} - 1\right)f_p\right.$$

$$\left. - (\hat{B}_p)_{x_1}\left(\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p\,\frac{t}{2} + v\,\mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2\,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p\,\frac{t}{2} + 1 - v\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

wenn unter v das Verhältnis:

$$v = \frac{\mathfrak{Sin}^2 \beta_p \frac{t}{2}}{n(z\mu'' + n)\cdot\left(p\frac{\pi}{4h}\right)^2} \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad 37)$$

verstanden wird.

Eine weitere Bedingung zwischen denselben Unbekannten D_p und B_p diktieren die Grenzbedingungen am Ende der zweiten Zone. Für die letzte Nut mit der Abszisse $x_2 - \frac{t}{2}$ verschwindet nämlich die Feldstärke des rechtsbenachbarten Zahnes. Daher gilt hier einfach:

$$n\left(\frac{dB''}{dy}\right)_{x_2 - \frac{t}{2}} = (H)''_{x_2 - t}$$

und kombinieren wir diese Forderung mit den früheren Ergebnissen, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$D_p = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2}\left\{(\hat{B}_p)_{x_1}(1 - v)\frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + B_0 f_p [1 + (v-1)]\frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - (H_k'')\frac{h}{n} f_p\right\} \quad \ldots \quad 38)$$

Jetzt braucht man nur noch die beiden Ausdrücke 36) und 38) für D_p aneinander gleich zu setzen, dann ergibt sich sofort die wichtige Grenzinduktion:

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = 2 f_p \frac{h}{n}\cdot\frac{[H_k' - (H_k'')_{\frac{t}{2}}] + (H_k'')_{x_2 - t}\cdot\frac{v\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p\frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p(x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + B_0\frac{n}{h}\frac{v}{2}\left[\mathfrak{Ctg}\,\beta_p\frac{t}{2}\cdot\frac{(v-1)\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p(x_2 - t) + \mathfrak{Sin}\,\beta_p x_2 - 2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p\frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p(x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - 1\right]}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p\frac{t}{2} + v\,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p\frac{t}{2}\,\frac{(v-1)\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p(x_2 - t) + \mathfrak{Sin}\,\beta_p x_2}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p(x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + 1 - v} \quad . \quad 39)$$

Mit Hilfe von $(\hat{B}_p)_{x_1}$ läßt sich sodann auch D_p nach Gl. 36) oder 38) ausdrücken. E_p haben wir schon früher auf $(\hat{B}_p)_{x_1}$ zurückgeführt, und für die Konstanten F_p und G_p steht uns Gl. 34) zur Verfügung. Somit sind nunmehr alle Konstanten bis auf B_0 und β_p vollständig bestimmt, und mit ihnen gewinnt der Ansatz des Querfeldes und der Zahnfeldstärke die endgültige Fassung:

$$B_x'' = B_0\frac{y}{h} + \Sigma\left[[(\hat{B}_p)_{x_1} - B_0 f_p]\frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p(x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - D_p\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p x\right]\sin p\frac{\pi}{2h}y \quad . \quad . \quad 40)$$

$$H_x'' = H''_{kx} + \Sigma\left[[(\hat{B}_p)_{x_1} - B_0 f_p]\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p(x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + D_p\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p x\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p\frac{t}{2}}{(z\mu'' + n)\,p\frac{\pi}{4h}}\cos p\frac{\pi}{2h}y \quad \ldots \ldots \quad 41)$$

Da haben wir nun die Formeln des allgemeinsten Falles. Aber was kann uns ein Ansatz nützen, der noch mit zwei willkürlichen Konstanten B_0 und β_p behaftet ist?



Haben wir doch nur für besonders feine Nutteilungen mit

$$x_2 \geqq 5 \frac{t}{2}$$

noch eine weitere Gl. 14) zur Hand. Weit häufiger aber sind Anker nach Abb. 19a) und b), für die wir bereits alle vorhandenen Bedingungen zur Bestimmung der Konstanten verwertet haben. Wie können wir trotzdem auch solche Fälle aufklären?

Nun, wenn die berechneten Formeln überhaupt für diese Beispiele gelten — und das müssen sie nach unseren Ableitungen —, dann müssen sie uns für Querfeld und Zahnfeldstärke stets dieselbrn Werte liefern, ganz gleichgültig, wie wir $B_0 \mathfrak{X}$ und β_p wählen mögen, Das ist es also, was ich zuerst zu beweisen habe.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall, den Abb. 19a) repräsentiert. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß überhaupt kein Zahn unter dem abfallenden Teil der H_k-Kurve liegt. Auf den letzten Zahn unter dem Polbogen b_1 mit der Permeabilität μ' folgt direkt ein Zahn außerhalb des Polbogens b_2 mit der Feldstärke

$$(H_k'')_{\frac{t}{2}} = 0,$$

und der Permeabilität $\mu''' = \infty$. Das muß auf das Nutenquerfeld denselben Einfluß haben, als stießen die beiden Zonen mit μ' und μ''' unmittelbar aufeinander, d. h. als besäße bereits die zweite Zone die Permeabilität $\mu'' = \infty$. Führen wir aber diese Annahme ein, so wird nach Gl. 37)

$$v = 0$$

und die so kompliziert aussehende Formel 39) schrumpft auf den einfachen Inhalt

$$(\widehat{B}_p)_{x_1} = H_k' \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{2 f_p}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 42)$$

zusammen.

Diese Gleichung enthält in der Tat weder B_0 noch β_p, und alle anderen Gleichungen, welche diese Größen noch enthalten, sind für unseren Fall gegenstandslos. Denn alle früheren Nuten und Zähne gehören noch zur ersten Zone, und für alle darauffolgenden Nuten und Zähne ist $B_q = 0$ und $H_z = 0$. Somit kennen wir nicht allein die Querfeldverteilung in der Grenznut $x = 0$, das ist:

$$(B)_{x=0} = B_{x_1} = H_k' \cdot \frac{h}{n} \sum \frac{2 f_p}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + 1} \sin p \frac{\pi}{2h} y, \quad \ldots \ldots \quad 42a)$$

sondern auch das Querfeld der anderen Nuten, für die der Ansatz der ersten Zone 23) noch einmal in Erinnerung gebracht werden möge.

Gewöhnlich wird

$$\alpha_1 x_1 \geqq 2$$

erhalten. Dann kann man

$$\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1 = 1$$

annnehmen und man erkennt, daß sich das Querfeld beinahe gar nicht ändert, solange kein Zahn in das Gebiet der abfallenden H_k-Kurve eintritt. In der behandelten Stellung liegt also das Maximum der Querfeldinduktion. — Daß gerade hierfür eine so überaus einfache Formel gewonnen wurde, ist für die Verwendung der Theorie in der Praxis ein großer Vorteil.



Nicht ganz so einfach liegen die Verhältnisse für den zweiten Fall

$$x_2 = 3\frac{t}{2},$$

bezüglich dessen ich noch einmal auf Abb. 19b) verweise. Denn außer eben dieser Größe von x_2 besteht nicht die geringste Nebenbedingung, und man kann nicht gleich einsehen, wieso diese Bedingung genügen soll, um den Einfluß der unbekannten Größen B_0 und β_p zu eliminieren. Und doch ist dies so. Um das zu zeigen, will ich zunächst v noch ein wenig anders ausdrücken. Ich definiere nämlich einen neuen Parameter γ_p durch die Gleichung:

$$\mathfrak{Sin}^2 \gamma_p \frac{t}{2} = n(z\mu'' + n) \cdot p \frac{\pi}{4h} \quad \ldots\ldots \quad 43) \text{ (vgl. 22)}$$

und erhalte:

$$v = \left(\frac{\mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Sin}\, \gamma_p \frac{t}{2}} \right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43a)$$

Mit Hilfe dieser Substitution lassen sich für $x_2 = 3\frac{t}{2}$ folgende Umformungen bewerkstelligen:

$$\frac{v\, \mathfrak{Cof}\, \beta_p \frac{t}{2}}{(v-1)\, \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} = \frac{\mathfrak{Cof}\, \gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, 3\gamma_p \frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{Tg}\, 3\gamma_p \frac{t}{2}\, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2} - 1 \right) \quad . \quad 44)$$

ferner:

$$v \cdot \mathfrak{Ctg}\, \beta_p \frac{t}{2} \cdot \frac{(v-1)\, \mathfrak{Sin}\, \beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Sin}\, \beta_p x_2}{(v-1)\, \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} = v - 1 + \mathfrak{Tg}\, 3\gamma_p \frac{t}{2}\, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2} \cdot \quad 45)$$

Das bewirkt aber in der Tat, daß im Zähler von Gl. 39) das ganze Glied mit B_0 verschwindet und nur eine von B_0 und β_p unabhängige Gleichung zurückbleibt, nämlich:

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = \frac{2 H_k' - (H_k'')_{\frac{t}{2}} \left(3 - \mathfrak{Tg}\, 3\gamma_p \frac{t}{2}\, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2} \right)}{\mathfrak{Ctg}\, a x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\, 3\gamma_p \frac{t}{2}\, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2}} \cdot \frac{h}{n} f_p \quad \ldots\ldots \quad 46)$$

Damit ist die Querfeldverteilung B_{x_1} in der Grenznut und in allen anderen Nuten der ersten Zone bestimmt.

Indessen enthält die zweite Zone noch eine Nut mit der Abszisse

$$x_2 - \frac{t}{2} = t$$

und auch wenn wir hier das Querfeld bestimmen, müssen sich die willkürlichen Konstanten B_0 und β_p herausheben. Ich will die Rechnung nicht ausführlich mitteilen. Zunächst liefert die Gl. 40) für $x = t$

$$B_t'' = B_0 \frac{y}{h} + \sum \left\{ \left[(\hat{B}_p)_{x_1} - B_0 f_p \right] \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, 3\beta_p \frac{t}{2}} - D_p\, \mathfrak{Sin}\, \beta_p t \right\} \sin p \frac{x}{2h} y.$$



Dazu kommt:

$$D_p = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,3\,\gamma_p \frac{t}{2}} \cdot \mathfrak{Tg}\,\beta \frac{t}{2}\,\frac{2}{v} \left\{ [(B_p)_{x_1} - B_0 f_p] \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,3\,\beta_p \frac{t}{2}} (1 - v) + B_0 f_p - (H_k)_{\frac{t}{2}} \frac{h}{n} f_p \right\}.$$

Diesen Wert haben wir oben einzuführen, dann fallen wiederum nach einigen Umformungen alle willkürlichen Konstanten fort, und es bleibt nur:

$$(\hat{B}_p'')_t = (\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,3\,\gamma_p \frac{t}{2}} + (H_k'')_{\frac{t}{2}} \frac{h}{n} f_p \left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,3\,\gamma_p \frac{t}{2}} \right) \quad \ldots\ldots \quad 47)$$

Alle diese Gleichungen hätte man übrigens auch einfacher erhalten können, wenn man sich von vornherein auf den Standpunkt gestellt hätte, daß die Wahl von β_p das Resultat unmöglich ändern könne. Darauf gestützt, konnte man nämlich von den unendlich vielen Möglichkeiten die einfachste annehmen, d. i.:

$$\beta_p = \gamma_p.$$

Damit wären die meisten Resultate aus den ursprünglichen Formeln sogar direkt abzulesen gewesen.

Wie haben wir es dann aber zu verstehen, daß die Leitkurve der Nutenfeldstärke, die uns ja Gl. 40) ausdrücken sollte, immer noch mit zwei willkürlichen Konstanten behaftet ist und bleibt? — Nun, auch hierfür ist die Erklärung nicht schwierig. Wenn wir im Gebiete der zweiten Zone überhaupt nur immer zwei Nuten mit B_{x_1} und B_t'' vorfinden, dann können wir durch diese zwei Punkte natürlich beliebig viele gleich gut mögliche Interpolationskurven legen. Und mehr behauptet schließlich unsere Gl. 40) gar nicht. Indem sie uns die Wahl von B_0 und β_p freistellt, überläßt sie uns eben die Wahl dieser Interpolationskurve. Indem sie aber die Induktionen B_{x_1} und B_t'' unabhängig von dem Wert dieser Konstanten angibt, macht sie das Problem trotzdem wieder zu einem bestimmten.

Vielleicht wird man unter solchen Umständen geneigt sein, auf die Leitkurve überhaupt zu verzichten und statt dessen die Gl. 46) und 47) bei verschiedenen Lagen des Nutenkranzes wiederholt anzuwenden. Das wäre in der Tat sehr einfach, wenn wir für alle diese Lagen mit ein und demselben Werte von μ'' und daher auch γ_p rechnen dürften. Denn da bei großen Maschinen mit $a_1 x_1 > 2$

$$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1 = 1$$

gesetzt werden kann, so wäre die Feldstärke $(H_k'')_{\frac{t}{2}}$ die einzige Variable. Diese ändert sich aber einfach linear mit der Ankerverdrehung. Also wären auch die Amplituden $(\hat{B}_p)_{x_1}$ und $(\hat{B}_p'')_t$ lineare Funktionen von x, und es würde genügen, die Gleichungen nur für die Grenzen, d. i.

$$\text{für} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1 - t}{2} \\ (H_k'')_{\frac{t}{2}} = H_k' \end{array} \right. \qquad \text{und} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_2 - t}{2} \\ (H_k'')_{\frac{t}{2}} = 0 \end{array} \right.$$

anzuwenden.

Aber haben wir bei $x_2 = 3\frac{t}{2}$ wirklich das Recht, über die ganze Ausdehnung der zweiten Zone den nach Abb. 9 und Gl. 10b) bestimmten Mittelwert von μ'' einzuführen? — Diese Frage muß verneint werden. Denn als Mittelwert über die zweite Zone hat μ'' nur dann einen Sinn, wenn tatsächlich mehrere Zähne unter der zweiten



Zone liegen. In unserem Falle dagegen, wo μ'' nur für einen einzigen Zahn das Verhältnis

$$\mu'' = \left(\frac{dB_z}{dH_z}\right)_x = \operatorname{tg} \delta$$

charakterisieren soll, muß es auch logischerweise für diesen einen Zahn nach Abb. 21 gebildet werden, und zwar für jede neue Lage dieses Zahnes und jede neue Feldstärke H_k'' in seiner Krone von neuem. Es ist also nach den Gl. 46) und 47) streng-genommen doch nur eine punktweise Berechnung der Querfeldkurve möglich.

Aus diesem Grunde wird man in praktischen Fällen stets die Berechnung einer Interpolationskurve vorziehen, die dann für irgendeine Amplitude dem Gesetze

$$(\overline{B}_p'')_x = B_0 f_p - [B_0 f_p - (B_p)_{x_1}] \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x - x_2)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - D_p \,\mathfrak{Sin}\,\beta_p x \quad . \; . \; . \; . \quad 48)$$

genügen muß.. Daß dieser Ansatz die oft besprochenen Konstanten B_0 und β_p enthält, kann uns nur willkommen sein. Denn so können wir die Formel für D_p durch die Annahme

$$\beta_p = \gamma_p \quad \text{und} \quad v = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 49)$$

erheblich vereinfachen und behalten doch noch immer das Verfügungsrecht über irgendeinen dritten Punkt, den wir außer den bereits diskutierten Werten $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ und $(\widehat{B}_p'')_t$ der Leitkurve vorschreiben können. Am besten eignet sich hierzu die Querfeldamplitude $(\widehat{B}_p)_m$ unter der Mitte M des Trapezschenkels. Nicht nur, daß ihre Gleichung

$$(\widehat{B}_p)_m = H_k' \frac{h}{n} \cdot \frac{2 f_p}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \dfrac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \dfrac{t}{2} + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 50)$$

besonders einfach ausfällt, sie markiert auch sehr nahezu das Maximum des Nutenquerfeldes und legt so die Leitkurve gerade in ihrem wichtigsten Abschnitt fest. So haben wir nun durch zwei günstig gewählte Nebenbedingungen 49) und 50) die ursprüngliche Unbestimmtheit des Ansatzes aufgehoben und erhalten als Gesetz der Leitkurve unter der zweiten Zone

$$(\widehat{B}_p'')_x = B_0 f_p - [B_0 f_p - (\widehat{B}_p)_{x_1}] \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - \left(2 B_0 f_p - H_k' \frac{h}{n} f_p\right) \mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p x}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \quad 51)$$

mit der Konstanten

$$B_0 f_p = \frac{(\widehat{B}_p)_m - (\widehat{B}_p)_{x_1} \dfrac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p t}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - H_k' \dfrac{h}{n} f_p \dfrac{\mathfrak{Sin}^2 \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2}}{1 - \dfrac{1}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 52)$$

Mit der anfänglichen Unbestimmtheit der Leitkurve ist es ein für allemal vorbei, sobald mehr als ein Zahn unter der zweiten Zone liegt. Denn für

$$x_2 \geqq 5 \frac{t}{2}$$

gesellt sich zu den schon ausgenützten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen die weitere Beziehung:

$$n \frac{dB_x}{dy} = H_{\left(x - \frac{t}{2}\right)} - H_{\left(x + \frac{t}{2}\right)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

welche innerhalb der zweiten Zone die Querinduktion der mittleren Nuten auf die



Feldstärke der flankierenden Zähne zurückführt. Diese Gleichung genügt bereits, um sowohl B_0 als auch β_p eindeutig festzulegen. Wir kombinieren sie mit unserem Ansatz und erhalten zunächst:

$$B_0 \frac{n}{h} - \sum n p \frac{\pi}{2h} [D_p \mathfrak{Sin}\, \beta_p x + E_p \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x - x_2)] \cos p \frac{\pi}{2h} y$$

$$= (H_k'')_{x-\frac{t}{2}} - (H_k'')_{x+\frac{t}{2}} - \sum 2 \mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2} [F_p \mathfrak{Sin}\, \beta_p x + G_p \mathfrak{Cof}\, \beta_p (x - x_2)] \cos p \frac{\pi}{2h} y.$$

Das bedingt aber einerseits:

$$B_0 = \left[(H_k'')_{x-\frac{t}{2}} - (H_k'')_{x+\frac{t}{2}}\right] \cdot \frac{h}{n} = \Delta H_k'' \cdot \frac{h}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 53)$$

wenn wir mit $\Delta H_k''$ die Differenz der Zahnfeldstärken zwischen zwei benachbarten Zahnkronen bezeichnen (Abb. 20); andererseits gilt auch:

$$\frac{F_p}{D_p} = \frac{G_p}{E_p} = \frac{n p \frac{\pi}{4h}}{\mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

So bestehen nunmehr für ein und dasselbe Verhältnis zwei Gl. 34) und 54) nebeneinander, und das ist nur möglich, wenn der Parameter β_p die Nebenbedingung erfüllt:

$$\mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2} = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z\mu'' + n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Für diesen Ausdruck hatten wir in Anlehnung an die Theorie der ersten Zone schon eine andere Substitution, nämlich

$$\mathfrak{Sin}\, \gamma_p \frac{t}{2}$$

eingeführt. Jetzt sehen wir, daß jene Übereinstimmung zwischen β_p und γ_p, die wir für $x_2 = 3 \frac{t}{2}$ beinahe willkürlich angenommen hatten, für $x_2 = 5 \frac{t}{2}$ mit zwingender Notwendigkeit folgt. Zugleich vereinfachen sich aufs neue die allgemeinen Formeln; Gl. 39) verwandelt sich in

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = 2 f_p \frac{h}{n} \cdot \frac{\left[H_k' - (H_k'')_{\frac{t}{2}}\right] + \left[(H_k'')_{x_2 - t} - \Delta H_k''\right] \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} + \Delta H_k'' \frac{1}{2} \left(\mathfrak{Tg}\, \beta_p x_2\, \mathfrak{Ctg}\, \beta_p \frac{t}{2} - 1\right)}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\, \beta_p x_2\, \mathfrak{Ctg}\, \beta_p \frac{t}{2}}$$

oder wenn wir wie in Abb. 20 die Abkürzungen

$$\text{und} \quad \left.\begin{aligned} (H_k)''_{x_1} &= (H_k)''_{\frac{t}{2}} + \frac{\Delta H_k''}{2} \\ (H_k)''_{x_2} &= (H_k)''_{x_2 - t} - \Delta H_k'' \end{aligned}\right\} (H_k)''_{x_2} \text{ stets negativ} \quad \ldots\ldots \quad 56)$$

gebrauchen:

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = 2 f_p \frac{h}{n} \cdot \frac{[H_k' - (H_k'')_{x_1}] + (H_k'')_{x_2} \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} + \frac{\Delta H_k''}{2} \mathfrak{Tg}\, \beta_p x_2\, \mathfrak{Ctg}\, \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\, \beta_p x_2\, \mathfrak{Ctg}\, \beta_p \frac{t}{2}} \quad \ldots \quad 57)$$

Hierfür schrumpft die Konstante D_p auf

$$D_p = -(H_k'')_{x_2} \frac{h}{n} f_p \frac{2 \operatorname{Sin} \beta_p \frac{t}{2}}{\operatorname{Cof} \beta_p x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 58,$$

zusammen. So wird schließlich aus den Gleichungen des Nutenquerfeldes und der Zahnfeldstärke:

$$B_x'' = \Delta H_k'' \frac{h}{n}$$

$$-\sum \left\{ \left[\Delta H_k'' \frac{h}{n} f_p - (\bar{B}_p)_{x_1} \right] \frac{\operatorname{Cof} \beta_p (x_2 - x)}{\operatorname{Cof} \beta_p x_2} - (H_k)_{x_2}'' \frac{h}{n} f_p \cdot 2 \operatorname{Sin} \beta_p \frac{t}{2} \frac{\operatorname{Sin} \beta_p x}{\operatorname{Cof} \beta_p x_2} \right\} \sin p \frac{\pi}{2h} y \quad 59)$$

und

$$H_x'' = (H_k)_x''$$

$$-\sqrt{\frac{n}{z\mu'' + n}} \sum \left\{ \left[\Delta H_k'' \frac{h}{n} f_p - (\bar{B}_p) x_1 \right] \frac{\operatorname{Sin} \beta_p (x_2 - x)}{\operatorname{Cof} \beta_p x_2} + (H_k)_{x_2}'' \frac{h}{n} f_p \cdot 2 \operatorname{Sin} \beta_p \frac{t}{2} \frac{\operatorname{Cof} \beta_p x}{\operatorname{Cof} \beta_p x_2} \right\} \cos p \frac{\pi}{2h} y \quad 60)$$

III. Anwendungen der Theorie für gerade Zähne.

Ich habe im vorigen die Theorie des Nutenquerfeldes zwischen geraden Zähnen ziemlich lückenlos aufgebaut. Denn ich hoffte einen Teil meiner Leser auch für diejenige Seite des Problems interessieren zu können, die mich selbst bei der Ausarbeitung am meisten fesselte, das ist für die Eigenart der mathematischen Analyse. Das neue Kapitel, zu dem ich nun komme, wird dem Theoretiker wahrscheinlich minder anziehend erscheinen. Um so wichtiger ist es für den Praktiker, denn es behandelt die Anwendungen der Theorie.

Auch über die Anwendungen möchte ich allerdings etwas mehr sagen, als für den praktischen Berechnungsingenieur unbedingt notwendig ist; darum habe ich das Kapitel in zwei Abschnitte unterteilt. Der erste Abschnitt ist ausschließlich auf die Bedürfnisse der Praxis zugeschnitten. Er ist im Grunde nur eine Gebrauchsanweisung, die obendrein — wie ich ausdrücklich bemerken möchte — ganz außer Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Arbeit verständlich ist. Wer aber nicht nur über das „Wie“, sondern auch über das „Warum“ Bescheid wünscht, dem wird auch der zweite Abschnitt noch manches Wissenswerte bringen. Denn hier wird mit der gewonnenen Theorie etwas tiefer in die eigentümliche Struktur des Nutenquerfeldes hineingeleuchtet.

1. Anleitung zur Lösung praktischer Aufgaben.

a) Vorarbeiten.

Bestimmung der H_k-Kurve und der Hilfsgrößen μ' und μ''. Als gegeben betrachte ich die magnetische Charakteristik des Ankereisens $B_z = f(H_z)$ (Abb. 21), sowie die Hauptfeldverteilung B_l über dem Ankerumfang (Abb. 22).

α) Besitzt ein Zahn an der Krone die Feldstärke H_{zk}, so führt die entsprechende Zahnteilung t (d. h. der Zahn mit den beiden angrenzenden Nuthälften) pro cm Länge einen Flux:

$$\frac{N_t}{cm} = B_{zk} \cdot z_e + H_{zk} \cdot n = (B_{zk})_l\, z_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 17^{1})$$

[1]) Bei isolierten Ankerblechen beträgt die effektive Zahnstärke z_e etwa 90—95 % der wirklichen Zahnstärke z.

Daraus folgt die ideelle Zahninduktion:

$$(B_{zk})_i = B_{zk} + H_{zk} \cdot \frac{n}{z_e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17a)$$

welche wie in Abb. 21 ebenfalls als Funktion der Zahnfeldstärke aufzutragen ist.

β) Andererseits ist die ideelle Zahninduktion aber auch durch die Kurve der Luftfeldverteilung über dem Ankerumfang gegeben. Denn dieser Kurve entnimmt man zuerst den Mittelwert des Luftfeldes über einer Zahnteilung $B_{l\,mitt}$ und berechnet daraus:

$$(B_{zk})_i = B_{l\,mitt} \cdot \frac{t}{z_e}.$$

Auf diese Weise findet man die Kurve $(B_{zk})_i = f(x)$ der Abb. 23 und erhält mit Hilfe der Kurve $B_{zi} = f(H_z)$ des Diagramms 21) auch die Verteilung der Feldstärke in den Zahnkronen längs des Ankerumfanges $H_{zk} = f(x)$ (Abb. 23).

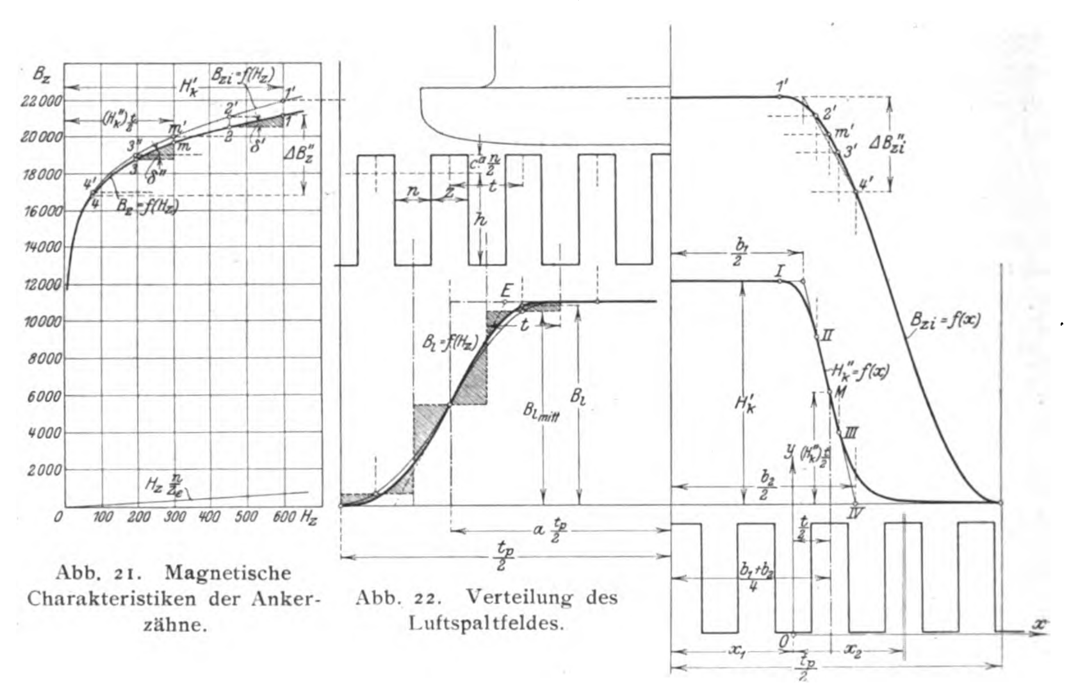


Abb. 21. Magnetische Charakteristiken der Ankerzähne.

Abb. 22. Verteilung des Luftspaltfeldes.

Abb. 23. Konstruktion der H_k-Kurve.

γ) Die letzte Kurve wird mit guter Annäherung durch ein Trapez von den parallelen Seiten b_1 und b_2 ersetzt, und darauf auch der über den Trapezschenkeln gelegen Abschnitt der $(B_{zk})_i$-Kurve durch eine Gerade interpoliert. Darnach würde einer Änderung der Zahnfeldstärke um den vollen Betrag H_{zk}' ein kleiner Abfall der ideellen Zahninduktion um $(\Delta B_{zk}'')_i$ und der wirklichen Zahninduktion um $\Delta B_{zk}''$ entsprechen. Wir bilden daraus die scheinbare Permeabilität

$$\mu'' = \frac{\Delta B_{zk}''}{H_{zk}'}.$$

Jedoch hat dieser Mittelwert für den abfallenden Teil der Trapezkurve nur dann Bedeutung, wenn mehr als eine Zahnmittellinie unter dem Trapezschenkel liegt. Anderenfalls (Abb. 23) bilde man gemäß Abb. 21:

$$\mu'' = \frac{dB_{zk}''}{dH_{zk}''} = \operatorname{tg} \delta''. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Unter dem Polbogen b_1 gilt stets das analoge Verhältnis:

$$\mu' = \frac{dB_{zk}'}{dH_{zk}'} = \operatorname{tg} \delta' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10b)$$

und infolge der höheren Sättigungen wird hier $\mu' < \mu''$ erhalten.

Festlegung des Koordinatensystems.

Unter der H_k-Kurve wird der Nutenkranz in derjenigen Stellung eingezeichnet, in welcher möglichst viele Zähne unter dem abfallenden Teile der H_k-Kurve liegen, und zwar symmetrisch zur Mitte M des Trapezschenkels (Abb. 23). Doch sollen dabei keine Zahnmittellinien gerade oder nahezu unter eine Ecke des Trapezes fallen. — Alsdann wird der Ursprung O des Koordinatensystems in die Mitte desjenigen Nutbodens gelegt, der von dem letzten Zahn unter dem Polbogen b_1 und dem ersten Zahn unter dem Trapezschenkel flankiert wird. Die erste Zone zählt von hier rückwärts bis zur Polmitte (x_1), die zweite Zone vom Koordinatenanfangspunkt vorwärts bis zum ersten Zahn außerhalb der abfallenden H_k-Kurve (x_2). Die zweite Zone enthält also immer eine ungerade Anzahl halber Polteilungen:

$$x_2 = 3\frac{t}{2}, \quad 5\frac{t}{2} \dots$$

Die Ordinate y wird vom Nutboden zur Nutöffnung gezählt. Die reduzierte Nuttiefe h reicht vom Nutboden bis zu einer Entfernung $\frac{n}{2}$ von der Nutöffnung. Darüber hinaus denken wir uns die Nutwände um eine solche Strecke k fortgesetzt, daß der tatsächliche Querfluß $(N_q)_{hk}$ des oberen Nutraumes pro cm Ankerlänge durch das Produkt

$$(B_q)_{y=h} \cdot k = \frac{(N_q)_{hk}}{cm}$$

ausgedrückt werden kann (Abb. 10). Bei offenen Nuten kann k auch vernachlässigt werden.

Vereinfachung der Nutfeldverteilung.

Die Verteilung des mittleren Nutenquerfeldes zwischen Boden und Öffnung läßt sich durch eine Fouriersehe Reihe von Sinuswellen wiedergeben. Von diesen berücksichtigen wir nur die Grundwelle

$$B_1 = \hat{B}_1 \sin p_1 \frac{\pi}{2h} y.$$

Sie erreicht für $y = h$ den Wert:

$$B_{1h} = \hat{B}_1 \sin p_1 \frac{\pi}{2}.$$

Ein Viertel ihrer vollen Wellenlänge kommt der Tiefe $\frac{h}{p_1}$ gleich. Der Parameter p_1 ist aus Abb. 24 abzulesen und kann bei offenen Nuten gleich 1,0 gesetzt werden. Dieselbe Abbildung enthält den häufig verwendeten Faktor f_1.

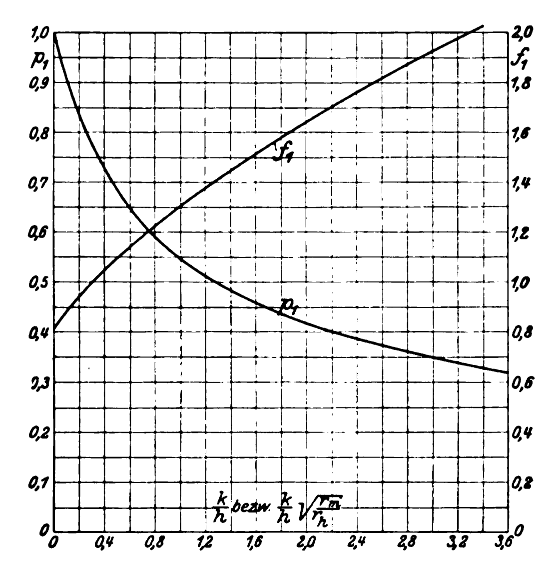


Abb. 24. Darstellung des Parameters p_1 und des Faktors $f_1 = \frac{8}{p_1^2 \pi^2} \frac{\sin p_1 \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p_1 \pi}{p_1 \pi}}$ als Funktion von $\frac{k}{h}$ $\left(\text{bzw. } \frac{k}{h} \cdot \sqrt{\frac{r_m}{r_h}}\right)$.

Das Ziel unserer Rechnung ist die Bestimmung der Veränderlichkeit von B_{1h} längs des Ankerumfanges.

b) Erstes Zahlenbeispiel.

Walzwerkmotor — Gleichstrom — 2000 kW — 120 U. p. M.

Ankerdurchmesser	D	$= 350$ cm
Polzahl	$2p$	$= 24$
Polbedeckungsfaktor	α	$= {}^2/_3$
Polteilung	t_p	$= 45{,}6$ cm
Nuten pro Pol		$= 24$
Nutteilung	t	$= 1{,}9$ cm
Nutbreite	n	$= 0{,}7$ „
Reduzierte Nuttiefe	h	$= 4{,}2$ „
Zahnbreite maximal	z_{max}	$= 1{,}2$ „
„ minimal	z_{min}	$= 1{,}15$ „
„ im Mittel effektiv	z_e	$= 1{,}17 \cdot 0{,}935 = 1{,}1$ cm
Oberer Nutraum	k	= vernachlässigt
daher	p_1	$= 1$
		$B_1 h = \widehat{B}_1$

Für $B'_{zk} = 20\,500$ und $H'_{zk} = 450$ ergaben sich folgende Konstanten der Trapezkurve.

Erste Zone: Polbogen . . . . . . $b_1 = 21{,}6$ cm

Reichweite . . . . . . $x_1 = \frac{b_1 + b_2}{4} - t = 10{,}25 \text{ cm} = 5{,}4\,t$

Scheinbare Permeabilität $\mu' = 6{,}5$.

Zweite Zone: Polbogen . . . . . . $b_2 = 27$ cm

Reichweite . . . . . . $x_2 = 4{,}75 \text{ cm} = 5\frac{t}{2}$

Scheinbare Permeabilität $\mu'' = 9$

Feldabfall pro Nutleitung $\Delta H_k'' = H_k \cdot \frac{2t}{b_2 - b_1} = 317$.

Die Verlängerung des Trapezschenkels liefert:

im Koordinaten-Anfangspunkt $(H_k'')_{x_1} = \frac{H_k'}{2} + \Delta H_k = 542$

über $x = x_2$ . . . . $(H_k'')_{x_2} = \frac{H_k'}{2} - 3\frac{\Delta H_k''}{2} = -250$.

Dazu notieren wir noch folgende dimensionslose Hilfsgrößen[1]):

Erste Zone:	Zweite Zone:
$\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z_e\mu' + n)} = 0{,}438$	$\mathfrak{Sin}\,\beta_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z_e\mu'' + n)} = 0{,}510$
$\alpha_1 \frac{t}{2} = 0{,}425$	$\beta_1 \frac{t}{2} = 0{,}49$
	$\mathfrak{Cos}\,\beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}122$
$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2} = 2{,}5$	$\mathfrak{Ctg}\,\beta_1 \frac{t}{2} = 2{,}20$
$\alpha_1 x_1 = 4{,}6$	$\beta_1 x_2 = 2{,}45$
	$\mathfrak{Cos}\,\beta_1 x_1 = 5{,}84$
$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 x_1 = 1{,}0$	$\mathfrak{Tg}\,\beta_1 x_2 = 0{,}985$.

[1]) Über die Bedeutung und Darstellung der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}$, $\mathfrak{Cos}$, $\mathfrak{Tg}$, $\mathfrak{Ctg}$ vgl. Anmerkung S. 8 und Diagramm 11) und 12).

Jetzt lassen sich alle Formeln bequem auswerten: zunächst berechnen wir die Querfeldamplitude $(\hat{B}_1)_{x_1}$ auf der Grenze zwischen beiden Zonen. Hierfür gilt:

$$(\hat{B}_1)_{x_1} = 2 f_1 \frac{h}{n} \cdot \frac{[H_k' - (H_k'')_{x_1}] + (H_k'')_{x_2} \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2} + \frac{\varDelta H_k''}{2} \mathfrak{Tg}\, \beta_1 x_2 \, \mathfrak{Ctg}\, \beta_1 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 x_1 \, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\, \beta_1 x_2 \, \mathfrak{Ctg}\, \beta_1 \frac{t}{2}} \quad . \; . \; 57)$$

$$= 2 \cdot 0{,}811 \cdot \frac{4{,}2}{0{,}7} \cdot \frac{-92 - 250 \cdot \frac{1{,}122}{5{,}84} + \frac{317}{2} \cdot 0{,}985 \cdot 2{,}20}{1 \cdot 2{,}5 + 0{,}985 \cdot 2{,}20}$$

$$= 420.$$

Sodann schließen wir nach der Formel

$$(\hat{B}_1')_x = (\hat{B}_1)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 (x_1 + x)}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 x_1} \doteq (\hat{B}_1)_{x_1} \cdot e^{\alpha_1 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 23)^{1)}$$

auf die Querfeldverteilung in der ersten Zone (x negativ) und berechnen:

Für $x =$	$-\frac{t}{2}$	$-t$	$-2t$	$-3t$	$-4t$	$-5t$
$\alpha_1 x =$	−0,425	−0,85	−1,70	−2,55	−3,40	−4,25
$e^{\alpha_1 x} =$	0,655	0,425	0,182	0,078	0,033	0,014
$(\hat{B}_1')_x =$	275	179	76	33	14	6

Endlich berechnen wir das Querfeld auch noch in der zweiten Zone, für die wir die Formel

$$(\hat{B}_1'')_x = \varDelta H_k'' \cdot \frac{h}{n} f_1 - \left[\varDelta H_k'' \frac{h}{n} f_1 - (\hat{B}_1)_{x_1}\right] \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2} - (H_x'')_{x_2} \frac{h}{n} f_p \cdot 2\, \mathfrak{Sin}\, \beta_1 \frac{t}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta_1 x}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2} \quad 59)$$

in Erfahrung gebracht haben. Daraus folgt für unser Beispiel:

$$(\hat{B}_1')_x = 1540 - 192\, \mathfrak{Cof}\, \beta_1 (x_2 - x) - 212\, \mathfrak{Sin}\, \beta_1 x$$

und speziell

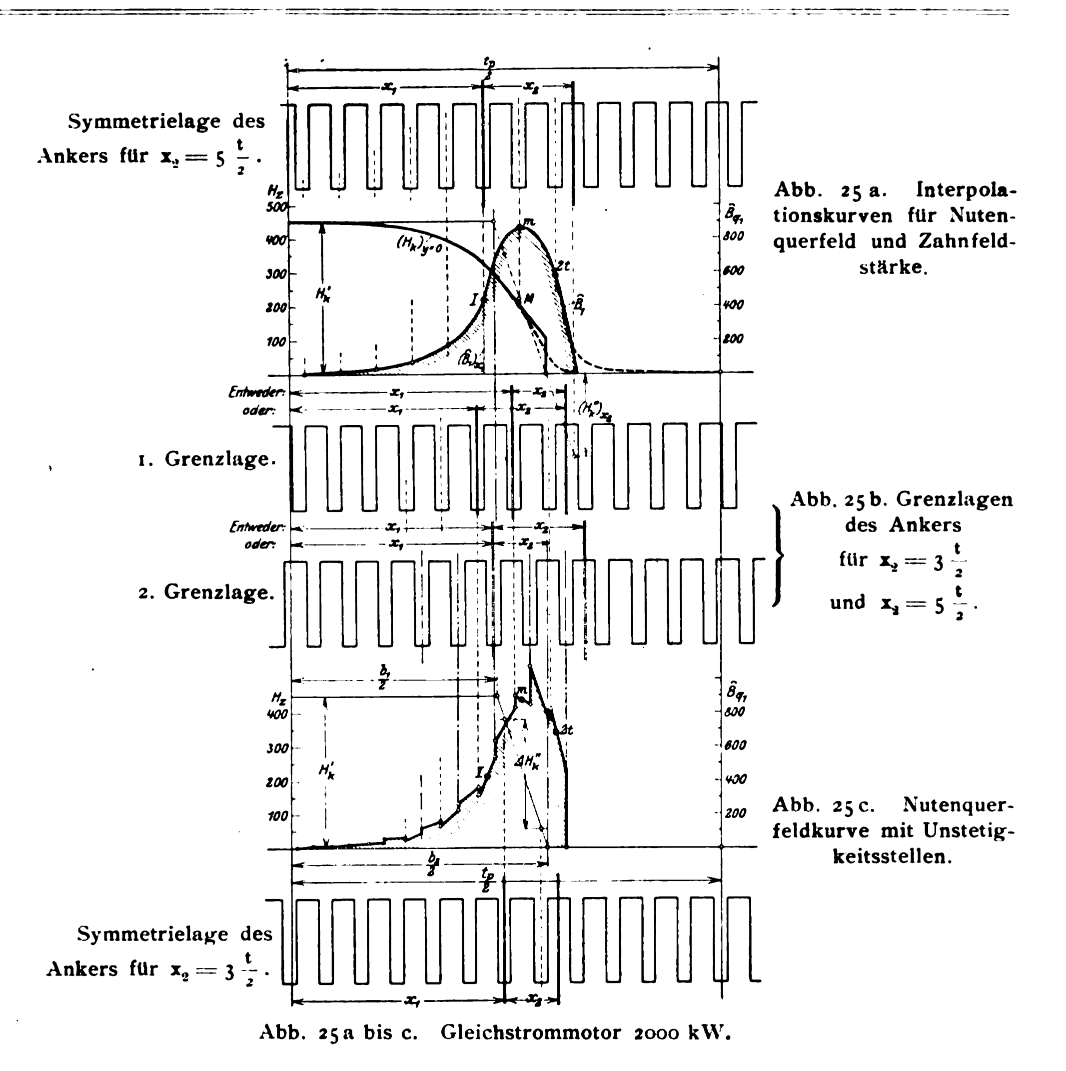
Für $x =$	$\frac{t}{2}$	t	$3\frac{t}{2}$	$2t$	$5\frac{t}{2}$
$\beta_1 x =$	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45
$\beta_1 (x_2 - x) =$	1,96	1,47	0,98	0,49	0
$\mathfrak{Cof}\, \beta_1 (x_2 - x) =$	3,62	2,29	1,52	1,122	1
$\mathfrak{Sin}\, \beta_1 x =$	0,51	1,145	2,06	3,48	5,75
$(\hat{B}_1'')_x =$	737	857	811	588	128

So erhält man mit ganz geringem Rechenaufwand das ganze Bild der Querfeldverteilung, wie es Abb. 25a wiedergibt. Die Kurvenform zeigt alle aus experimentellen Aufnahmen bekannte Charakteristika. Nur jenseits der zweiten Zone fehlt die gestrichelte Abrundung, mit der sich die Querfeldkurve zu dem verschwindend kleinen Wert in der neutralen Zone herabsenkt.

---

1) Der letzte Ausdruck ist zwar nur für $\alpha_1 x_1 \geq 2$ bis 3 zu verwenden. Doch bewegt man sich auch bei praktischen Beispielen meist oberhalb dieser Grenze.





Symmetrielage des Ankers für $x_2 = 5 \frac{t}{2}$.

Abb. 25 a. Interpolationskurven für Nutenquerfeld und Zahnfeldstärke.

1. Grenzlage.

2. Grenzlage.

Abb. 25 b. Grenzlagen des Ankers für $x_2 = 3 \frac{t}{2}$ und $x_2 = 5 \frac{t}{2}$.

Abb. 25 c. Nutenquerfeldkurve mit Unstetigkeitsstellen.

Symmetrielage des Ankers für $x_2 = 3 \frac{t}{2}$.

Abb. 25 a bis c. Gleichstrommotor 2000 kW.

e) Zweites Zahlenbeispiel.

Drehstromsynchrongenerator — 6000 kW — 300 U. p. M.

Ankerdurchmesser	D	$= 315$ cm
Polzahl	$2p$	$= 20$
Polbedeckungsfaktor	α	$= {}^2/_3$
Polteilung	t_p	$= 49{,}5$ cm
Nuten pro Pol		$= 9$
Nutteilung	t	$= 5{,}5$ cm
Nutbreite	n	$= 2{,}4$ „
Reduzierte Nuttiefe	h	$= 6{,}0$ „
Zahnbreite maximal	z_{max}	$= 3{,}2$ „
minimal	z_{min}	$= 3{,}1$ „
im Mittel effektiv	z_e	$= 3{,}15 \cdot 0{,}92 = 2{,}9$ cm
Oberer Nutraum	k	$=$ vernachlässigt
daher	p_1	$= 1$
	B_{1h}	$= \hat{B}_1$

Für $B_{zk}' = 19600$ und $H_{zk}' = 300$ ergaben sich folgende Konstanten der Trapezkurve:

Erste Zone: Polbogen . . . . $b_1 = 24$ cm

Reichweite . . . . . . $x_1 = \frac{b_1 + b_2}{4} - \frac{t}{2} = 10{,}5\,\text{cm} = 1{,}9\,t$

Scheinbare Permeabilität $\mu' = 8$.

Zweite Zone: Polbogen . . . . $b_2 = 29$ cm

Reichweite . . . . . . $x_2 = 8{,}25\,\text{cm} = 3\,\frac{t}{2}$

Scheinbare Permeabilität $\mu'' = 12$

Feldstärke des einzigen Zahnes der zweiten Zone $(H_k'')_{\frac{t}{2}} = \frac{H_k'}{2} = 150$.

Außerdem stellen wir noch folgende Rechnungsgrößen zusammen:

Erste Zone:	Zweite Zone:
$\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z_e\mu' + n)} = 1{,}025$	$\mathfrak{Sin}\,\beta_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z_e\mu'' + n)} = 1{,}235$
$\alpha_1 \frac{t}{2} = 0{,}90$	$\beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}04$
	$\mathfrak{Cof}\,\beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}59$
$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2} = 1{,}40$	$\mathfrak{Ctg}\,\beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}285$
	$\mathfrak{Cof}\,\beta_1 t = 4{,}65$
$\alpha_1 x_1 = 3{,}42$	$\beta_1 x_2 = 3{,}12$
	$\mathfrak{Cof}\,\beta_1 x_2 = 11{,}34$
$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 x_1 = 1{,}0$	$\mathfrak{Tg}\,\beta_1 x_2 = 0{,}995$.

Mit Hilfe dieser Daten bestimmen wir zuerst die Amplitude der ersten Querfeldharmonischen im Koordinatenanfangspunkt, d. i. auf der Grenzscheide beider Zonen:

$$(\hat{B}_1)_{x_1} = \frac{2\,H_k' - (H_k'')_{\frac{t}{2}} \left(3 - \mathfrak{Tg}\,\beta_1 x_2\, \mathfrak{Ctg}\,\beta_1 \frac{t}{2}\right)}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 x_1\, \mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\,\beta_1 x_2\, \mathfrak{Ctg}\,\beta_1 \frac{t}{2}} \cdot \frac{h}{n} f_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 46),\ 49)$$

$$= \frac{600 - 150\,(3 - 0{,}995 \cdot 1{,}285)}{1 \cdot 1{,}4 + 0{,}995 \cdot 1{,}285}$$

$$= 258.$$

Von hier aus sinkt das Querfeld gegen die Polmitte gemäß dem Gesetze der ersten Zone:

$$(\hat{B}_1')_x = (\hat{B}_1)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 (x_1 + x)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 x_1} \quad (x \text{ negativ})$$

bzw. für $\alpha x_1 \geqq 2$ bis 3:

$$(\hat{B}_1')_x \doteq (\hat{B}_1)_{x_1} e^{\alpha_1 x}.$$

Es beträgt also:

Für $x =$	$-\frac{t}{2}$	$-t$	$-3\frac{t}{2}$	$-2t$
$(\hat{B}_1')_x =$	104	43	17	7

Drehen wir dagegen den Nutenkranz eine halbe Nutteilung vorwärts, bis eine Nut unter der Mitte des Trapezschenkels steht, so erreicht hier die Querfeldamplitude ihr Maximum:

$$(\hat{B}_1'')_m = H_k' \frac{h}{n} \cdot \frac{2 f_p}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2} + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 50)$$

$$= 300 \cdot \frac{6{,}0}{2{,}4} \cdot \frac{2 \cdot 0{,}84}{1{,}0 \cdot 1{,}4 + 1}$$

$$= 507.$$

Abgesehen davon, daß dieser Wert uns sofort die Gefährlichkeit oder Harmlosigkeit des Nutenquerfeldes enthüllt, bedürfen wir seiner zur Bestimmung einer wichtigen Rechnungsgröße

$$B_0 f_1 = \frac{(\hat{B}_1)_m - (\hat{B}_1)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 t}{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 x_2} - H_k' \frac{h}{n} f_1 \frac{\mathfrak{Sin}^2 \beta_1 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 x_1}}{1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 \frac{t}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 52)$$

$$= \frac{507 - 258 \frac{4{,}65}{11{,}34} - 300 \frac{6}{2{,}4} 0{,}811 \frac{1{,}235^2}{11{,}34}}{1 - \frac{1}{1{,}59}}$$

$$= 897.$$

Mit Hilfe dieser Konstanten läßt sich nämlich auch die Leitkurve der zweiten Zone ausdrücken. Wir finden:

$$(\hat{B}_1'')_x = B_0 f_1 - [B_0 f_1 - (\hat{B}_1)_{x_1}] \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 x_2} - \left(2 B_0 f - H_k' \frac{h}{n} f_1\right) \mathfrak{Sin}\,\beta_1 \frac{t}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_1 x}{\mathfrak{Cof}\,\beta_1 x_2} \quad 51)$$

$$= 897 - 56{,}4\, \mathfrak{Cof}\,\beta_1 (x_2 - x) - 129\, \mathfrak{Sin}\,\beta x.$$

Und speziell

Für $x =$	$\frac{t}{4}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{3}{4} t$	t	$\frac{5}{4} t$
$(\hat{B}_1'')_x =$	445	507	463	298	— 30

Abb. 19c) vereinigt alle gewonnenen Resultate. Sie war nicht schwieriger zu berechnen als Abb. 25a des vorigen Beispiels und zeigt auch durchaus dasselbe Gepräge.

d) Folgerungen.

Um zu entscheiden, ob eine elektrische Maschine durch ein zu starkes Nutenquerfeld gefährdet ist, genügen häufig schon wenige Stichproben. Auch lassen die mitgeteilten Zahlenbeispiele erkennen, wo und wie diese anzustellen sind, und soll ich mich trotzdem darüber verbreiten, so werden hie und da Wiederholungen unvermeidlich sein. Auf der anderen Seite weiß ich jedoch, daß gerade in derartigen Schlußfolgerungen sich für die Praxis das Wichtigste einer ganzen Theorie kristallisiert, und so kann ich nicht umhin, sie wenigstens der Reihe nach aufzuzählen:

1. Das Maximum des Nutenquerfeldes liegt ungefähr unter Mitte M des Trapezschenkels im H_k-Diagramm und etwa unter der Ecke E des Trapezes, durch das man die Welle der Luftverteilung ersetzen kann (Abb. 22).



2. Dieses Maximum kann niemals größer werden als der ideelle Grenzwert:

$$B_{q\,max} = (\Delta H_k'')_{max} \frac{y}{n},$$

denn so groß wäre das Nutenquerfeld zu erwarten, wenn die Feldstärke der benachbarten Zähne zwischen Wurzel und Krone dieselbe Differenz $(\Delta H_k'')_{max}$ aufwiese, und diese Differenz nach Maßgabe der H_k-Kurve zugleich die größte überhaupt mögliche Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zähnen darstellte.

3. In Wirklichkeit entlastet jedoch das Nutenquerfeld den linken Zahn unterhalb der Zahnkrone, während es den rechten belastet. Darum bleibt das wirkliche Nutenquerfeld um so tiefer unter jenem Grenzwert, je mehr die Entlastung oder Belastung die Zahnfeldstärke verringert bzw. erhöht, d. h. je stärker die Zähne gesättigt sind.

4. Liegt nie mehr als eine Zahnmittellinie unter dem Trapezschenkel des H_k-Diagramms, so stimmt $(\Delta H_k'')_{max}$ mit der Zahnfeldstärke H_k' unter dem konstanten Luftspalt überein. Dies ist weitaus der häufigste Fall, und hierfür berücksichtigt man die eigenartige Wechselwirkung zwischen Zahn- und Nutfeldstärke durch die erweiterte Formel:

$$B_{q\,max} = H_k' \frac{y}{n} \cdot \frac{2}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2} + 1}.$$

Nur bei außerordentlich feinen Nutteilungen oder bei verteilter Erregerwicklung wird $(\Delta H_k'')_{max} < H_k'$, nämlich nur dann, wenn mehr als ein Zahn unter dem Abfall der H_k-Kurve Platz findet. In diesem Falle ist genau genug:

$$B_{q\,max} = (\Delta H_k'')_{max} \frac{y}{n} - e^{-\beta_1 \frac{x_2}{2}} \left[(\Delta H_k'')_{max} - 2 H''_{k\,x_2} \mathfrak{Sin}\,\beta_1 \frac{t}{2} - (\hat{B}_1)_{x_1} \frac{n}{h f_1} \right] \frac{y}{n} \cdot \qquad 61)$$

5. Hohe Werte des Nutenquerfeldes hat man demnach zu befürchten:

a) bei zu hoch gesättigten Zähnen (H_k');

b) bei zu tiefen Nuten (h);

c) bei zu breiten Zähnen und entsprechend schmalen Nuten (n);

d) bei einer Wellenform des Luftspaltfeldes, die gegen die neutrale Zone zu steil abfällt $(\Delta H_k'')_{max}$.

Ein Irrtum, vor dem man sich hüten muß, ist der, daß man durch besonders feine Nutteilungen etwas bessern zu können glaubt. Diese sind im Gegenteil eher gefährlich, da sie stets die Nutweite n und nur in seltenen Fällen auch die maximale Differenz der Feldstärke zwischen zwei benachbarten Zahnkronen $(\Delta H'')_{max}$ verringern. So würde z. B. der behandelte Synchrongenerator mit 15 gleich tiefen Nuten an Stelle der ursprünglichen 9 Nuten folgenden Vergleich liefern:

Nuten	t	n	z_{min}	$x_{2\,max}$	$\mathfrak{Ctg}\,\alpha_1 \frac{t}{2}$	$\Delta H''_{k\,max}$	$(B_{q\,max})_{y=h}$ Formel 5a)
15	5,5 cm	2,4 cm	3,1 cm	$3\frac{t}{2}$	1,4	$= H_k' = 300$	625
9	3,3 cm	1,44 „	1,86 „	$3\frac{t}{2}$	1,82	$= H_k' = 300$	890

Das einfachste Mittel, das Nutenquerfeld trotz hoher Ausnützung der Maschine klein zu halten, ist jedenfalls eine allmähliche Erweiterung des Luftspaltes unter den Polschuhkanten. Denn dadurch werden von vornherein zu große Differenzen von H_k'' vermieden. Dagegen wird durch die Schrägstellung der Polschuhe zwar der Mittelwert

des Nutenquerfeldes über die Ankerlänge vermindert; auf die Wirbelstromverluste wirkt das jedoch nur bei besonderen Leiterformen zurück, auf die ich erst in einem späteren Aufsatze eingehen kann.

2. Zusätze und Erweiterungen.

Die Ausführungen des letzten Abschnittes sind in drei Hinsichten unbefriedigend: Einmal geben sie nicht die „wirkliche" Veränderlichkeit des Querfeldes längs des Ankerumfanges wieder, — „wirklich" natürlich nur in dem Sinne, wie sie aus unseren Annahmen streng folgen müßte. Ferner sagen sie zu wenig über die Veränderlichkeit des Nutenquerfeldes zwischen Nutboden und Öffnung. Und endlich übergehen sie völlig die Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke zwischen Krone und Wurzel. In dieser Richtung wollen wir jetzt unsere Kenntnisse über das Maß des praktisch Notwendigen hinaus erweitern.

a) Kritik der Leitkurven des Nutenquerfeldes.

Daß die mitgeteilten Kurven lediglich Interpolationskurven sind, in welchen nur die mit doppelten Kreisen ausgezeichneten Punkte den zugrunde gelegten Annahmen streng genügen, das habe ich schon früher zu wiederholten Malen auseinandergesetzt. Es kommt einfach daher, daß die Konstanten dieser Interpolationskurven mit der Stellung des Nutenkranzes gegen die Pole wechseln, so daß sich in jeder Kurve nur eben die Querfeldstärken, die zu der zugrunde gelegten Stellung des Ankers gehören, streng mit unseren Annahmen vertragen. Trotzdem möchte ich behaupten, daß die mitgeteilten Interpolationskurven absolut richtiger sind als die analytisch genaueren Zick-Zack-Kurven der Theorie. Und diese Behauptung will ich jetzt an Hand unseres ersten zahlenbeispieles begründen.

Zahlenbeispiel: Gleichstrommotor für Walzwerke.

Im vorigen Abschnitt habe ich die Wahl des Koordinatensystems zusammen mit der Ankerstellung vorgeschrieben. Hebe ich jetzt diese Einschränkung auf, ohne jedoch die Bedeutung von x_1 und x_2 zu ändern, so ergeben sich gemäß Abb. 25b zwei Möglichkeiten

$$\text{I. Zwischen} \left\{\begin{array}{l} x_1 = b_1 - \frac{t}{2} \\ H''_{x_1} = 618 \\ H''_{x_2} = -183 \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} x_1 = b_2 - 3\frac{t}{2} \\ H''_{x_1} = 475 \\ H''_{x_2} = -317 \end{array}\right\} \text{ ist: } x_2 = 5\frac{t}{2}.$$

$$\text{II. Zwischen} \left\{\begin{array}{l} x_1 = b - 3\frac{t}{2} \\ H''_{\frac{t}{2}} = 317 \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} x_1 = b_1 + \frac{t}{2} \\ H''_{\frac{t}{2}} = 133 \end{array}\right\} \text{ ist: } x_2 = 3\frac{t}{2}.$$

In beiden Zonen ändern sich sämtliche Querfeldstärken linear mit der Verdrehung des Ankers, wenn wir — was nicht ganz richtig ist — der scheinbaren Permeabilität μ'' stets denselben Wert lassen. Es genügt dann, die Amplituden der einzelnen Querfeldharmonischen nur für die angeführten Grenzlagen des Ankers zu berechen. Dabei ergibt sich:



I. Für $x_2 = 5\frac{t}{2}$	1. Zone: $(\hat{B}_1)'_x = (\hat{B}_1)_{x1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 (x_1 + x)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 x_1}$					Gl. 57)	2. Zone Gl. 59)	
1. Nutenfeldharmonische	$(\hat{B}'_1)_{-5t}$	$(\hat{B}'_1)_{-4t}$	$(\hat{B}'_1)_{-3t}$	$(\hat{B}'_1)_{-2t}$	$(\hat{B}'_1)_{-t}$	$(\hat{B}_1)_{x1}$	$(\hat{B}_1'')_t$	$(\hat{B}_1'')_{2t}$
zu $x_1 = b_1 - \frac{t}{2}$	—	10	25	47	134	315	900	825
„ $x_1 = b_2 - 3\frac{t}{2}$	—	18	42	96	227	534	855	460
II. Für $x_2 = 3\frac{t}{2}$	1. Zone: $(\hat{B}_1)'_x = (\hat{B}_1)_{x1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 (x_1 + x)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1}$					Gl. 46)	2. Zone: Gl. 47)	
zu $x_1 = b_2 - 3\frac{t}{2}$	9	21	49	113	265	627	1092	—
„ $x_1 = b_1 + \frac{t}{2}$	12	27	65	150	353	830	737	—

Wenn man nach diesen Resultaten die Kurve der Querfeldamplitude längs des Ankerumfanges aufzeichnet, so erhält man den pro Nutteilung doppelt gebrochenen Linienzug der Abb. 25c. Denn jedesmal, wenn eine Zahnmitte eine Kante der Trapezkurve passiert, müssen wir nach unseren Annahmen einen sprunghaften Wechsel der scheinbaren Permeabilität zulassen: μ' springt auf μ'' über, und etwas später μ'' auf $\mu''' = \infty$. So sind also die Zacken der Kurve nur gewissermaßen Symbole für den Einfluß der auf engen Raume schnell wechselnden Permeabilität. Aber sie übertreiben diesen Einfluß, gerade so wie die Trapezfeldkurve die Plötzlichkeit des Feldabfalles übertrieben hat. Die wirkliche Kurve würde die Zacken höchstens ganz schwach andeuten, und da wir sie doch nicht genau berechnen können, so ist wohl richtiger, sie überhaupt zu vernachlässigen. Das ist es aber gerade, was die Interpolationskurve der Abb. 25a tatsächlich tut. Zugleich muß man anerkennen, daß sie unter allen möglichen Interpolationskurven besonders günstig gelegen ist. Denn wir haben den Zahnkranz gegenüber den Polen so eingestellt, daß die beiden Zähne unter dem Trapezschenkel dem störenden Einfluß der Trapezecken gleich weit entzogen sind. So zeigt denn auch der Vergleich der beiden Kurven in Abb. 25a und c, daß die Interpolationskurve nichts von dem Grundcharakter der Zick-zack-Kurve opfert, und nur deren Extravaganzen beseitigt.

b) Zur Verteilung des mittleren Querfeldes innerhalb der Nut.

Wir haben bisher nur die erste Harmonische der Fourierschen Reihe behandelt, die uns die Veränderlichkeit des Nutenquerfeldes zwischen Zahnkrone und Wurzel beschrieb. Aber ist das auch genug, oder verzerren die höheren Harmonischen die Grundform zu stark? Diese Frage wollen wir abermals an Hand unseres ersten Zahlenbeispieles entscheiden. Es ist dazu nur erforderlich dasselbe Verfahren, das uns seinerzeit die Interpolationskurve für die Grundwelle verschaffte, auch für die höheren Harmonischen anzuwenden. Die folgende Tabelle und die Kurven der Abb. 26a enthalten die Resultate dieser Untersuchungen.

Vergleich der Grundwelle und der höheren Querfeldharmonischen für die Ankerstellung nach Abb. 26.

	1. Zone			Grenznut	2. Zone	
x	— 3t	— 2t	— t	0	t	2t
$\hat{B}_1$	33	76	179	420	857	588
$\hat{B}_3$	0,06	0,53	4,65	41	126	46
$\hat{B}_5$	0,001	0,03	0,65	13,8	54,7	14,9
$\hat{B}_7$	0,00007	0,004	0,17	6,8	28,6	6,8



Darnach sind die höhern Harmonischen im ganzen Bereiche gegen die Grundwelle klein, ja, wenn man die zwei ersten Nutteilungen rechts vom Koordinaten-Anfangspunkt ausnimmt, so sinkt ihre Amplitude mit der Ordnungszahl sogar mehr als quadratisch, d. h.:

$$\widehat{B}_p < \frac{\widehat{B}_1}{p^2}.$$

In der ersten Zone ist daher die Querfeldteilung zwischen Nutboden und Öffnung einer Sinuswelle tatsächlich sehr ähnlich. Darauf kommt ganz in der Nähe des Koordinaten-Anfangspunktes eine Stellung, in der das Nutenfeld gemäß

$$\widehat{B}_p \doteq \frac{\widehat{B}_1}{p^2}$$

etwa linear ansteigt; und geht man noch weiter, so werden die höheren Harmonischen sogar etwas größer,

$$\widehat{B}_p'' > \frac{\widehat{B}_1}{p^2},$$

und der Anstieg des Nutenquerfeldes vom Grunde zeigt die umgekehrte Krümmung

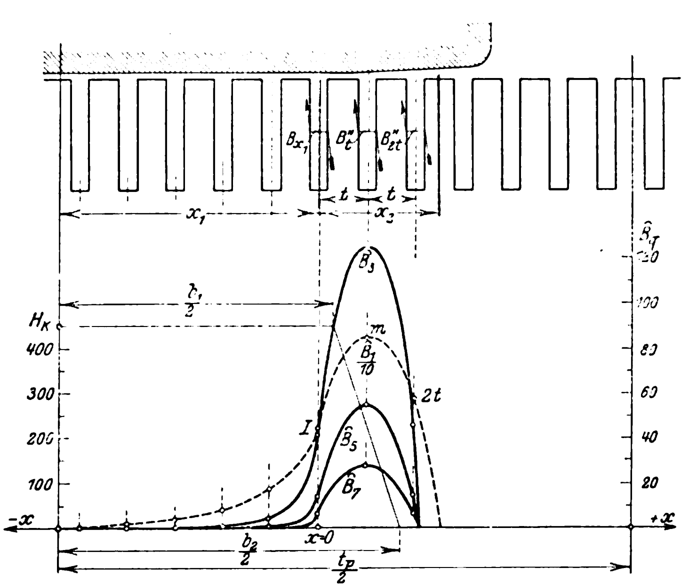


Abb. 26a. Grundwelle und höhere Harmonische des Nutenquerfeldes.

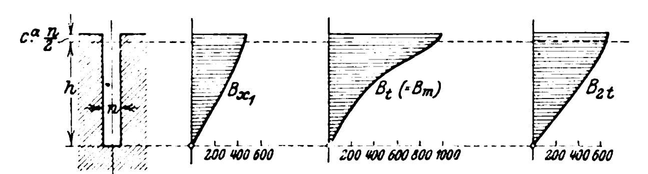


Abb. 26b. Verteilung des Querfeldes einer Nut.

wie eine Sinuslinie. Schon in der Nähe von $x = 2t$ hat sich aber das Nutenquerfeld wieder auf eine ungefähr lineare Verteilung zurückgezogen, und darüber hinaus sinken die höheren Harmonischen so schnell, daß sehr bald nur noch die Grundwelle übrigbleibt. Ich habe diese Verhältnisse ebenfalls durch Abb. 26b — wenn auch nicht mathematisch genau — zu illustrieren versucht. Vielleicht darf ich daran erinnern, daß bei halbgeschlossenen Nuten mit beträchtlichen Werten des oberen Nutraumes k die höheren Harmonischen noch mehr zurücktreten (vgl. Seite 179).

Ist aber der Einfluß der höheren Harmonischen schon auf die radiale Verteilung des Nutenquerfeldes nicht sehr erheblich, so scheidet er praktisch vollkommen aus, sowie es sich um die Berechnung der Wirbelstromverluste in den eingebetteten Nutleitern handelt. Hat man es doch bei Stabwicklungen fast immer mit zwei Lagen zu tun, bei denen nicht die Verteilung des Feldes, sondern hauptsächlich sein Mittelwert über der oberen Stabhälfte maßgebend ist. Und hierfür liefern die höheren Harmonischen Beiträge, die im Verhältnis ihrer Amplitude und ihrer Ordnungszahl kleiner sind als die Beiträge der ersten:

$$(B_{p\,\mathrm{mitt}})_{y=\frac{h}{2}}^{y=h} = (B_{1\,\mathrm{mitt}})_{y=\frac{h}{2}}^{y=h} \cdot \frac{\widehat{B}_1}{p\widehat{B}_1}.$$

Beträgt also schon die dritte Harmonische durchschnittlich nicht mehr als ein Neuntel der Grundwelle, so ist ihr Beitrag zum Mittelwerte der oberen Feldhälfte nur auf $\frac{1}{27}$, der der fünften Harmonischen sogar nur auf $\frac{1}{125}$ von dem der Grundwelle zu ver-

anschlagen (vgl. Abb. 27). Das gibt uns in der Tat das Recht, bei praktischen Anwendungen der Theorie nur mit der Grundwelle zu rechnen, wie ich das im vorigen Abschnitt auch schon stillschweigend getan habe.

e) Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke zwischen Wurzel und Krone.

Wenngleich der Praktiker der Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke zwischen Wurzel und Krone wohl niemals nachgehen wird, so entbehrt sie doch nicht allen Interesses. So wird man z. B. bei genauen Untersuchungen über die Magnetisierungsverluste in hoch gesättigten Zähnen nicht gut umhin können, auch diesem Punkte einige Beachtung zu schenken. Für die Einfügung dieses Abschnittes sprach aber noch ein anderer Grund: Wir hatten ursprünglich die Konstante μ nur entsprechend der Zahnsättigung an der Krone gewählt und uns mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke eine Korrektur vorbehalten. So empfiehlt es sich, gleichsam zur Abrundung der Theorie, auch die Sättigungsverhältnisse wenigstens an einem praktischen Beispiel darzustellen. Dazu wähle ich wiederum unseren Gleichstrom-Walzwerksmotor, beschränke mich aber in Anbetracht der geringen Bedeutung der Untersuchung auf die Grundwelle ($p_1 = 1$) und die Interpolationskurve der Zahnfeldstärke längs des Ankerumfanges (Abb. 25a).

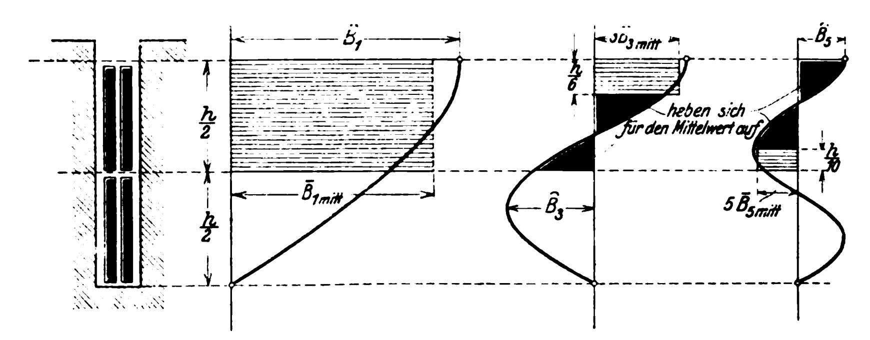


Abb. 27. Beitrag der höheren Harmonischen zum Querfeldmittelwert in der oberen Nuthälfte.

Unter dieser Voraussetzung würde die Feldstärke von der Zahnkrone gegen die Wurzel nach einer Sinuswelle entweder abnehmen oder ansteigen; Abnehmen, wenn das Feld der rechten Nut das der linken übertrifft, zunehmen im umgekehrten Falle. Sollten also irgend zwei um eine Polteilung abstehende Nuten — wie z. B. näherungsweise die Nuten 1 und 2t in Abb. 25a — gleiche Feldstärken besitzen, so würde der Fluß des eingeschlossenen Zahnes zwischen Krone und Wurzel unverändert bleiben. Ein solcher Punkt existiert etwa in der Mitte der zweiten Zone, und das rechtfertigt unsere Maßnahme, nach der wir μ'' einfach entsprechend den Sättigungen in den Zahnkronen wählten. Dagegen nimmt in der ganzen ersten Zone die Zahnfeldstärke nach der Wurzel zu ab, am stärksten für den Zahn im Koordinaten-Anfangspunkt. Hier ist nach Gl. 27) unter Vernachlässigung der höheren Harmonischen

$$(H_0')_{x_1} = H_k' - \sqrt{\frac{n}{z\mu' + n}}\,(\hat{B}_1)_{x_1} = 450 - 0{,}3 \cdot 420 = 325.$$

Das ist immer noch ungefähr $70\,\%$ der maximalen Feldstärke, und daraus folgt, daß man in der Tat keinen großen Fehler begehen kann, wenn man μ' direkt nach Maßgabe der Tangente an die Sättigungskurve wählt:

$$\mu' \doteq \left(\frac{d\,B'_{zk}}{d\,H'_{zk}}\right) = \operatorname{tg}\delta' \qquad \text{(siehe Abb. 21).}$$

IV. Die Lösung für verjüngte Zähne $\left(\frac{dz}{dy} = \text{konst.}\right)$.

1. Voruntersuchungen.

Die Berechnung des Nutenquerfeldes zwischen sich verjüngenden Zähnen ist nur in zwei Punkten von dem Verfahren für gerade Zähne verschieden: Einmal reichen die einfachen Sinuswellen, durch die wir bei unendlichem Ankerdurchmesser die Querfeldverteilung darstellen konnten, für den jetzt zu behandelnden allgemeineren Fall nicht mehr aus. An ihre Stelle treten ähnliche Funktionen, die dem Techniker zwar weniger geläufig sind, sich aber glücklicherweise durch einfache Näherungsformeln ausdrücken lassen: das sind die „Besselschen" oder „Zylinderfunktionen der ersten und zweiten Art".

Zum zweiten bedingt die Veränderlichkeit des Zahnquerschnittes eine außerordentlich große Variation der Zahnpermeabilität, weit größer als die, welche wir bei geraden Zähnen zu berücksichtigen hatten. Obendrein kann diese Veränderlichkeit in verschiedener Richtung erfolgen. Bei Gleichstromankern ist die Zahnwurzel der Sitz der höchsten Eisensättigungen, während bei Synchronmaschinen mit Innenpolen umgekehrt der Zahnsteg gleich unterhalb der Zahnkrone am höchsten beansprucht wird.

Beide Unterschiede sind indes nicht so einschneidend, daß sie sich nicht durch formelle Änderungen berücksichtigen ließen. Der Aufbau der Theorie braucht deshalb nicht umgestaltet zu werden, und darum werde ich auch den rein analytischen Teil dieses Abschnittes verhältnismäßig schnell erledigen können.

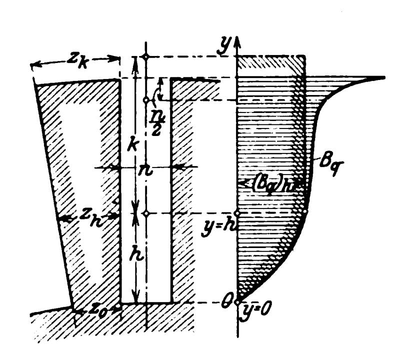


Abb. 28. Verteilung des Nutenquerfeldes bei Außenpolmaschinen.

Versuchen wir zuerst, uns über die Berücksichtigung der veränderlichen Permeabilität schlüssig zu werden. — Die Verhältnisse liegen nicht einfach, und ich werde am besten verstanden werden, wenn ich die Ergebnisse eines Experimentes vorausschicke: Mißt man bei einem Gleichstromanker die Verteilung des mittleren Querfeldes und trägt sich die erhaltenen Werte über der Ordinate y auf, so erhält man bei stark verjüngten Zähnen eine Kurve nach Abb. 28. Im Nutengrunde steil ansteigend, erreicht sie alsbald in einer Tiefe $y = h$ einen Wert $(B_q)_h$, den sie im weiteren Verlaufe fast unverändert beibehält. Erst hart an der Nutöffnung setzt wieder ein steiler Anstieg ein. —

Demgemäß zerfällt das Querfeld organisch in drei Abschnitte. Zuerst der Anstieg des Feldes von 0 bis h, der offenbar nur so lange dauern kann, als die Unterschiede zwischen der Zahnfeldstärke benachbarter Zähne in gleicher Höhe y noch nennenswert sind. Das hört aber unterhalb des Knies der magnetischen Charakteristik auf. Hier betritt man daher ein Gebiet, in dem die Zunahme des Querfeldes als unerheblich vernachlässigt werden kann, und man verläßt es wieder im ungefähren Abstand $\frac{n}{2}$ von der Nutöffnung, wo die Konzentration der Kraftlinien an der Zahnkrone auch das mittlere Querfeld in die Höhe treibt.

Uns kommt es vor allem auf den unteren Abschnitt an; denn kennen wir diesen und den Endwert $(B_q)_h$, dann wissen wir alles, was uns zu wissen not tut. Darüber hinaus denken wir uns einfach die Nut mit gleicher Breite um eine solche Länge k fortgesetzt, daß der wirkliche Querfluß des zweiten und dritten Abschnittes pro cm Nutlänge gleich

$$B_{qh} \cdot k$$

gesetzt werden kann. Fragt sich nur: Bis wohin zählt die reduzierte Höhe h, und wie tragen wir in diesem Bereich der Veränderlichkeit der Permeabilität Rechnung?

Auf die letzte Frage gibt es nur eine Antwort, wenn anders wir nicht die ganze Anlage der Theorie umstoßen wollen: Wir müssen die magnetische Charakteristik des Ankereisens zwischen ihrem Knie und der höchsten in Betracht kommenden Sättigung durch eine Gerade interpolieren. Wozu das weiter führt, zeige ich am besten gleich an einem Beispiel, das uns auch weiterhin zur Illustration der Theorie dienen möge: Ein Gleichstromanker nach Abb. 29a arbeite mit einem Luftspaltfeld, das in den Zahnkronen die aus Abb. 29b abzulesenden Induktionen B_{zk} hervorbringt. Im Gebiete des konstanten Luftspaltes ist demnach:

$$B'_{zk} = 15\,300$$

und

$$\frac{N_t'}{cm} = B'_{zk} \cdot z_{ek} = 15\,300 \cdot 1{,}5 = 23\,000\,.$$

Da sich aber die Zähne im Verhältnis

$$\frac{z_k}{z_0} = \frac{1{,}63}{1{,}1},$$

bzw.

$$\frac{z_{ek}}{z_{e_0}} = \frac{1{,}50}{1{,}01}$$

verjüngen, so verdichtet sich der Zahnfluß gegen die Wurzel erheblich, besonders unter der Polmitte, wo er durch das Querfeld der benachbarten Nuten so gut wie gar nicht entlastet wird. Hier steigt die Zahninduktion bis auf:

Abb. 29a. Blechschnitt eines Gleichstromankers.

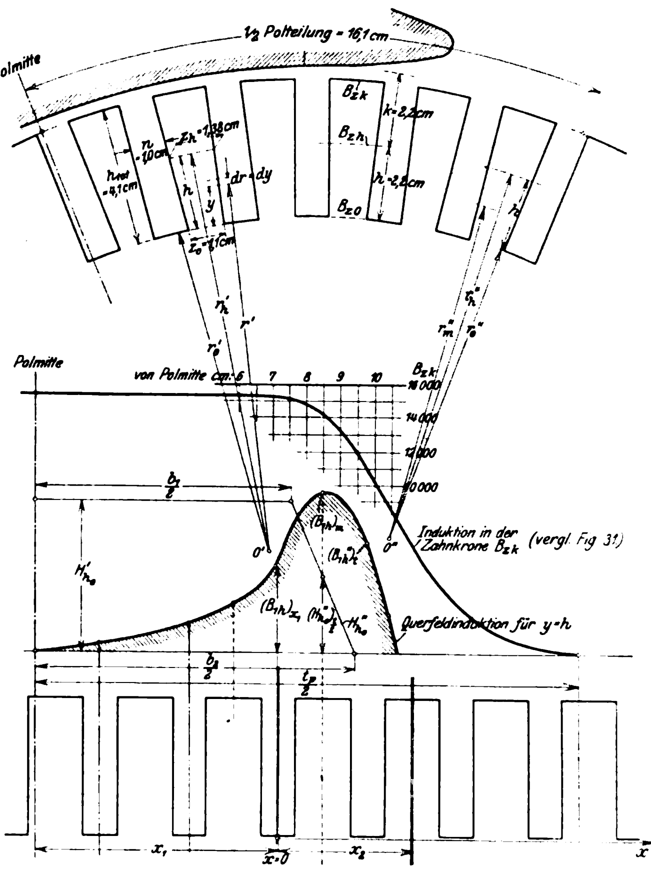


Abb. 29b. Interpolationskurve der Grundwelle des Nutenquerfeldes.

$$B'_{z_0} = 23\,000\,,$$

wozu noch innerhalb der Nut ein starker Radialfluß von der Induktion

$$B'_{r_0} = H'_{z_0}$$

parallel geschaltet erscheint.

Es ist ein gewagter Schritt — aber unveröffentlichte Experimente lassen ihn berechtigt erscheinen —, wenn wir die magnetische Charakteristik in einem so weiten Bereiche, wie es Abb. 30 zeigt, durch eine einzige Gerade interpolieren. Im vorliegenden Falle ist ihre Neigung:

$$\mu' = \text{Mittel}\left(\frac{dB_z'}{dH_z'}\right) = \operatorname{tg}\delta' = 6{,}15\,,$$

und damit ist die erste Unbestimmtheit behoben[1]).

[1]) Solange nicht einwandfreie Experimente veröffentlicht sind, möchte ich genauere Vorschriften über die Lage der Interpolationsgeraden nicht geben. Denn gerade hier bietet sich Gelegenheit, durch Festlegung empirischer Daten die Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis zu einer vollkommenen zu machen.

Solange wir der Zahnfeldstärke die Induktion nach Maßgabe dieser Interpolationsgeraden zuordnen können, bewegen wir uns im untersten Abschnitt des Nutenquerfeldes. Daher verfügen wir mit dem Neigungswinkel der Geraden mehr oder minder auch schon über die reduzierte Nuttiefe h. In unserem Zahlenbeispiel habe ich unter der Polmitte die Werte

$$H'_{zh} = 100, \quad B'_{zh} = 18\,000$$

als untere Grenze gewählt. Denn dabei ist H'_{zh} einerseits gegen die obere Grenze

$$H'_{z_0} = 750, \quad B'_{z_0} = 22\,000$$

noch immer so klein, daß man für $y > h$ die Differenzen in der Feldstärke benachbarter Zähne vernachlässigen kann. Und andererseits wollte ich H'_{zh} auch nicht gerne kleiner annehmen. Denn infolge der entlastenden Wirkung des Nutenquerfeldes sinkt dieser Grenzwert von der Polmitte gegen die Polkanten. Wir bewegen uns also auf der Inter-

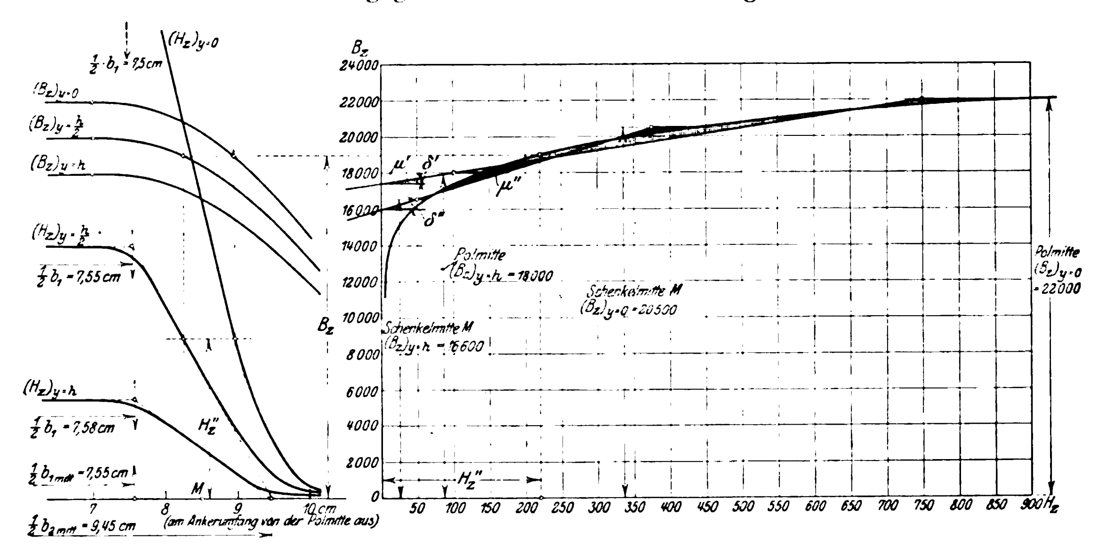


Abb. 31. Konstruktion der H_z-Kurven für verschiedene Nuttiefen y unter Zugrundelegung der Kurve $B_z = f(x)$ der Abb. 29 und der wirklichen Zahncharakteristik nach Abb. 30.

Abb. 30. Magnetische Charakteristik der Ankerzähne und ihre Interpolation durch Gerade.

polationsgeraden noch näher zur Ordinatenachse hin, und wenn möglich sollen doch im ganzen Bereiche des konstanten Luftspaltes für H'_{zh} positive Werte erhalten werden. Läßt man sich aber diese Festsetzung gefallen, dann ist auch die Ordinate h nunmehr eindeutig bestimmt. Denn zunächst muß gelten:

$$\frac{N_t'}{\text{cm}} = 23\,000 = H'_{zh} n + B'_{zh} z_{he}.$$

Daraus folgt dann:

$$z_{eh} = \frac{\frac{N_t'}{\text{cm}} - H'_{zh} n}{B'_{zh}} = 1,27$$

bzw.

$$z_h = \frac{1,27}{0,92} = 1,38 \text{ cm}$$

und dazu gehört wieder:

$$h = 2,17 \doteq 2,2 \text{ cm}$$

und

$$k \doteq 1,15\,(h_{tot} - h) = 1,15\,(4,1 - 2,2) = 2,2 \text{ cm}.$$

Bisher erstreckten sich unsere Untersuchungen nur auf die erste Zone des Nutenquerfeldes, also überschläglich gesprochen denjenigen Polbogen, unter dem das Luftspaltfeld eine konstante mittlere Höhe besitzt. Auch die Bestimmung der reduzierten Nuttiefe h fußte lediglich auf den magnetischen Verhältnissen der ersten Zone. Da wir sie aber in der Folge natürlich auch für die zweite Zone übernehmen müssen, so kann es nicht ausbleiben, daß h auch hier für die Interpolation der Sättigungskurve eine wichtige Rolle spielt.

Von vornherein erscheint der Begriff der zweiten Zone vielleicht nicht mehr so eindeutig bestimmt wie bei geraden Zähnen. Dort konstruieren wir einfach zur Kurve der Zahninduktionen B_z längs des Ankerumfanges die Schwesterkurve der Zahnfeldkurve H_z und ersetzen sie durch ein Trapez. Wo dann eine Ankernut zur Linken von einem Zahn unter der kleinen Trapezseite b_1, zur Rechten von einem Zahn unter dem Trapezschenkel begrenzt wurde, da ließen wir die erste Zone endigen (x_1), und das Gebiet darüber hinaus bis zum ersten Zahn außerhalb der großen Trapezseite b_2 umfaßten wir mit dem Begriff der zweiten Zone (x_2), — Soweit könnten wir alles Wort für Wort auch für schräge Zähne gelten lassen. Aber während es bei geraden Zähnen nichts ausmachte, in welcher Nuttiefe y wir die Zahnfeldstärken und Induktionen bestimmten — immer vorausgesetzt, daß wir das Nutenquerfeld vernachlässigen —, liefert nun jeder neue Wert von y ein neues Kurvenpaar. Welcher von all diesen Möglichkeiten sollen wir jetzt bei der Festlegung der Trapezseiten den Vorzug geben? — Abb. 31 beantwortet diese Frage an Hand unseres Zahlenbeispieles in überraschend einfacher Weise: Sie zeigt drei Kurvenpaare

$$\text{für } y = 0, \quad y = \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad y = h,$$

und alle diese Kurven gehören praktisch zu denselben Trapezseiten:

$$b_1 = 15{,}1 \text{ cm} \quad \text{und} \quad b_2 = 18{,}9 \text{ cm}.$$

Es ist also auch bei verjüngten Zähnen gleichgültig, wo wir mit unserer Konstruktion den Hebel ansetzen, solange wir uns nur in den Grenzen der reduzierten Nuttiefe halten.

Nachdem wir die Grenzen der zweiten Zone bestimmt haben, müssen wir auch hier die magnetische Charakteristik durch eine Gerade ersetzen. Dabei kommt uns zustatten, daß unter den schlmaen Trapezschenkeln gewöhnlich nur eine einzige Zahnmittellinie liegt. Denken wir uns diesen Zahn gerade unter der Schenkelmitte M (Abb. 29, 30, 31), so wird er obendrein durch das Nutenquerfeld fast gar nicht entlastet, da die Querströmungen in den benachbarten Nuten etwa gleich stark sind. Wir können also die **mittleren** Sättigungsgrenzen für die zweite Zone sofort angeben: Der bezeichnete Zahn wird

$$\text{von } H''_{z_0} = \frac{H'_{z_0}}{2} \text{ an der Zahnwurzel}$$

$$\text{bis } H''_{zh} = \frac{H'_{zh}}{2} \text{ am Ende des unteren Nutabschnittes}$$

beansprucht. Darnach legen wir die Interpolationsgerade wie in Abb. 30 nnd erhalten:

$$H''_{z_0} = 375 \quad \text{bzw.} \quad H''_{zh} = 50$$

$$B''_{z_0} = 20\,500 \qquad B''_{zh} = 16\,600$$

und

$$\mu'' = \frac{B''_{z_0} - B''_{zh}}{H''_{z_0} - H_{zh}} = 12.$$

Wenngleich sich die mitgeteilten Untersuchungen zunächst nur auf Anker von Außenpolmaschinen bezogen, so lassen sie sich doch ungezwungen auch für Innenpol-



maschinen fruchtbar machen. Hier ist allerdings die obere Grenze der reduzierten Nuttiefe ohne weiteres bekannt. Wir können sie wieder wie bei geraden Zähnen um $\frac{n}{2}$ unter der Nutöffnung annehmen. Dafür müssen wir aber sehr häufig einen Abschnitt an der Zahnwurzel eliminieren. Denn wir dürfen die reduzierte Nuttiefe wiederum nicht weiter rechnen, als wir die Zahnfeldstärken und Induktionen noch nach Maßgabe

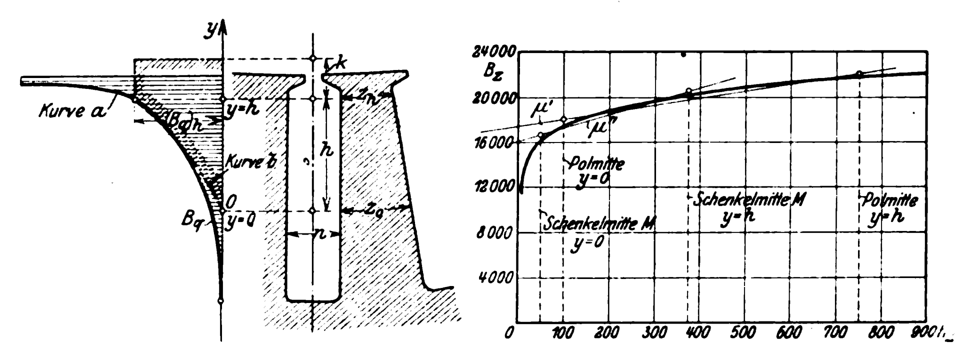


Abb. 32. Reduzierte Nuttiefe und Interpolationsgerade bei Innenpolmaschinen.

der Interpolationsgeraden einander zuordnen können. Mit anderen Worten: Der Zahn einer Innenpolmaschine besitzt dieselbe reduzierte Höhe h, die gleiche scheinbare Permeabilität μ' bzw. μ'' und dieselben Zonen x_1 bzw. x_2 wie die gleich verjüngten Zähne einer Außenpolmaschine. Der einzige Unterschied ist, daß die Grenzen $y = 0$ und $y = h$ ihre Bedeutung tauschen (Abb. 32). Auch muß man es sich gefallen lassen, daß auf diese Weise die wirkliche Feldverteilung nach Kurve a durch das ein wenig verstümmelte Bild der Kurve b ersetzt wird.

2. Einführung von Zylinderfunktionen.

Wer den Voruntersuchungen aufmerksam gefolgt ist und die Theorie der geraden Zähne beherrscht, der wird in den folgenden Rechnungen kaum nennenswerte Schwierigkeiten entdecken. — Die Differentialgleichungen haben wir bereits unter Berücksichtigung der Zahnverjüngung aufgestellt. Wir können sie jedoch durch eine Koordinatentransformation noch etwas vereinfachen. Dazu verlockt nämlich der Umstand, daß in den Differentialgleichungen 6) und 7) sowie 11) und 12) die Zahnbreite niemals als selbständige Variable, sondern stets in der Kombination

$$z_e \mu + n$$

auftritt. Diese Summe wächst proportional dem Abstand r von einem gewissen Krümmungsmittelpunkt o, den man als Schnitt zweier im Abstand $\frac{n}{\mu}$ zu den (reduzierten) Zahnflanken parallel gezogener Geraden erhält (Abb. 33). r hinwiederum schwankt zwischen

$$r_0 = \frac{z_{e_0} \mu + n}{\mu} \cdot \frac{dr}{dz_e} = \frac{z_{e_0} + \frac{n}{\mu}}{z_{eh} - z_{e_0}} \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

im Nutengrunde, und:

$$r_h = r_0 + h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

wobei das +-Zeichen der Außenpolmaschine, das —-Zeichen der Innenpolmaschine entspricht. Es wird sich später als praktisch erweisen, wenn wir dazwischen einen gewissen Mittelwert

$$r_m = \left(\frac{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_h}}{2}\right)^2 \div \frac{r_0 + r_h}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

bilden und die zugehörige effektive Zahnbreite z_{em} gemäß:

$$z_{em} = r_m \cdot \frac{d z_e}{d r} - \frac{n}{\mu} = (z_{eh} - z_{e_0}) \cdot \frac{r_m}{h} - \frac{n}{\mu} \div \frac{z_{e_0} + z_{eh}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 65)$$

berechnen. Dann ist für jeden anderen Querschnitt:

$$z_e \mu + n = (z_{em} \mu + n) \frac{r}{r_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 66)$$

und wir erhalten an Stelle der ursprünglichen Gleichungspaare 6) und 7) bzw. 11) und 12) zwei neue einfachere Systeme:

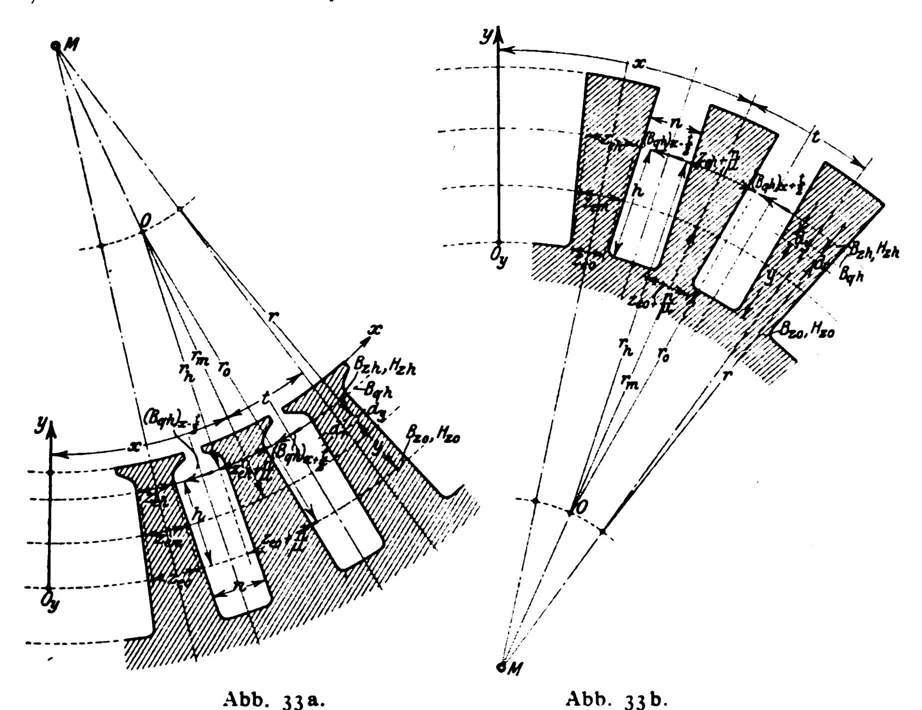


Abb. 33a. Abb. 33b.

Koordinatentransformation bei Innen- und Außenpolmaschinen.

An die Stelle der Grundgleichungen 6) und 7) tritt:

$$\pm (z_{em} \mu + n) \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{r_m} \cdot \frac{B_{zx}}{\mu} \right) = B_{q\left(x+\frac{t}{2}\right)} - B_{q\left(x-\frac{t}{2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 67^{1})$$

$$+ n \frac{dB_{qx}}{dr} = H_{z\left(x-\frac{t}{2}\right)} - H_{z\left(x+\frac{t}{2}\right)} \; . \; . \; . \; . \; \begin{matrix} + : \text{Außenpole} \\ - : \text{Innenpole} \end{matrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 68^{1})$$

an die Stelle der Endgleichungen 11) und 12):

$$n (z_{em} \mu + n) \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{r_m} \frac{dB_{qx}}{dr} \right) = 2 B_{qx} - \left[B_{q(x-t)} + B_{q(x+t)} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 69)$$

$$n (z_{em} \mu + n) \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{r}{r_m} \cdot H_z \right) = 2 H_{zx} - \left[H_{z(x-t)} + H_{z(x+t)} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 70)$$

Die Grenzbedingungen haben sich gegen früher nicht geändert: Unter der Polmitte verschwindet das Querfeld in beliebiger Nuttiefe, in anderen Lagen nur im Nutengrunde $y = 0$. — In der reduzierten Nuttiefe $y = h$ kann der Fluß einer Zahn-

[1]) In welcher Nuttiefe wir dabei x und t zählen, ist gleichgültig, solange wir nur alle Abszissen in der gleichen Tiefe messen.

teilung von der an der Zahnkrone eingetretenen Linienzahl schon wesentlich verschieden sein. Denn auf der rechten Seite empfängt ein Zahn mit der Abszisse x zwischen Krone und reduzierter Nuttiefe den Querfluß:

$$(B_{qh})_{x+\frac{t}{2}} \cdot k$$

um auf der linken Seite einen größeren oder kleineren Fluß

$$(B_{qh})_{x-\frac{t}{2}} \cdot k$$

auszusenden. Insgesamt ist daher:

$$\left(\frac{N_{tk}}{cm}\right)_x - \left(\frac{N_{th}}{cm}\right)_x = \left[(B_{qh})_{x+\frac{t}{2}} - (B_{qh})_{x-\frac{t}{2}}\right] \cdot k.$$

Wenn wir aber mit B_{zh_0} und H_{zh_0} diejenigen Werte ausdrücken, weche der Teilungsfluß ohne die entlastende Wirkung des Nutenquerfeldes in der reduzierten Nuttiefe h ausbilden müßte, so gilt auch:

$$\frac{N_{tk}}{cm} = B_{zh_0} z_{eh} + H_{zh_0} \cdot n$$

$$\frac{N_{th}}{cm} = B_{zh} z_e + H_{zh} \cdot n$$

und da:

$$\left(\frac{N_{tk}}{cm}\right)_x - \left(\frac{N_{th}}{cm}\right)_x = (z_{eh}\mu + n) \cdot (H_{zh_0} - H_{zh})$$

$$= (z_{em}\mu + n) \cdot (H_{zh_0} - H_{zh}) \cdot \frac{r_h}{r_m}$$

so lautet die Grenzbedingung für $y = h$ endgültig:

$$H_{zh} \frac{r_h}{r_m} = H_{zh_0} \frac{r_h}{r_m} - \left[(B_{qh})_{x+\frac{t}{2}} - (B_{qh})_{x-\frac{t}{2}}\right] \frac{k}{z_{em}\mu + n} \quad \ldots\ldots \quad 71)$$

Wenn wir die Gl. 67) bis 70) und die Grenzbedingung 71) mit den analogen Gl. 13) bis 15) bzw. 20) für gerade Zähne vergleichen, so sehen wir, daß der ganze Unterschied im Hinzutreten des Faktors $\frac{r}{r_m}$ besteht. Man wird daher mit Recht erwarten, daß sich diese weitgehende Analogie auch auf die Lösungen beider Probleme erstreckt. Das ist denn auch der Fall, und soweit tunlich, will ich das auch durch die Schreibweise zum Ausdruck bringen.

Wie bei geraden Zähnen ergibt sich die Verteilung des Nutenquerfeldes zwischen $y = 0$ und $y = h$ durch Übereinanderlagerung unendlich vieler Wellenzüge, deren Amplitude mit ihrer Ordnungszahl p abnimmt. Nur waren es bei geraden Zähnen einfache Sinuswellen, während wir jetzt Wellenzüge erhalten, die mit fortschreitender Ordinate r schwach gedämpft sind. An Stelle der Sinusfunktion tritt nämlich eine Zylinderfunktion, die für praktische Fälle mit

$$\eta r \geqq 15$$

außerordentlich ähnlich der Funktion

$$S_p(\sqrt{\eta_p r}) \doteq \sqrt[4]{\frac{r_m}{r}} \sin(\sqrt{\eta_p r} - \sqrt{\eta_p r_0}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

verläuft. Oder auch, wenn wir den Parameter η_p durch die Definitionsgleichung

$$\sqrt{\eta_p} = p \frac{\pi}{h} \sqrt{r_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

auf die Ordnungszahl p der Oberwellen zurückführen:

$$S_p(\sqrt{\eta_p r}) \doteq \sqrt[4]{\frac{r_m}{r}} \sin p \frac{\pi}{h} \sqrt{r_m} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}) \quad \text{. . . . . 72a)}$$

Nimmt man z. B. die Werte unseres Zahlenbeispieles (Abb. 29) für die erste Zone:

$r_0' = 9{,}8$ cm

$r_h' = 12{,}0$ „

und:

$r_m' = 10{,}85$ „

$p_1 = 0{,}56$

$p_2 = 2{,}14$

$p_3 = 4{,}10$

so erhält man die sinusförmigen Wellenzüge der Abb. 34.

Doch wie gesagt, mathematisch genau ist dieser Ersatz der Zylinderfunktionen durch gedämpfte Sinuswellen nicht. Strenggenommen wäre vielmehr:

$$S_p(\sqrt{\eta_p r}) = \pi \sqrt{p \frac{r_m}{2h}} Z_0 (\sqrt{\eta_p r}) \quad . \ 72b)[1]$$

Dabei müßte die Funktion $Z_0(\sqrt{\eta_p r})$ so aus Zylinderfunktionen der ersten Art

$$J_0(\sqrt{\eta_p r})$$

und Zylinderfunktionen der zweiten Art

$$N_0(\sqrt{\eta_p r})$$

zusammengesetzt werden, daß

$$Z_0(\sqrt{\eta_p r}) = a J_0(\sqrt{\eta_p r}) + b N_0(\sqrt{\eta_p r}) \quad 74)$$

für $r = r_0$ verschwindet.

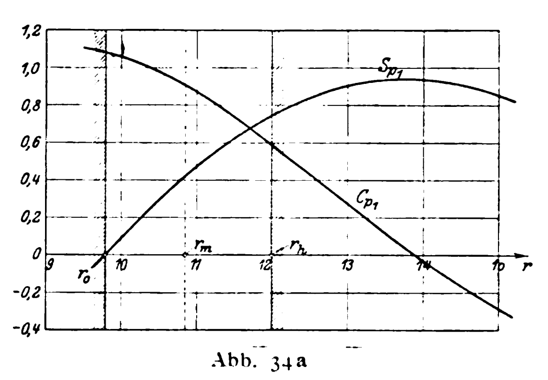


Abb. 34a

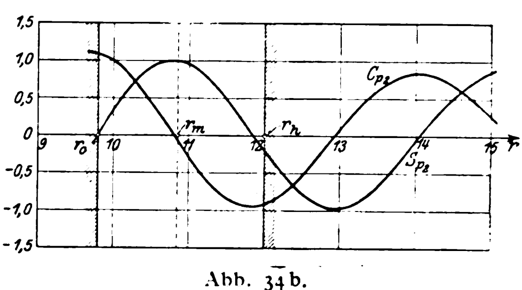


Abb. 34b.

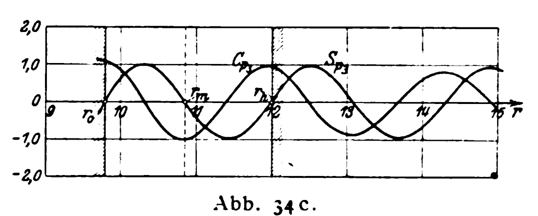


Abb. 34c.

Verlauf der Funktionen S_{p1}, S_{p2}, S_{p3} und C_{p1}, C_{p2}, C_{p3} für $r_0 = 9{,}8$ cm, $r_m = 10{,}85$ cm, $r_h = 12{,}0$ cm und $p_1 = 0{,}56$, $p_2 = 2{,}14$, $p_3 = 4{,}10$.

Wie die Zylinderfunktion $S_p(\sqrt{\eta r})$ ihrer Form nach einer Sinuswelle nahe verwandt ist, so liefert auch ihr erster Differentialquotient

$$\frac{dS_p(\sqrt{\eta_p r})}{dr} = p \frac{\pi}{2h} \cdot C_p(\sqrt{\eta_p r}) = -\left(p \frac{\pi}{2h} \sqrt{\frac{r_m}{r}}\right) \cdot \pi \sqrt{p \frac{r_m}{2h}} \cdot Z_1(\sqrt{\eta_p r}) \quad . \ . \ . \ 75b)$$

eine neue Funktion, die für $\eta_p \geqq 15$ außerordentlich ähnlich einer cos-Welle verläuft. In diesem Bereich ist nämlich:

$$C_p(\sqrt{\eta_p r}) \doteq \sqrt[4]{\left(\frac{r_m}{r}\right)^3} \cos(\sqrt{\eta_p r} - \sqrt{\eta_p r_0}) = \sqrt[4]{\left(\frac{r_m}{r}\right)^3} \cos\left[p \frac{\pi}{h} \sqrt{r_m} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0})\right] \quad . \ . \ 75)$$

Das entspricht vollkommen der Verwandlung des gewöhnlichen Sinus durch Differen-

[1]) Um mit Zylinderfunktionen der ersten und zweiten Art operieren zu können, genügt für den Ingenieur die Zusammenstellung der Definitionsgleichungen, Rechenregeln und Tabellen in Jahnkes und Emdes „Funktionentafeln“ (Teubner 1909). Da jedoch in der mathematischen Literatur nur die Funktionen Z_0 und Z_1, nicht aber die daraus abgeleiteten Funktionen S_p und C_p gebräuchlich sind, so teile ich die Differentiationsregeln für diese Funktionen noch besonders mit.

tieren in den Cosinus, und auch für die höheren Differentialquotienten bleibt diese Analogie erhalten. So ist:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r_m}\cdot\frac{dS_p}{dr}\right) = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 S_p \quad \text{entsprechend} \quad \frac{d^2 \sin\left(p\frac{\pi}{2h}y\right)}{dy^2} = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 \sin\left(p\frac{\pi}{2h}y\right) \qquad 76)$$

ähnlich:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r_m}\cdot C_p\right) = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right) S_p \quad \text{entsprechend} \quad \frac{d \cos\left(p\frac{\pi}{2h}y\right)}{dy} = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right) \sin\left(p\frac{\pi}{2h}y\right). \qquad 77)$$

sowie:

$$\frac{d^2}{dr}\left(\frac{r}{r_m}C_p\right) = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 C_p \quad \text{entsprechend} \quad \frac{d^2 \cos\left(p\frac{\pi}{2h}y\right)}{dy^2} = -\left(p\frac{\pi}{2h}\right)^2 \cos\left(p\frac{\pi}{2h}y\right) \qquad 78)$$

Damit haben wir alle Formeln gesammelt, deren man zur verständnisvollen Kontrolle der analytischen Theorie bedarf, und ich kann sogleich zur Ableitung und Diskussion der Lösung übergehen.

3. Die Formeln der ersten Zone.

Für gerade Zähne lauteten die Endgleichungen der ersten Zone zwischen $x = 0$ und $x = x_1$:

$$B_x' = \Sigma(\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x_1} \sin p\frac{\pi}{2h}y \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 23)$$

und:

$$H_x' = H_k' - \Sigma(\hat{H}_p) \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x_1} \cos p\frac{\pi}{2h}y \;\ldots\ldots\ldots\; 27)$$

wobei

$$\hat{H}_p = \sqrt{\frac{n}{z\mu' + n}}(\hat{B}_p)_{x_1}$$

erhalten würde.

Für verjüngte Zähne können wir den Ansatz der Querfeldinduktion sinngemäß übernehmen, schreiben also:

$$B_x' = \pm\Sigma(\hat{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x_1} S_p\left(\sqrt{\eta_p'}r'\right) \begin{Bmatrix} +: \text{Außenpolmaschine} \\ -: \text{Innenpolmaschine} \end{Bmatrix} \;\ldots\; 79)$$

Dagegen erweitert sich der Ansatz für die Zahnfeldstärke um ein sehr bedeutsames Glied: Es ist nämlich mit Rücksicht auf Gl. 67):

$$H_x' = H_{h_0}' \frac{r_h'}{r'} + \overline{H}'\left(\frac{r_h'}{r'} - 1\right) - \Sigma\hat{H}_p \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha_p x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha_p x_1} C_p\left(\sqrt{\eta_p'}r'\right) \;\ldots\ldots\; 80)$$

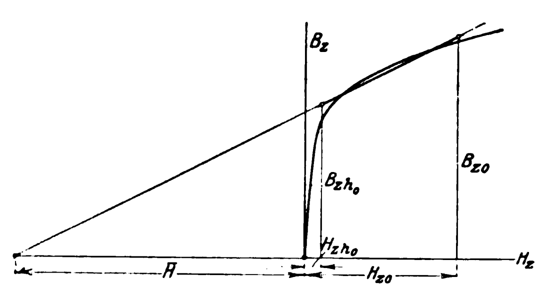


Abb. 35. Bestimmung der Feldstärke $\overline{H}$ durch die Interpolationsgerade der Sättigungskurve.

Darin bezeichnet $\overline{H}'$ (positiv gerechnet) diejenige Abszisse im Sättigungsdiagramm, in welcher die Interpolationsgerade der ersten Zone die H_z-Achse trifft. (Abb. 35.) Für den mehrfach zitierten Gleichstrommotor ist z. B.

$$\overline{H}' = 2830,$$

d. h.: $\overline{H}'$ ist stets ein sehr großer Wert, der geeignet erscheint, sämtliche Resultate entscheidend zu beeinflussen.

Führen wir die mitgeteilten Lösungen in die Differentialgleichungen 69) oder 70) ein, so erhalten wir beide Male dieselbe Formel für den Parameter α_p:

$$\mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2} = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{n(z_{em}\mu' + n)} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 81)$$

Zugleich ist das dieselbe Bedingung, die wir schon bei geraden Zähnen kennen gelernt haben. Nur muß jetzt eine ganz bestimmte mittlere Zahnstärke, nämlich z_{em}, in die Rechnung eingesetzt werden.

Die Einführung des Ansatzes 79/80 in eine der Grundgleichungen, z. B. 68, liefert außerdem das Verhältnis der Amplituden $(\hat{B}_p)_{x_1}$ und $\hat{H}_p$, d. i.

$$\frac{\hat{H}_p}{(\hat{B}_p)_{x_1}} = \sqrt{\frac{n}{z_{em}\mu' + n}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 82)$$

und auch dieses Gesetz ist nur die Wiederholung eines früheren.

Nun haben wir noch die Grenzbedingung 71) zur Berechnung der Zahlenreihe des Parameters p auszunützen, das liefert uns:

$$\mp \sqrt{\eta_p' r_m'} \left(\frac{S_p(\sqrt{\eta_p'} r')}{C_p(\sqrt{\eta_p'} r')} \right)_{r = r_h'} = 2 \frac{r_h'}{k} \begin{cases} +: \text{Außenpolmaschine} \\ -: \text{Innenpolmaschine} \end{cases} \quad \dots \dots \quad 83a)$$

oder auch noch einfacher: $$p \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} p \frac{\pi}{2} = \frac{h}{k} \sqrt{\frac{r_h'}{r_m'}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 83)$$

In dieser letzten Form ist uns die Parametergleichung ebenfalls wohlbekannt. Sie hat formell denselben Aufbau wie die Parametergleichung 24) für gerade Zähne. Nur liefert sie für den Parameter p wesentlich kleinere --Werte wie dort, da bei stark verjüngten Zähnen k so groß, wenn nicht größer als h ausfällt. Abb. 36 ist für unser Zahlenbeispiel entworfen. Sie liefert p als Abszisse des Schnittpunktes einer gleichseitigen Hyperbel

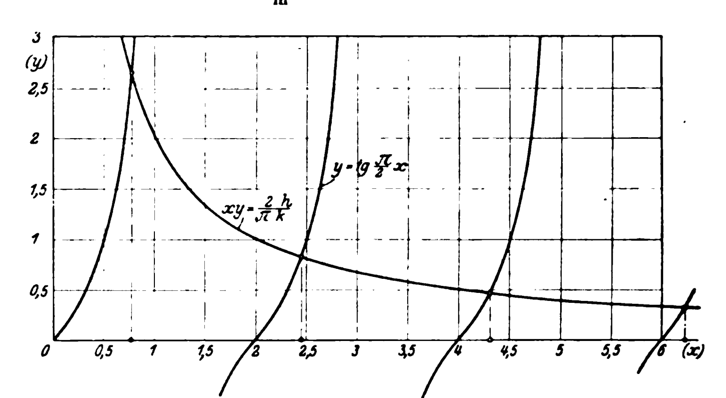


Abb. 36. Bestimmung der Parameterreihe p für den Gleichstromanker nach Abb. 29.

$$xy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h}{k} \sqrt{\frac{r_h'}{r_m'}}$$

mit der periodischen Tangentenkurve:

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x.$$

Die Zahlenreihe beginnt mit

$$p_1 = 0{,}56 \qquad p_2 = 2{,}17 \qquad p_3 = 4{,}10$$

und nähert sich dann sehr schnell der Reihe der geraden ganzen Zahlen 6, 8, 10 usw.

Das Parametergesetz ermöglicht uns nun auch, die konstanten Glieder der Zahngleichung 80) in die Reihenentwickelung aufzunehmen. Bei geraden Zähnen schrieben wir früher:

$$1 = \sum \left(f_p \cdot \frac{p\pi}{2} \cdot \cos p \frac{\pi}{2h} y \right) \quad \dots \dots \dots \dots \quad 29a)$$

und fanden:

$$f_p = \frac{8}{p^2\pi^2} \cdot \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 31)$$

Analog suchen wir nun eine Reihenentwickelung:

$$\frac{r_h}{r} = \sum \left(f_p \cdot \frac{p\pi}{2} C_p \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 84)$$

und finden unter Zuhilfenahme der Näherungsgleichungen 72) und 75) nach demselben Verfahren:

$$f_p = \frac{8}{p^2\pi^2} \cdot \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p\pi}{p\pi}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{r_h}{r_m}\right)^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 85)^{1)}$$

Dazu tritt noch die neue Entwicklung:

$$\frac{r_h}{r} - 1 = \sum \left(f_p \cdot \varkappa_p \cdot \frac{p\pi}{2} C_p \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 86)$$

mit

$$\pm \varkappa_p = \frac{k}{r_h} \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{r_0}{r_h}}}{\cos p\frac{\pi}{2}} - 1 \right) = \frac{h}{r_h} \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{r_0}{r_m} \cdot \frac{r_h}{r_m}}}{p\frac{\pi}{2} \sin p\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{k}{r_h} \begin{cases} + \text{Außenpole} \\ - \text{Innenpole} \end{cases} \quad 87)^{1)}$$

Führt man diese Reihen in die Gleichung der Zahnfeldstärke ein, so erhält man nunmehr die neue Schreibweise:

$$H_x' = \sum \left[(H_{h_0}' + \overline{H}'\varkappa_p') f_p' \frac{p\pi}{2} - (\overline{B}_p)_{x_1} \sqrt{\frac{n}{z_{em}\mu' + n}} \frac{\mathfrak{Cos}\,\alpha x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1} \right] C_p(\sqrt{\eta_p'}\,r') \quad . . \quad 88)$$

Sie ist genau so gebaut wie die entsprechende Reihe für gerade Zähne, nur ist an Stelle der einfachen Konstanten H_k' die Summe

$$H_{h_0}' + \overline{H}'\varkappa_p'$$

getreten. Diesen Ersatz werden wir also immer dann vornehmen müssen, wenn die Konstanten der Zahnfeldstärke unter dem Summenzeichen der unendlichen Reihe erscheinen.

4. Die Formeln der zweiten Zone.

Ehe ich mit der Behandlung der zweiten Zone beginne, muß ich zu ihren Konstanten einen kurzen Kommentar geben. Für die zweite Zone sind die Radien r_0'',

---

[1]) Natürlich könnte man diese Faktoren auch ohne Zuhilfenahme der Näherungsformeln durch Zylinderfunktionen ausdrücken. Es wäre dann:

$$f_p = \frac{4}{p^2\pi^2} \frac{(S_p)_{r=r_h}}{\left[\frac{r_h}{h} C_p^2 + \frac{2}{p\pi} C_p S_p + \frac{r_m}{h} S_p^2\right]_{r=r_h} - \frac{r_0}{h} \cdot \frac{r_0}{r_h} (C_p^2)_{r=r_0}}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$f_p = \frac{4}{p^2\pi^2} \frac{S_{ph}}{\frac{r_h}{h} C_{ph}^2 + \frac{2}{p\pi} C_{ph} S_{ph} + \frac{r_m}{h} S_{ph}^2 - \frac{r_0}{h} \cdot \frac{r_0}{r_h} C_{p0}^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 85a)$$

und

$$\varkappa_p = \frac{2}{p\pi} \cdot \frac{h}{r_m} \cdot \frac{\frac{r_0}{r_h} C_{p0} - C_{ph}}{S_{ph}} = \pm \frac{k}{r_h} \left(\frac{r_0}{r_h} \cdot \frac{C_{p0}}{C_{ph}} - 1 \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 87a)$$

Doch ist die Genauigkeit der mitgeteilten Näherungsformeln bei weitem ausreichend.

r_h'' und r_m'' ein wenig kleiner als die analogen Werte der ersten Zone. Das ergibt sich aus ihren Definitionsgleichungen 62) bis 64) unter Berücksichtigung von

$$\mu'' > \mu'$$

ohne weiteres. Es hat zur Folge, daß strenggenommen auch die Parameterreihe p und die Funktionen S_p und C_p von den analogen Größen der ersten Zone ein wenig abweichen. — Soll man diese Unterschiede berücksichtigen?

Die Antwort muß verneinend ausfallen. Nicht allein, weil wir das größte Interesse daran haben, die Theorie nicht weiter zu komplizieren, sondern auch aus rein logischen Gründen:

Was die Parameterreihe p betrifft, so enthält ihre Gl. 83) eine Konstante k, die wir nur schätzen konnten, und die vielleicht in der ersten und zweiten Zone schon etwas verschiedene Mittelwerte besitzt. In diese Gleichung die unbedeutenden Differenzen der Verhältnisse $\frac{r_h}{r_m}$ einführen zu wollen, wäre sinnlos. Wir können gar nichts anderes tun, als dieselbe Parameterreihe den Formeln beider Zonen zugrunde zu legen.

Dann stimmen aber auch die Werte der Funktionen S_p und C_p überein. Denn für $r' = r_m'$ bzw. $r'' = r_m''$ ist beide Male:

$$S_p(\sqrt{\eta_p r_m}) \doteq \sin p\frac{\pi}{4}$$

und

$$C_p(\sqrt{\eta_p r_m}) \doteq \cos p\frac{\pi}{4}.$$

Angesichts des mittleren Genauigkeitsgrades der ganzen Theorie berechtigt uns dies, auch die Funktionen selbst nicht weiter zu unterscheiden.

Bleiben also nur eventuelle Differenzen zwischen den Faktoren f_p' und f_p'' bzw. $\varkappa_p'$ und $\varkappa_p''$, und diese kann man denn auch, wenn man will, berücksichtigen. Im übrigen liegen alle diese Unterschiede nur bei sehr stark verjüngten Zähnen innerhalb der praktischen Rechengenauigkeit, und ich erwähne sie nur, um etwaige Zweifel gleich aufzuklären, nicht etwa, weil ich sie selbst für bedeutungsvoll hielte.

Im vorigen Kapitel ließ ich es mir angelegen sein, die weitgehende Analogie in den Formeln für gerade und verjüngte Zähne immer und immer wieder zu betonen. Das geschah gerade im Hinblick auf den vorliegenden Abschnitt. Denn ich wollte den langwierigen Rechenapparat, den ich bei geraden Zähnen vorzuführen hatte, diesmal auf ein Minimum herabdrücken. — Und das kann ich jetzt in der Tat. Insbesondere durch die Einführung der in der Literatur nicht gebräuchlichen Funktionen S_p und C_p wurde die Analogie auch in der Schreibweise so weit getrieben, daß wenig mehr als der Ansatz zur Lösung und die Lösung selbst mitzuteilen bleibt.

Der Ansatz lehnt sich aufs engste an die Gl. 32) und 33) für gerade Zähne an. Ich schreibe unter Zugrundelegung des Koordinatensystems nach Abb. 29b:

$$B_x'' = A_0 \ln\frac{r''}{r_0''} - \Sigma[D_p \mathfrak{Sin}\beta_p x + E_p \mathfrak{Cof}\beta_p(x - x_2)]\, S_p(\sqrt{\eta_p'' p''}) \quad \ldots\ldots \quad 89)$$

$$H_x'' = H_{h_0}''\frac{r_h''}{r''} + \overline{H}''\left(\frac{r_h''}{r''} - 1\right) + \Sigma[F_p \mathfrak{Cof}\beta_p x + G_p \mathfrak{Sin}\beta_p(x - x_2)]\, C_p(\sqrt{\eta_p'' r''}) \quad 90)$$

Zu den schon erwähnten geringfügigen Änderungen tritt noch der Ersatz des früheren Gliedes

$$B_0\frac{y}{h}$$

durch die neue Funktion $\qquad A_0 \ln\frac{r''}{r_0''}.$

Doch ist auch dieser Unterschied rein formeller Natur. Physikalisch bedeuten beide Ausdrücke genau dasselbe, und zwar folgendes:



Wenn das Luftspaltfeld unter der zweiten Zone in die Zähne übertritt und — so wollen wir einmal annehmen — bis zur Zahnwurzel in ihnen verbleibt, so bildet sich überall zwischen Krone und Wurzel ein ähnliches Potentialgefälle aus. Das will sagen: Nicht die Verteilung, nur die absolute Größe des Potentialgefälles ändert sich von Zahn zu Zahn, und zwar stets um gleiche Beträge, da in der zweiten Zone auch die Feldstärke H''_{h_0} linear abfällt.

Für die Potentialdifferenzen zwischen gleich hoch gelegenen Punkten der Nutwandungen hat das eine sehr einfache Folge: Sie sind für alle Nuten gleich groß und wachsen vom Nutboden zur Öffnung nach demselben Gesetz wie das Potentialgefälle der Zähne, d. i.

nach der Funktion $\frac{y}{h} = \Sigma f_p \sin p \frac{\pi}{2h} y$ für gerade Zähne

und nach der Funktion $\ln \frac{r''}{r_0''} = \frac{h}{r_h} \Sigma f_p'' S_p$ für verjüngte Zähne.

Gerade diese Potentialdifferenzen sind es aber, welche die allen Nuten gemeinsame Querfeldkomponente

$$B_0 \frac{y}{h}$$

bzw.

$$A_0 \ln \frac{r''}{r_0''}$$

ins Leben rufen. Sie schaffen ein Querfeld, das ganz für sich allein existenzfähig wäre, das die Zähne weder entlastet noch belastet, ja das nicht einmal notgedrungen im Luftspaltfeld zu entspringen brauchte, da es die zweite Zone nur einfach parallel zum Nutboden durchsetzt. Erst in den Gliedern der unendlichen Reihen in Formel 89) und 90) spricht sich wieder die eigentümliche Wechselwirkung zwischen Zahnfeldstärke und Nutenquerfeld aus, welcher in der ersten Zone die Ausbildung des ganzen Querfeldes zufiel.

Nachdem wir so auch in diesem Punkte den Zusammenhang zwischen der Theorie der geraden und schrägen Zähne hergestellt haben, können wir den weiteren Rechnungsgang mit wenigen Strichen skizzieren: Vor allem müssen wir uns wieder die Allgemeinheit der Formeln für beliebige Ausdehnung der zweiten Zone wahren, und darum werden wir zur Bestimmung der Konstanten des Ansatzes nur die Zahngleichung 67) heranziehen. Ich habe ja seinerzeit ausführlich auseinandergesetzt, warum die Ergänzungsgleichung des Nutenquerfeldes erst für

$$x_2 \geqq 5 \frac{t}{2}$$

angewendet werden darf.

Die Zahngleichung 67) allein liefert allerdings nur ein unbestimmtes Verhältnis der Koeffizienten, unbestimmt insofern, als sie für den Parameter β_p keine Vorschriften hinterläßt. Sie verlangt lediglich:

$$\frac{F_p}{D_p} = \frac{G_p}{E_p} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{p \frac{\pi}{4h} (z''_{em} \mu'' + n)} \quad \ldots \ldots \quad 91) \; (34)^{1)}$$

Diese Willkür wird auch durch die Grenzbedingungen nicht behoben. Im Gegenteil, wenn wir die Grenzbedingungen gegen die erste Zone ausnützen, kommt eine weitere Unbestimmtheit dazu. Wir finden nämlich:

$$E_p = \frac{A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' - (\widehat{B}_p)_{x_1}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2}, \quad \ldots \ldots \quad 92) \; (35)$$

[1]) Die eingeklammerten Ziffern bedeuten die Nummern der analogen Gleichungen bei geraden Zähnen.

ohne gleichzeitig den geringsten Anhaltspunkt über die Konstante A_0 zu erhalten. Immerhin bringen die beiden Gleichungen unseren Ansatz bereits auf die endgültige Form:

$$B_x'' = A_0 \ln \frac{r''}{r_0''} + \sum \left[\left((\widehat{B}_p)_{x_1} - A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' \right) \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - D_p \,\mathfrak{Sin}\,\beta_p x \right] \cdot S_p (\sqrt{\eta_p''}\, r'') \qquad 93)\ (40)$$

und

$$H_x'' = H_{h_0}'' \frac{r_h''}{r''} + \bar{H}'' \left(\frac{r_h''}{r''} - 1 \right) + \sum \left[\left((\widehat{B}_p)_{x_1} - A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' \right) \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + D_p \,\mathfrak{Cof}\,\beta_p x \right] \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{p \frac{\pi}{4h} (z_{em}'' \mu'' + n)} C_p (\sqrt{\eta_p''}\, r'') \quad \ldots \quad 94)\ (41)$$

Nun handelt es sich noch darum, die Konstanten $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ und D_p zu berechnen, wenn auch nur unter Benutzung der willkürlichen Werte A_0 und β_p:

Zunächst liefert schon die Grenzbedingung gegen die erste Zone eine Gleichung zwischen beiden Größen, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} D_p = \frac{\mathfrak{Tg}\,\beta_p \frac{t}{2}}{v} \Big\{ & (H_{h_0}' + \bar{H}' \varkappa_p') \frac{h}{n} \cdot 2 f_p' - [(H_{h_0}'')_{\frac{t}{2}} + H'' \varkappa_p''] \frac{h}{n} \cdot 2 f_p'' \\ & - A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' \left(1 - \mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2 \,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2} \right) \\ & - (\widehat{B}_p)_{x_1} \left(\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1 \,\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \frac{t}{2} + v\, \mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2 \,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2} + 1 - v \right) \Big\} \end{aligned} \right\} \cdot 95)\ (36)$$

Darin vertritt v das Verhältnis
$$v = \left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\gamma_p \frac{t}{2}} \right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 96)\ (37)$$

während
$$\mathfrak{Sin}\,\gamma_p \frac{t}{2} = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{n (z_{em}'' \mu'' + n)} \quad \ldots \ldots \quad 97)\ (43)$$

zu setzen ist. Eine zweite, gleichwertige Beziehung verschafft uns die Grenzbedingung gegen die zweite Zone. Aus ihr gewinnen wir nämlich:

$$\left. \begin{aligned} D_p = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \Bigg\{ & (\widehat{B}_p)_{x_1} (1 - v) \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \\ & + A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' \left(1 + (v-1) \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \right) - [(H_{h_0}'')_{x_2 - t} + \bar{H}'' \varkappa_p''] \frac{h}{n} f_p'' \Bigg\} \end{aligned} \right\} \cdot 98)\ (38)$$

Jetzt ist es nicht mehr schwer, beide Gleichungen zur Bestimmung einer Unbekannten, am besten $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ auszubeuten. Wir erhalten:

$$(\widehat{B}_p)_{x_1} = \frac{\begin{aligned} & 2 f_p'' \frac{h}{n} \cdot \left[\left((H_{h_0}') + \bar{H}' \varkappa_p' \right) \frac{f_p'}{f_p''} - \left((H_{h_0}'')_{\frac{t}{2}} + \bar{H}'' \varkappa_p'' \right) \right] \\ & + [(H_{h_0}'')_{x_2 - t} + \bar{H}'' \varkappa_p''] \cdot \frac{v\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - t)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \\ & + A_0 \frac{n}{r_h''} \frac{v}{2} \left[\mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2} \cdot \frac{(v-1)\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Sin}\,\beta_p x_2 - 2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - 1 \right] \end{aligned}}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1 \,\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \frac{t}{2} + v\,\mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2} \cdot \frac{(v-1)\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Sin}\,\beta_p x_2}{(v-1)\,\mathfrak{Cof}\,\beta_p (x_2 - t) + \mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + 1 - v} \qquad 99)\ (39)$$

und wenn auch diese Formel auf den ersten Blick nicht eben besticht, so muß man es ihr eben zugute halten, daß in ihr die Aussagen über drei ganz verschiedene Fälle zu einem einzigen Gesetz zusammengeschweißt sind.

Diese drei möglichen Fälle wollen wir jetzt gesondert betrachten: Am einfachsten sind grobe Nutteilungen zu behandeln. Insbesondere für diejenige Lage von Anker und Polen, in welcher überhaupt kein Zahn, sondern nur die letzte Nut der ersten Zone unter dem Schenkel des H_{h_0}-Trapezes liegt, vereinfacht sich unsere Formel ganz außerordentlich. Wie ich schon früher dargetan habe, führt diese Lage zu den Nebenbedingungen

$$(H''_{h_0})_{\frac{t}{2}} = 0$$

und

$$\mu'' = \infty \quad \text{bzw.} \quad v = 0 .$$

Damit fallen im Zähler und Nenner die meisten Glieder ohne weiteres fort, und es bleibt nur:

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = (H_{h_0}' + \bar{H}' \varkappa_p') \cdot \frac{2 f_p' \frac{h}{n}}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1 \, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + 1} \quad \ldots \quad 100) \; (42)$$

Zugleich bestimmt $(\hat{B}_p)_{x_1}$ rückwirkend die ganze Querfeldverteilung in der ersten Zone, und von einer zweiten Zone können wir ja überhaupt nicht reden, solange keine Zahnmittellinie unter dem Trapezschenkel liegt.

Aber auch bei den gröbsten Nutteilungen wird wenigstens ein paar Augenblicke lang eine Zahnmittellinie unter dem Trapezschenkel liegen, und damit entsteht sofort der Begriff der zweiten Zone mit:

$$x_2 = 3 \frac{t}{2} .$$

Auch dieser Fall gibt uns zunächst keine Handhabe, die willkürlichen Konstanten A_0 und β_p festzulegen. Doch bedarf es dessen auch gar nicht, um die Felder in den beiden Grenznuten der zweiten Zone zu bestimmen. Denn hierfür heben sich beide Unbekannte fort und hinterlassen uns die einfachen Formeln:

Für die Nut auf der Grenze zwischen der ersten und zweiten Zone:

$$(\hat{B}_p)_{x_1} = \frac{2 (H'_{h_0} + \bar{H}' \varkappa_p') f_p' \frac{h}{n} - [(H''_{h_0})_{\frac{t}{2}} + \bar{H}'' \varkappa_p''] f_p'' \frac{h}{n} \left(3 - \mathfrak{Tg}\, 3 \gamma_p \frac{t}{2} \, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2}\right)}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p x_1 \, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\, 3 \gamma_p \frac{t}{2} \, \mathfrak{Ctg}\, \gamma_p \frac{t}{2}} \quad 101) (46)$$

Für die einzige Nut der zweiten Zone:

$$(\hat{B}_p'')_t = (\hat{B}_p)_{x_1} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, \gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cos}\, 3 \gamma_p \frac{t}{2}} + [(H''_{h_0})_{\frac{t}{2}} + \bar{H}'' \varkappa_p''] \frac{h}{n} f_p'' \left(1 - \frac{\mathfrak{Cos}\, \gamma_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cos}\, 3 \gamma_p \frac{t}{2}} \right) \quad . \; . \quad 102) \; (47)$$

Etwas anders ist zu verfahren, wenn man nicht für jede Ankerstellung aufs neue dieses Wertepaar aufsuchen will, sondern sich statt dessen auf eine Interpolationskurve beschränkt. Um diese nach Ansatz 93) berechnen zu können, muß man ihr noch zwei neue Nebenbedingungen zugesellen, aus denen dann auch A_0 und β_p zwangläufig hervorgehen. Da liegt es denn nahe, der Leitkurve nur einen einzigen Punkt vorzuschreiben, und zwar diejenige Amplitude $\hat{B}_{pm}$, die sich nach Gl. 100) unter der Mitte des Trapezschenkels ausbildet. Denn damit behält man hinsichtlich des Parameters β_p freie Hand und kann den einfachsten und günstigsten Wert

$$\beta_p = \gamma_p$$

in die Formeln einführen. Gleichzeitig wird die Unbestimmtheit für A_0 beseitigt, und wir erhalten:

$$A_0 \frac{h}{r_h''} f_p'' = \frac{\bar{B}_{pm} - (\bar{B}_p)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p t}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} - \left(\frac{H'_{h_0}}{2} + \bar{H}''\varkappa_p''\right)\frac{h}{n} f_p'' \frac{2\,\mathfrak{Sin}^2 \beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2}}{1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}} \quad . \; 103) \; (52)$$

mit

$$\bar{B}_{pm} = (H_{h_0}' + \bar{H}'\varkappa_p') \cdot \frac{2 \frac{h}{n} f_p'}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \frac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \frac{t}{2} + 1} \quad . \; . \; . \; 104) \; (50)$$

Bleibt nur noch der letzte und für das Verständnis einfachste Fall

$$x_2 \geqq 5 \frac{t}{2},$$

in welchem von vornherein gar keine Unbestimmtheit auftritt. Denn sowie eine Nut durch zwei zur zweiten Zone gehörigen Zähne begrenzt wird, tritt als neue Bedingungsgleichung die Formel 68) in ihr Recht. Sie verlangt eindeutig, daß die Koeffizienten β_p und γ_p übereinstimmen, daß also

$$v = 1$$

und

$$\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2} = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{n\,(z_{em}\mu'' + n)}$$

gesetzt wird, und weiter, daß die bisher willkürliche Konstante A_0 der Differenz $\Delta H''_{h_0}$ der Feldstärke benachbarter Zähne proportional sei:

$$A_0 = \Delta H''_{h_0} \frac{r_h''}{n}.$$

Damit vereinfacht sich aufs neue die allgemeine Formel und liefert nun:

$$(\bar{B}_p)_{x_1} = \frac{2 f_p'' \frac{h}{n} \left[(H'_{h_0} + H'\varkappa_p') \frac{f_p'}{f_p''} - ((H''_{h_0})_{x_1} + \bar{H}''\varkappa_p'') \right] + \left[(H''_{h_0})_{x_2} + \bar{H}''\varkappa_p'' \right] \frac{\mathfrak{Cof}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} + \frac{\Delta H''_{h_0}}{2} \mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2}\, \mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha_p x_1\, \mathfrak{Ctg}\,\alpha_p \frac{t}{2} \cdot \mathfrak{Tg}\,\beta_p x_2\, \mathfrak{Ctg}\,\beta_p \frac{t}{2}} \quad 105) \; (57)$$

Die Feldstärken

und

$$\left.\begin{aligned} (H''_{h_0})_{x_2} &= (H''_{h_0})_{x_2 - t} - \Delta H''_{h_0} \\ (H''_{h_0})_{x_1} &= (H''_{h_0})_{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \Delta H''_{h_0} \end{aligned}\right\} \quad [(H''_{h_0})_{x_2} \text{ stets negativ}] \quad . \; . \; 106) \; (56)$$

haben hierin dieselbe Bedeutung wie in der Theorie der geraden Zähne $H''_{k x_2}$ und $H''_{k x_1}$ (vgl. Abb. 20).

Noch kürzer ist der Ausdruck für die Konstante D_p. Es bleibt nur:

$$D_p = -\left[(H''_{h_0})_{x_2} + \bar{H}''\varkappa_p'' \right] \frac{h}{n} f_p'' \cdot \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_p \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\beta_p x_2} \quad . \; . \; . \; . \; 107) \; (58)$$

[1]) Ich habe bei der Behandlung der geraden Zähne auseinandergesetzt, daß man in diesem Falle für jede neue Stellung des Zahnkranzes unter dem Trapezschenkel einen neuen Wert von μ'' und γ_p einzuführen hat.

Durch $(\widehat{B}_p)_{x_1}$ kennen wir die Vorgänge in der ersten Zone bis zur Grenze x_1. D_p führen wir in den Ansatz der zweiten Zone ein und kennen nun auch hier Querfeld und Zahninduktion für beliebig gelegene Nuten gemäß dem Ansatz der Leitkurven:

$$\left.\begin{aligned} B_x'' = \Delta H''_{h_0} \frac{r_h''}{n} \ln \frac{r''}{r_0''} + \sum \Bigg[\left((\widehat{B}_p)_{x_1} - \Delta H''_{h_0} \frac{h}{n} f_p'' \right) \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_p (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x} \\ + \left[(H''_{h_0})_{x_2} + \overline{H}'' x_p'' \right] \frac{h}{n} 2 f_p'' \,\mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta_p x}{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} \Bigg] S_p (\sqrt{\eta_r'' r''}) \end{aligned}\right\} \quad 108)\ (59)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} H_x'' = \left[H''_{h_0} \frac{r_h''}{r''} + \overline{H}'' \left(\frac{r_h''}{r''} - 1 \right] \right) \\ + \sqrt{\frac{n}{z''_{em} \mu'' + n}} \cdot \sum \Bigg[\left((\widehat{B}_p)_{x_1} - \Delta H''_{h_0} \frac{h}{n} f_p'' \right) \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta_p (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\, \beta x_2} \\ - \left[(H''_{h_0})_{x_2} + \overline{H}'' \varkappa_p'' \right] \frac{h}{n} 2 f_p'' \,\mathfrak{Sin}\, \beta_p \frac{t}{2} \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x}{\mathfrak{Cof}\, \beta_p x_2} \Bigg] C_p (\sqrt{\eta_p'' r''}) \end{aligned}\right\} . \quad 109)\ (60)$$

V. Anwendung der Theorie für verjüngte Zähne.

Zahlenbeispiel. — Gleichstrommotor (nach Abb. 29a)

Ankerdurchmesser . . . . . . $D = 41$ cm
Polzahl . . . . $2p = 4$
Polbedeckungsfaktor . . . . . $\alpha = {}^2/_3$
Polteilung . . . . $t_p = 32{,}2$ cm
Nuten pro Pol . . . . $= 12^1/_4$
Nutteilung . . . . $t = 2{,}63$ cm[1])
Nutbreite . . . . $n = 1{,}0$ „
Zahnbreite maximal . . . . . $z_k = 1{,}63$ „
„ „ effektiv . $z_{ek} = 0{,}92 \cdot 1{,}63 = 1{,}5$ cm
„ minimal . . . . . $z_0 = 1{,}1$ cm
„ „ effektiv . $z_{e_0} = 0{,}92 \cdot 1{,}1 = 1{,}01$ cm
Nuttiefe (total) . . . . $h_{tot} = 4{,}1$ cm

Interpolationsgerade der magnetischen Charakteristik für die erste Zone (Abb. 30).

Für eine mittlere Luftspaltinduktion unter dem Polbogen b_1 von:

$$B_l' = 8750$$

ergeben sich folgende Konstanten unter der Polmitte (Nutenquerfeld vernachlässigt):

Kraftfluß einer Zahnteilung . . . . $\frac{N_t'}{cm} = (B_z')_{max} \cdot z_{e_0} + (H_z')_{max} \cdot n = 23\,000$

Maximale Induktion an der Zahnwurzel $(B_z')_{max} = 22\,000$

Darnach Interpolationsgerade zwischen $\begin{cases} (B_z')_{max} = 22\,000 \\ (H_z')_{max} = 750 \end{cases}$ und $\begin{cases} B'_{zh_0} = 18\,000 \\ H'_{hz_0} = 100 \end{cases}$

Scheinbare Permeabilität in der ersten Zone . . . . $\mu' = \frac{(B_z')_{max} - B'_{zh_0}}{(H_z')_{max} - H'_{zh_0}} = \frac{4000}{650} = 6{,}15$

Schnittpunkt der Interpolationsgeraden mit der H_z-Achse bei: $H_z = -\overline{H}'$ $\Big\}$ $\overline{H}' = \frac{(B_z')_{max}}{\mu'} - (H_z')_{max} = 3580 - 750 = 2830$

Reduzierte Nuttiefen h und k (Abb. 28).

Annahme: Für $y = h$ sei bei Vernachlässigung des Nutenquerfeldes

Zahnfeldstärke: $H'_{zh_0} \div 0{,}13\,(H_z')_{max} = 100$

Zahnfeldinduktion: $B'_{zh_0} = \mu'\,(H'_{zh_0} + \overline{H}') = 18\,000$

[1]) Alle Abszissen t_p, t, b_1, b_2, x_1, x_2, x . . . sind am Ankerumfang gemessen.

Dazu gehört: Zahnstärke: $z_{he} = \dfrac{\dfrac{N_t'}{cm} - H'_{zh_0} n}{B'_{zh_0}} = 127$ cm

bzw. $z_h = 1{,}38$ cm

Reduzierte Nuttiefe: $h = h_{tot} \dfrac{z_h - z_0}{z_k - z_0} = h_{tot} \dfrac{0{,}28}{0{,}53} = 2{,}2$ cm

$k = 1{,}15 (h_{tot} - h) = 2{,}2 \text{ cm} = h.$

Trapezkurve der Zahnfeldstärke.

Nach Abb. 31 erhält man durch die Konstruktion irgend einer Zahnfeldstärke $H_z = f(x)$ zwischen $y = 0$ und $y = h$ unter Vernachlässigung des Nutenquerfeldes

Erste Zone: Polbogen . . . . $b_1 = 15{,}1$ cm
Reichweite . . . . $x_1 = 7{,}2$ „ $= 2{,}74$ t
Zahnfeldstärke für $y = h$ . . . . $H'_{zh_0} = 100$

Zweite Zone: Polbogen . . . . $b_2 = 18{,}9$ cm
Reichweite . . . . $x_2 = 3 \dfrac{t}{2} = 3{,}94$ cm
Zahnfeldstärke für $y = h$ (unter der Mittte des Trapezschenkels . . . $H''_{zh_0} = 50 = (H''_{zh_0})_{\frac{t}{2}}$

Interpolationsgerade der magnetischen Charakteristik für die zweite Zone.

Gemäß den eben mitgeteilten Grenzen legen wir die Interpolationsgerade zwischen . . . . $(H''_{zh_0})_{\frac{t}{2}} = 50$

$(B''_{zh_0})_{\frac{t}{2}} = 16\,600$

und den Maximalwerten für $y = 0$: . $(H''_{z\max})_{\frac{t}{2}} = 375$

$(B''_{z\max})_{\frac{t}{2}} = 20\,500$

Dazu scheinbare Permeabilität in der zweiten Zone . . . .

$$\mu'' = \left(\frac{(B''_z)_{\max} - B''_{zh_0}}{(H''_z)_{\max} - H''_{zh_0}}\right)_{\frac{t}{2}} = \frac{20\,500 - 16\,600}{375 - 50} = 12{,}0$$

Schnittpunkt der Interpolationsgeraden mit der H_z-Achse bei $H_z = -\bar{H}''$.

$$\bar{H}'' = \left(\frac{(B_z'')_{\max}}{\mu'} - (H_z'')_{\max}\right)_{\frac{t}{2}} = 1710 - 395 = 1335.$$

Der Parameter p_1 und die Faktoren f_1 und x_1 der Harmonischen Analyse[1]).

Erste Zone. Ausgezeichnete Grenzradien:

$$r_0' = \left(z_{e_0} + \frac{n}{\mu'}\right) \cdot \frac{h}{z_{ek} - z_{e_0}} = 9{,}8 \text{ cm}$$

$$r_h' = r_0' + h = 12{,}0 \text{ cm}$$

$$r_m' = \left(\frac{\sqrt{r_0'} + \sqrt{r_h'}}{2}\right)^2 = 10{,}85 \text{ cm}.$$

Parametergesetz: $p' \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} p' \frac{\pi}{2} = \frac{h}{k} \sqrt{\frac{r_h'}{r_m'}} = 1{,}05.$

Dazu (Abb. 24): $p_1' = 0{,}557.$

[1]) Den Parameter p_1 sowie die Zylinderfunktionen S_1 und C_1 kann man für beide Zonen identifizieren. In Wirklichkeit würde man diese also für eine, am besten die zweite Zone zu berechnen haben. Daß ich hier die Rechnung für beide Zonen mitteile, geschieht nur, um die Geringfügigkeit der Unterschiede nachzuweisen.



Ferner: $f_1' = \frac{8}{p_1^2\pi^2} \cdot \frac{\sin p_1 \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\sin p_1 \pi}{p_1 \pi}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{r_h'}{r_m'}\right)^3} = 1{,}28 \cdot 1{,}08 = 1{,}383$ [1])

und $\varkappa_1' = \frac{k}{r_h'} \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{r_0'}{r_h'}}}{\cos p_1 \frac{\pi}{2}} - 1 \right) = \frac{2{,}2}{12{,}0} \cdot \left(\frac{0{,}950}{\cos 50^0 30'} - 1 \right) = 0{,}0900.$

Zweite Zone. Ausgezeichnete Grenzradien:

$$r_0'' = \left(z_{e_0} + \frac{n}{\mu''}\right) \cdot \frac{h}{z_{ek} - z_{e_0}} = 9{,}15 \text{ cm}$$

$$r_h'' = r_0'' + h = 11{,}35 \text{ cm} \qquad r_m'' = \left(\frac{\sqrt{r_0''} + \sqrt{r_h''}}{2}\right)^2 = 10{,}2 \text{ cm}.$$

Parametergleichung: $p_1'' \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} p_1'' \frac{\pi}{2} = \frac{h}{k} \sqrt{\frac{r_h''}{r_m''}} = 1{,}055.$

Dazu (Abb. 24): $p_1'' = 0{,}557 \qquad f_1'' = 1{,}28 \cdot 1{,}083 = 1{,}386$

$$\varkappa_1'' = \frac{2{,}2}{11{,}35} \left(\frac{0{,}947}{0{,}638} - 1 \right) = 0{,}093.$$

Zusammenstellung der übrigen Rechnungsgrößen.

Erste Zone.	Zweite Zone.
$\operatorname{Sin} \alpha_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{(z_{em}' \mu' + n)\, n}$	$\operatorname{Sin} \beta_1 \frac{t}{2} = p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{(z_{em}'' \mu'' + n)\, n}$
$= p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{r_m'}{r_0'}} \sqrt{(z_{e_0} \mu' + n)\, n} = 0{,}56$	$= p_1 \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{r_m''}{r_0''}} \sqrt{(z_{e_0} \mu'' + n)\, n} = 0{,}76$
$\alpha_1 \frac{t}{2} = 0{,}54$	$\beta_1 \frac{t}{2} = 0{,}70$
	$\operatorname{Cof} \beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}255$
$\operatorname{Ctg} \alpha_1 \frac{t}{2} = 2{,}03$	$\operatorname{Ctg} \beta_1 \frac{t}{2} = 1{,}65$
	$\operatorname{Cof} \beta_1 t = 2{,}15$
$\alpha_1 x_1 = 2{,}96$	$\beta_1 x_2 = 2{,}10$
	$\operatorname{Cof} \beta_1 x_2 = 4{,}14$
$\operatorname{Tg} \alpha_1 x_1 = 1{,}0$	$\operatorname{Tg} \beta_1 x_2 = 0{,}970$

Berechnung der Querfeldverteilung am Ankerumfang.

Steht ein Zahn unter der Mitte M des Trapezschenkels im H_{h_0}-Diagramm (Abb. 29b), so bildet die links gelegene Nut die Grenze der beiden Zonen. Sie führt ein Querfeld von der ersten Harmonischen:

$$(\bar{B}_1)_{x_1} = \frac{h}{n} \cdot \frac{(H_{h_0}' + \bar{H}'\varkappa_1')\, 2 f_1' - [(H_{h_0}'')_{\frac{t}{2}} + \bar{H}''\varkappa_1'']\, f_1'' \left(3 - \operatorname{Tg} \beta_1 x_2 \operatorname{Ctg} \beta_1 \frac{t}{2}\right)}{\operatorname{Ctg} \alpha_1 x_1 \operatorname{Ctg} \alpha_1 \frac{t}{2} + \operatorname{Tg} \beta_1 x_2 \operatorname{Ctg} \beta_1 \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{2{,}2}{1{,}0} \cdot \frac{(100 + 255) \cdot 2 \cdot 1{,}383 - (50 + 124) \cdot 1{,}386 \cdot (3 - 0{,}97 \cdot 1{,}65)}{1{,}0 \cdot 2{,}03 + 0{,}970 \cdot 1{,}65} = 390.$$

[1]) Auch zur Bestimmung von f_1 kann man sich der Abb. 24 bedienen, wenn man den daraus abzugreifenden Wert von f_1 noch mit $\sqrt{\left(\frac{r_h'}{r_m'}\right)^3}$ multipliziert.

Doch tritt dieser volle Wert in der Nut nicht auf. Im Abstande h vom Nutboden ist vielmehr nur:

$$(B_{1h})_{x_1} = (\widehat{B}_1)_{x_1} \cdot S_1(\sqrt{\eta_1 r_h}) \doteq (\widehat{B}_1)_{x_1} \sqrt{\frac{r_m'}{r_h'}} \sin p_1 \frac{\pi}{2}$$
$$= (\widehat{B}_1)_{x_1} \cdot 0{,}975 \cdot 0{,}77 = 293.$$

Diese Querinduktion sinkt gegen die Polmitte nach dem Gesetze

$$(B_{1h}')_x = (B_{1h})_{x_1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 (x_1 + x)}{\mathfrak{Sin}\, \alpha_1 x_1} \doteq B_{1h} e^{\alpha_1 x} \qquad (x \text{ negativ}),$$

so daß

Für $x =$	$-\frac{t}{2}$	$-t$	$-2t$
B_{1h}'	170	100	34

erhalten wird. Gegen die Polmitte setzt sich dagegen der Anstieg des Feldes zunächst noch fort, und über der Polmitte M des Trapezschenkels erreicht es eine Höhe

$$(B_{1h})_m = \frac{H_{h_0}' + \overline{H}'\varkappa_1'}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 x_1 \, \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 \frac{t}{2} + 1} \cdot 2 f_1' \frac{h}{n} \times \sqrt[4]{\frac{r_m'}{r_h'}} \sin p_1 \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{100 + 255}{1{,}0 \cdot 2{,}03 + 1} \cdot 2 \cdot 1{,}383 \frac{2{,}2}{1{,}0} \times 0{,}75 = 537 = 0{,}75\, \widehat{B}_{1m},$$

die fast genau sein mathematisches Maximum darstellt. Von da an sinkt das Querfeld sehr rasch. Die Gleichung seiner Interpolationskurve

$$(B_{1h}'')_x = \Big\{ C - [C - (\widehat{B}_1)_{x_1}] \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 (x_2 - x)}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2}$$
$$- \Big[C - ((H_{h_0}'')_{\frac{t}{2}} + \overline{H}'' \varkappa_1'') \frac{h}{n} f_1'' \Big] 2\, \mathfrak{Sin}\, \beta_1 \frac{t}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, \beta_1 x}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2} \Big\} \sqrt[4]{\frac{r_m''}{r_h''}} \sin p_1 \frac{\pi}{2}$$

arbeitet mit einer Konstanten:

$$C = \frac{\widehat{B}_{1m} - (\widehat{B}_1)_{x_1} \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 t}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2} - [(H_{h_0}'')_{\frac{t}{2}} + \overline{H}'' \varkappa_1''] \frac{h}{n} 2 f_1'' \frac{\mathfrak{Sin}^2 \beta_1 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 x_2}}{1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, \beta_1 \frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{715 - 390 \cdot 0{,}517 - 174 \cdot 2{,}2 \cdot 2 \cdot 1{,}386 \cdot 0{,}1393}{0{,}205} = 1755.$$

Führen wir diesen Wert oben ein, so wird zunächst

$$(B_{1h}'')_x = 1315 - 244\, \mathfrak{Cof}\, \beta_1 (x_2 - x) - 333\, \mathfrak{Sin}\, \beta_1 x,$$

und speziell

Für $x =$	$\frac{t}{4}$	$\frac{t}{2}$	$3\frac{t}{4}$	t	$5\frac{t}{4}$
B_{1h}''	467	535	500	366	116

So können wir nunmehr die Kurve der Abb. 29b aufzeichnen, die uns einen Überblick über die Veränderlichkeit des Nutenquerfeldes im ganzen Gebiete verschafft. Auf Einzelheiten brauche ich nicht einzugehen; dazu ist die Verwandtschaft mit den analogen Schaulinien unserer früheren Zahlenbeispiele zu groß. Nur muß man im Gedächtnis behalten, daß diesmal die aufgetragene Kurve noch nicht die Maximalwerte



des Querfeldes in der Nut darstellt. Vielmehr ist nach unseren Voraussetzungen der Feldmittelwert im oberen Nutraum noch 15% größer.

Zur Verteilung des Nutenquerfeldes zwischen Boden und Öffnung.

Daß die höheren Harmonischen des Querfeldes gegenüber der Grundwelle nicht ins Gewicht fallen, habe ich schon anläßlich unserer Zahlenbeispiele für gerade Ankerzähne ausführlich dargetan. Für Außenpolmaschinen mit stark verjüngten Zähnen gilt das in noch höherem Maße. Denn mit der Zunahme des oberen Nutraumes — oder besser gesagt des Verhältnisses $\frac{k}{h}$ — geht der Faktor f_p der höheren Harmonischen erheblich zurück. Deshalb will ich auch das Verhalten der Oberwellen nicht im ganzen Gebiete verfolgen. Nur dort, wo sie am meisten ausmachen, mögen ihre Amplituden mit der ersten Harmonischen verglichen werden.

Das Maximum der höheren Harmonischen liegt wie das der Grundwelle ungefähr unter der Mitte M des Trapezschenkels. Hierfür ist überdies ihre Gleichung (104) am einfachsten, und so auch ihr Verhältnis zur Grundwelle:

$$\left(\frac{\widehat{B}_{pm}}{\widehat{B}_{1m}}\right) = \frac{f_p'}{f_1'} \cdot \frac{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 \frac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\, \alpha_1 \frac{t}{2} + 1}{\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{b_1 + b_2}{4} \mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2} + 1}.$$

Welche Werte hierin den einzelnen Gliedern zukommen, ist aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen. Das Ergebnis selbst bedarf keines Kommentars.

Vergleich der höheren Harmonischen mit der Grundwelle.

Ordnungszahl der Harmonischen	1	2	3	4
p	0,557	2,17	4,10	6,07
$\mathfrak{Sin}\, \alpha_p \frac{t}{2}$	0,56	2,18	4,12	6,10
$\alpha_p \frac{t}{2}$	0,54	1,52	2,335	2,51
$\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{t}{2}$	2,03	1,10	1,02	1,01
$\mathfrak{Ctg}\, \alpha_p \frac{b_1 + b_2}{4}$	1,0	1,0	1,0	1,0
$\frac{f_p}{f_1}$	1,0	0,027	0,006	0,0015
$\frac{B_{pm}}{B_{1m}}$	1,0	0,039	0,009	0,002

Schlußbemerkungen.

Ich habe die Theorie des Nutenquerfeldes bei unbelastetem Anker für gerade und verjüngte Zähne entwickelt. Dabei ging es ohne umständliche Zwischenrechnung nicht ab. Aber als Werkzeug — so will es mir wenigstens scheinen — arbeitet die Theorie einfach und schnell. Darüber darf man sich durch den Umfang der Zahlenbeispiele nicht täuschen lassen. Auch hier mußte ja eine Menge minderwertiger Einzelheiten zur Sprache kommen. Denn es galt erst einmal Klarheit zu verbreiten. Hat man aber an Hand der Theorie neue Erfahrungen gewonnen oder schon vorhandenes Material gesichtet, so wird man sich lediglich auf die Bestimmung des maximalen Querfeldes B_{1m} beschränken können, und das ist dann nur noch eine Sache von wenigen Minuten.

Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 7. Heft. 1918.

Allgemeine Theorie der Vorgänge in Stromkreisen.

Von

Walther Deutsch.

Gliederung.

I. Theorie.

A. Einleitung.

Die Theorie der Ein- und Ausschaltvorgänge ist in der letzten Zeit dem Bedürfnisse der Technik gemäß sehr gefördert worden. Die Arbeiten der Altmeister der Elektrizitätslehre: Helmholtz, Thomson, Heaviside, die vielfach unbeachtet blieben, weil sie scheinbar mehr einem spekulativen Interesse dienten, wurden hervorgeholt und erweitert und neue Probleme wurden in Angriff genommen, die oft das ganze Rüstzeug modernen, mathematischen Kalküls beanspruchten.

Die Lösung aller dieser Aufgaben ist eng verknüpft mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Um in den Kern dieser wichtigen Gleichungen einzudringen, haben die verschiedensten Gebiete der Mathematik zusammengewirkt und in ihnen neue Zusammenhänge gefunden. Für die mathematische Physik ist besonders fruchtbar geworden die moderne Theorie der Integralgleichungen und die der Funktionen komplexer Veränderlicher.

Schon Heaviside[1]) (1899) hat sich wohl der letzteren bedient, um in höchst einfacher und übersichtlicher Weise eine gewisse Gruppe von Vorgängen, nämlich die Ereignisse beim plötzlichen Einwirken einer konstanten Kraft auf ein im Gleichgewicht befindliches System zu untersuchen. Seine Methode fand denn auch in neuerer Zeit Anwendung, zuerst von H. W. Malcolm[2]) 1912, dann von A. Kunert[3]) 1915 und neuerdings 1916 fast gleichzeitig von K. W. Wagner[4]) und M. Siegbahn[5]). Während Heaviside keinen Beweis für sein Verfahren angab und die Beweise von Malcolm, Kunert und Siegbahn nicht mit jener Schärfe geführt wurden, um auch nur ein Eingehen auf jene Fälle zu gestatten, in denen die Methode einer Abänderung bedarf,

---

[1]) Electromagnetic Theory, London 1899, Vol. II, S. 127.

[2]) The Theory of the submarine Cable. „The Electrician" 1912, 1913 und 1914.

[3]) Kunert, Berechnungen über den Stromverlauf in Telegraphenkabeln. Tel.- und Fernsprechtechnik 1915, **4**, 8. Heft, S. 73 bis 236.

[4]) K. W. Wagner, Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen. (Mit Anwendungsbeispielen.) Diese Zeitschrift 1916, Bd. **4**, S. 159.

[5]) M. Siegbahn, Elektromagnetische Wellen in Spulen mit Windungskapazität. Diese Zeitschrift 1916, Bd. **4**, S. 305.

ist K. W. Wagner nicht nur ein vollgültiger Beweis gelungen, sondern er hat die reiche Anwendungsmöglichkeit durch eine Auslese von Beispielen[1]) dargetan.

Von der Vermutung geleitet, daß die Funktionentheorie, wenn sie uns mit einem Griff so wertvolle Hilfsmittel für den singulären Fall der „Einschaltvorgänge mit konstanter Kraft" bietet, uns auch dann nicht verlassen wird, wenn wir sie zur Aufklärung der allgemeinsten Vorgänge in Stromkreisen heranziehen, also der Ausschaltvorgänge, der Ein- und Ausschaltvorgänge mit Wechselstrom, der Vorgänge bei Einwirkung beliebiger, veränderlicher Kräfte überhaupt, können wir in der Tat — und damit beschäftigt sich die vorliegende Arbeit — eine sehr allgemeine „Theorie der Vorgänge in Stromkreisen" konstruieren und deren elegante Anwendung an unseren Problemen nutzen.

B. Definitionen und Lehrsätze.

1. Wir erinnern uns zunächst an folgende Definition: Unter einer linearen Differentialgleichung versteht man eine solche, in der die gesuchte Funktion und ihre Differentialquotienten nur in erster Potenz vorkommen und auch Produkte mehrerer derselben nicht auftreten. Die allgemeinste lineare Differentialgleichung kann also geschrieben werden:

$$A_0 + A_1 y + A_2 \frac{dy}{dt} + A_3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + A_{n+1} \frac{d^n y}{dt^n} = 0, \quad \ldots \ldots \quad \text{I)}$$

worin die Koeffizienten A_0, $A_1 \ldots A_n$ Funktionen nur von t allein bedeuten.

2. Als eine der hervorstechendsten Eigenschaften der physikalischen Vorgänge, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, gilt das Gesetz, daß die das System beeinflussenden Kräfte in ihrer Gesamtheit dieselbe Summenwirkung hervorbringen, als wenn man sie nacheinander auf das System wirken lassen würde.

Das Glied A_0 in Gl. I) stellt nämlich gewöhnlich den gegebenen zeitlichen Verlauf der eingeprägten Kraft dar. Es sei nun eine zweite Kraft B_0 von völlig anderem Verlauf gegeben und es sei η die Lösung derselben Differentialgleichung für diese neue eingeprägte Kraft:

$$B_0 + A_1 \eta + A_2 \frac{d\eta}{dt} + A_3 \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \ldots + A_{n+1} \frac{d^n \eta}{dt^n} = 0. \quad \ldots \ldots \quad \text{II)}$$

Addiert man, so erkennt man ohne weiteres:

$$(A_0 + B_0) + A_1 (y + \eta) + A_2 \frac{d}{dt}(y + \eta) + A_3 \frac{d^2}{dt^2}(y + \eta) + \ldots = 0.$$

In der Tat ist also $y + \eta$ eine Lösung derselben Differentialgleichung für den Fall der gleichzeitigen Wirkung beider Kräfte.

3. Es ist bekannt, daß man diese Eigenschaft der linearen Differentialgleichung dazu benutzt, um auch für den Fall komplizierter eingeprägter Kräfte durch Zerlegung in Teilkräfte mit Hilfe von Fourierschen Reihen die Gleichungen lösen zu können. Ja selbst die Zerlegung in unendlich viele Teilkräfte, also in ein (Fouriersches) Integral wurde für den Fall einer, zu gewisser Zeit einsetzenden konstanten Kraft unter besonders einfachen Annahmen (konstante Koeffizienten A_1, $A_2 \ldots A_n$) vorgenommen (Heaviside-Wagner).

4. Wir wollen nun im folgenden zunächst eine sehr bekannte Methode der Integration linearer Differentialgleichungen verallgemeinern:

Diese Methode bezieht sich auf die Gruppe der homogenen linearen Differential-

[1]) Eine sehr große Zahl von Beispielen für verschiedene wichtige Schaltungen des Telegraphenbetriebes gibt auch A. Kunert a. a. O.



gleichungen (also solcher mit $A_0 = o$) mit konstanten (von der Zeit unabhängigen) Koeffizienten $A_1, A_2 \ldots A_n$:

$$A_1 y + A_2 \frac{dy}{dt} + \ldots + A_{n+1} \frac{d^n y}{dt^n} = o.$$

Die Exponentialfunktion e^t steht bekanntlich zu dieser Gruppe von Gleichungen in einer Beziehung, die eine Integration ermöglicht: Setzt man als partikuläres Integral:

$$y = a \cdot e^{mt},$$

so ergibt sich:

$$A_1 y + A_2 m y + \ldots + A_{n+1} m^n y = o.$$

In dieser Gleichung hat jedes Glied die Form Hy, in der H eine Konstante bedeutet.

4a. Was die Exponentialfunktion für die Gruppe der homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten leistet, wird durch andere Funktionsgattungen für gewisse anders umgrenzte Gruppen von linearen Differentialgleichungen erzielt. Um ein Beispiel zu nennen, kann man eine derartige Gruppe (gebildet durch alle möglichen Zusammenstellungen der konstanten Koeffizienten A_1, A_2 usw.) in folgender Weise konstruieren:

$$A_1 y + A_2 x \frac{dy}{dx} + A_3 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + A_{n+1} x^n \frac{d^n y}{dx^n} = o.$$

Wird hier als partikuläres Integral die Funktion:

$$y = a \cdot x^m$$

eingesetzt, so ergibt sich:

$$A_1 y + A_2 m y + A_3 m (m - 1) y + \ldots A_{n+1} [m (m - 1)(m - 2) \ldots (m - \overline{n - 1})] y = o.$$

In der Tat hat also wieder jedes Glied die Form: $H \cdot y$. Man kann also allgemein sagen:

4b. Es gibt gewisse Gruppen von linearen Differentialgleichungen, deren jede eine offenkundige Verwandtschaft zu einer für sie typischen Klasse von Funktionen hat. Wird eine solche Funktion als partikuläres Integral in die betreffende Differentialgleichung eingesetzt, d. h. werden die angezeigten Differentiationen wirklich vollzogen, so sieht man, daß sich jedes einzelne Glied der Differentialgleichung als ein Produkt aus der gesuchten Funktion selbst mit einem von der Zeit (bzw. der unabhängigen Variabelen) unabhängigen konstanten Faktor ergibt.

5. Insbesondere für die Gruppe der homogenen ($A_0 = o$) linearen Differentialgleichungen mit konstanten (von der Zeit unabhängigen) Koeffizienten sind es die Exponentialfunktionen, die dieses leisten; unsere Theorie wird sich aber keineswegs auf diese Gruppe beschränken.

6. Festsetzung: Wir werden im folgenden die eingeprägten Kräfte, gleichgültig ob diese die Natur von Strömen, elektromotorischen Kräften, mechanischen oder anderen Kräften haben, als Diagramm-Vektoren betrachten und ebenso die gesuchten Funktionen, also als 2-dimensionale Gebilde, wie es z. B. der nach Amplitude und Phase gegebene Wechselstrom ist. Demgemäß sind alle jene Kräfte als komplexe Größen darstellbar.

7. Wo es uns freisteht, eine zeitlich (oder räumlich; siehe 72) gegebene eingeprägte Kraft als Vektor in die Rechnung einzuführen, soll dies stets so geschehen, daß der gegebene Wert als imaginärer Bestandteil des Vektors erscheint. Auch die gesuchten Größen ergeben sich dann bekanntlich als die imaginären Anteile der in komplexer Form auftretenden Resultate.

8. Definition: Unter dem „determinierenden Parameter" p eines Kraftvektors K(p, t) soll im folgenden eine komplexe Zahl verstanden werden, die als unabhängige Variabele einen bestimmenden Einfluß auf den zeitlichen Verlauf der betreffenden Kraft hat.



Einen solchen determinierenden Parameter bildet z. B. $p = -\delta + i\omega$, wo δ den Dämpfungsexponenten und ω die Frequenz eines abklingenden Wechselstromes bedeuten; der Vektor des Stromes ist in diesem Falle eine Exponentialfunktion:

$$J_0 e^{pt} = J_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

oder in reeller Form: (Anmerkung im vorigen Abschnitt)

$$J = J_0 e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

9. Die Werte des determinierenden Parameters erfüllen gleichmäßig eine Zahlenebene (entsprechend z. B. der doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit aller möglichen Zusammenstellungen von Dämpfungs- und Frequenzwerten) und der von ihr abhängende Kraftvektor ist für jeden betrachteten Zeitpunkt eine Funktion dieser komplexen Variabelen; die Gesamtheit der Werte, die die Kraft in den einzelnen Punkten der Parameter-Zahlenebene annimmt, erfüllt in jedem neuen Augenblick eine neue Zahlenebene.

10. Festsetzung. Von der Betrachtung seien im folgenden alle jene Bereiche ausgeschlossen, in denen der Kraftvektor den Wert unendlich annimmt; dies wäre durch Spezialisierung nicht nur des determinierenden Parameters möglich, sondern auch der Zeit. Hätte z. B. die eingeprägte Kraft die Form:

$$K(p, t) = E_0 t^p,$$

so wäre diese Größe zwar für jedes endliche positive und negative p endlich, in dem singulären Falle aber, in dem gleichzeitig p negativ und $t = 0$ ist, unendlich; dieser Ansatz ist also nach der soeben angenommenen Festsetzung für uns unbrauchbar. (Siehe 67.)

11. Lehrsatz (Satz von Cauchy)[1]).

Denken wir uns in der Zahlenebene des determinierenden Parameters p ein Gebiet abgegrenzt, in dem zu jeder betrachteten Zeit der Kraftvektor P endlich bleibt, so kann man den Wert, den der Kraftvektor in einem beliebigen inneren Punkte ν dieses Bereiches annimmt, ausdrücken durch die Werte desselben Kraftvektors auf dem Rande p des Bereiches und zwar mit Hilfe der Formel:

$$P(\nu) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{P(p)}{p - \nu} dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Dabei erstreckt sich das Zeichen $\oint$ auf den ganzen Rand des Bereiches.

12. Spezialfall. Ist P auf dem Rande konstant und gleich P_0 und begrenzen wir den Bereich durch eine Kreislinie um den Punkt $p = \nu$ vom Radius 1, so ist, wenn α den Arcus des jeweiligen Punktes bedeutet:

$$p - \nu = e^{j\alpha}$$

und

$$dp = j e^{j\alpha} d\alpha$$

mithin:

$$\frac{dp}{p - \nu} = j\, d\alpha$$

und das Integral:

$$\oint \frac{P_0}{p - \nu} dp = 2\pi j P_0,$$

also:

$$P_\nu = P_0.$$

ein Resultat, das wir auf anderem Gebiete bereits kennen: In einem durch homogene Zugkräfte oberflächlich gleichmäßig elastisch beanspruchten Körper entstehen auch im

[1]) Vgl. z. B. Durège, Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin, Leipzig, Teubner.



ganzen Inneren konstante Reaktionskräfte derselben spezifischen Stärke und gleicher Richtung.

13. Die eigentümliche Behandlungsweise der linearen Differentialgleichungen, der wir uns im folgenden zuwenden, gründet sich auf folgender Vorstellung: Wir denken uns den zeitlichen (oder räumlichen) Verlauf irgendeines Vorganges nicht mehr als eine Folge von augenblicklichen Werten, sondern übersehen spontan den gesamten Vorgang als etwas Ganzes, sprechen also vom „Gleichstrom-Vorgang" vom Wechselstrom-Vorgang, von den Vorgängen, die durch linear oder exponentiell fallende oder steigende Größen bestimmt sind. Vergangenheit und Zukunft haben in diesem Schaubilde eines Vorganges voreinander nichts voraus, und die in diesem Sinne betrachteten Systemgrößen verlieren die Unbestimmtheit, die sie als Lösungen der Differentialgleichungen besitzen (Integrationskonstanten).

Beispiel 1: Die eingeprägte Kraft:

$$K_0 \cdot e^{-\frac{t}{p}},$$

in der p einen positiven kleinen Wert haben soll, nimmt für positive Zeiten um so rascher ab, je kleiner p ist; für $t = 0$ wird der Ausdruck gleich K_0. Läßt man jetzt p über alle Maßen abnehmen (aber nicht bis auf Null), so stellt jener Ausdruck eine eingeprägte Kraft vor, die im Augenblick $t = 0$ vom Werte K_0 auf den Wert 0 springt und sich nicht wieder erhebt. Dieser Vorgang wird als Ganzes aufgefaßt und soll mit dem Namen „Einheitsvorgang" belegt werden.

Beispiel 2: Wenn wir in dem vorigen Beispiel dem Parameter p nicht einen unendlich kleinen, sondern einen endlichen positiven Wert beilegen, so stellt die Funktion $K_0 e^{-\frac{t}{p}}$ eine eingeprägte Kraft vor, die zur Zeit $t = 0$ vom Werte K_0 allmählich gegen 0 absinkt. Wir wollen im weiteren Sinne auch diesen Vorgang als Einheitsvorgang bezeichnen. In ihm ist also der Einheitsvorgang des Beispiels 1 als Spezialfall enthalten,

Beispiel 3: Die Funktion:

$$K_0 e^{pt + j\omega \tau}$$

stellt für die imaginären Werte $p = j\omega$ einen Einheitsvorgang dar, der als ein zur Zeit $t = 0$ mit einem gewissen Anfangswert einsetzender Wechselstromvorgang erscheint.

Wir fassen dies alles in folgender Definition zusammen: Definition: Den durch einen Wertbereich (oder auch nur durch einen einzelnen Wert) des determinierenden Parameters bestimmten Vorgang nennen wir einen Einheitsvorgang.

14. Lehrsatz: Jeder definierte Vorgang läßt sich darstellen als ein Spezialfall aus der zu irgendeinem Einheitsvorgang gehörigen Gruppe (Werte von p). Denn er läßt sich auf unzählige Arten mit einem gewissen Werte eines determinierenden Parameters in Verbindung bringen (13).

Statt durch Spezialisierung des determinierenden Parameters kann man dann den vorgegebenen, definierten Vorgang auch mit Hilfe der Gl. 1) als Superposition einer Reihe von Vorgängen aus der Gruppe des Einheitsvorganges darstellen.

15. In 1. hatten wir aus der Gesamtheit der linearen Differentialgleichungen gewisse Gruppen herausgehoben, die dadurch ausgezeichnet waren, daß für jede dieser Gruppen eine bestimmte, für diese typische Funktion existierte, die sowohl den zeitlichen Verlauf der eingeprägten Kraft, als auch den jedes einzelnen Gliedes der Differentialgleichung bestimmt; wir können und wollen nunmehr annehmen, daß jede dieser Gruppen von Differentialgleichungen die Gesamtheit der zu einem Einheitsvorgang gehörigen Einzelvorgänge darstelle; wir nennen die dem Einheitsvorgang entsprechende Differentialgleichung die „determinierende Differentialgleichung". Als Beispiel mögen die Entwicklungen in 17. dienen.



Der Cauchysche Satz gibt nunmehr im Verein mit der Eigenschaft der ungestörten Superposition der linearen Differentialgleichungen (2.) folgenden:

16. Lehrsatz: Jeder beliebige, durch eine lineare Differentialgleichung beschriebene Vorgang läßt sich auffassen als Superposition einer unendlichen Zahl von Einzelvorgängen, die zu einem und demselben Einheitsvorgang gehören.

Der Vektor der eingeprägten Kraft wird darin einerseits durch Spezialisierung des determinierenden Parameters, andererseits als Randintegral um einen (im allgemeinen unbestimmten), diesen Spezialwert enthaltenden Bereich in der komplexen Ebene des determinierenden Parameters erhalten.

17. Beispiel: Die allgemeine lineare, jedoch nicht homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y + A_1 y' + A_2 y'' + \ldots + A_n y^{(n)} = K, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

wo K eine Konstante bedeutet, läßt sich unter anderem auf folgende Weise zu einer determinierenden Differentialgleichung erweitern: Als speziellen Wert des determinierenden Parameters p wählen wir den Nullpunkt. Wir benutzen ferner die bekannte Eigenschaft der homogenen, linearen Differentialgleichungen, ein partikuläres Integral Ae^{Bt} zu besitzen (A, B sind Konstante), das nach Ausführung der Differentiationen jedes Glied der Differentialgleichung in der nämlichen Form (Me^{Bt}) erscheinen läßt; wir machen die vorgegebene (durch das konstante Glied) inhomogene Differentialgleichung dadurch zu einer determinierenden, daß wir die Konstante K als einen Spezialfall derselben Form (Me^{Bt}) betrachten und zwar, wie wir angenommen haben, für den Wert des determinierenden Parameters $p = 0$.

Das läßt sich z. B. erreichen durch den Ansatz:

$$K = \lim_{p=0} K e^{pt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Die determinierende Differentialgleichung lautet dann:

$$y + A_1 y' + \ldots + A_n y^{(n)} = K e^{pt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

und stellt einen Einheitsvorgang im Sinne von 13. dar. Statt durch Spezialisierung des determinierenden Parameters läßt sich (14.) der vorgegebene Vorgang dann auch als Superposition von Vorgängen aus der Gruppe des Einheitsvorganges darstellen; nach Gl. 1) und 4) erhält man:

$$K = y + A_1 y' + \ldots = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{K e^{pt}}{p} dp, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

eine Gleichung, die man auch für jeden Wert der Bereichsgrenze bilden kann:

$$y_p + A_1 y'_p + \ldots = \frac{1}{2\pi j} \frac{K e^{pt}}{p} dp \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Hier hat jedes Glied $A_k y_p^{(k)}$ die Form He^{pt}, also die Form Ny_p; es ergibt sich also:

$$y_p \{1 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots + A_n p^n\} = y_p Z(p) = \frac{1}{2\pi j} \frac{K e^{pt}}{p} dp$$

und nach dem Superpositionsprinzip, in Übereinstimmung mit dem Lehrsatz im vorigen Abschnitt:

$$y = \Sigma y_p = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{K e^{pt}}{p Z(p)} dp \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

C. Die allgemeine Superpositions-Formel.

18. Im allgemeinen ist nicht, wie in Gl. 7), die Exponentialfunktion das für die determinierende Differentialgleichung typische partikuläre Integral. sondern irgendeine andere Funktion K(p, t), die den Bedingungen des Abschnittes 11 gehorcht. Sonst aber bleibt die Betrachtung dieselbe und man erhält analog Gl. 7) ganz allgemein:

$$y = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{K(p,t)}{(p-\nu)\,Z(p)}\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Dieses Integral läßt sich nach den Regeln der Funktionentheorie dadurch auswerten, daß man das Residuum im Punkte ν bestimmt (siehe weiter unten), und es gilt schließlich der

19. Lehrsatz: In jeder, durch den Einheitsvorgang dargestellten Erscheinung lassen sich die gesuchten Systemgrößen durch die folgende „Allgemeine Superpositions-Formel" berechnen:

$$y = \frac{K(\nu,t)}{Z(\nu)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{K(p_k,t)}{(p_k-\nu)\,[Z'(p)]_{p=p_k}}\,dp, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

wo die p_k die n Wurzeln der Gleichung:

$$Z(p) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

und $Z'(p)$ den nach p genommenen Differentialquotienten von $Z(p)$ bedeuten.

20. Beweis: Bliebe

$$\frac{K(p,t)}{Z(p)}$$

im ganzen Bereich endlich, so würde Gl. 8), dem Cauchyschen Satze (11.) gemäß, den Wert

$$\frac{K(\nu,t)}{Z(\nu)},$$

also das erste Glied von Gl. 9) ergeben. Da aber dieser Ausdruck wegen Gl. 10) in n Punkten unendlich wird, müssen wir erst diese n Punkte aus unserem Bereiche herausschälen. In der Nähe jedes dieser Punkte p_k geht $K(p, t)$ gleichmäßig in die (für p) konstante Größe $K(p_k, t)$, $p-\nu$ ebenso in die Größe $p_k-\nu$ über; setzt man in erster Annäherung für die nächste Umgebung des Punktes p_k diese Konstanten vor das Integralzeichen, so bleibt unter diesem nur der Wert $\frac{dp}{Z(p)}$, der für $p = p_k$ gleich unendlich wird. $Z(p)$ geht dabei gleichmäßig in den Wert 0 über und ist daher nach dem Taylorschen Satze dort in erster Annäherung bestimmt durch den betreffenden Wert des ersten Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_{p=p_k} \cdot \varrho,$$

wo ϱ den (gerichteten!) Radius eines um p_k geschlagenen verschwindenden Kreises bedeutet; nunmehr ist auch $[Z'(p)]_{p_k}$ aus dem Integral herauszuheben und es bleibt:

$$\oint \frac{dp}{\varrho} = \oint \frac{\varrho\, j\, d\alpha}{\varrho} = 2\pi j.$$

Für jede Wurzel p_k der Gl. 10) ergibt also Gl. 8):

$$y_k = \frac{K(p_k,t)}{(p_k-\nu)\,[Z'(p)]_{p_k}}.$$

Durch Summation über sämtliche Teilbereiche erhält man also in der Tat die Gl. 9), was zu beweisen war[1]).

21. Anmerkung: Unser Beweis ist hinfällig, wenn auch der erste Differentialquotient von $Z(p)$ den Wert 0 ergibt und ferner, wenn p_k zufällig den Wert ν annimmt. Um gleich den allgemeinen Fall zu erfassen, nehmen wir an, die Gleichung

$$(p - \nu) Z(p) = 0$$

habe im Punkte p_k eine σfache Wurzel. Setzt man den Wurzelfaktor $p - p_k = \xi$, so kann man das linksstehende Produkt auch schreiben:

$$(p - \nu) Z(p) = \xi^\sigma Z_1,$$

wo Z_1 eine Funktion von p ist, die im Punkte $p = p_k$ gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert. Die Partialbruchzerlegung ergibt dann bekanntlich:

$$\frac{1}{(p - \nu) Z(p)} = \frac{A_k}{\xi^k} + \frac{A_{k-1}}{\xi^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{\xi} + G(\xi), \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

wo G eine ganze Funktion von ξ bedeutet.

Anderseits läßt sich auch $K(p, t)$ in der Umgebung von p_k nach Potenzen von ξ entwickeln:

$$K(p, t) = K(p_k + \xi, t) = K(p_k, t)\left\{1 + \xi\left(\frac{K'}{K}\right)_{p_k} + \frac{\xi^2}{2!}\left(\frac{K''}{K}\right)_{p_k} + \ldots\right\}. \quad . \quad . \quad 12)$$

Aus Gl. 11) und 12) erhält man so:

$$\begin{aligned}\frac{K(p, t)}{(p - \nu) Z(p)} = K(p_k, t)\Big\{&(G + G\xi + \ldots) + \left[\frac{A_1}{\xi} + A_1 + \frac{A_1}{2!}\xi\left(\frac{K''}{K}\right)_{p_k} + \ldots\right] \\ &+ \left[\frac{A_2}{\xi^2} + \frac{A_2}{\xi}\left(\frac{K'}{K}\right)_{p_k} + \ldots\right] \\ &+ \left[\frac{A_3}{\xi^3} + \frac{A_3}{\xi^2}\left(\frac{K'}{K}\right)_{p_k} + \frac{A_3}{2!\,\xi}\left(\frac{K''}{K}\right)_{p_k} + \ldots\right] \\ &+ \ldots\Big\}.\end{aligned}$$

Man kann in ähnlicher Weise wie früher unschwer zeigen, daß nur diejenigen Glieder bei der Integration in Betracht kommen, die den Faktor $\frac{1}{\xi}$ enthalten (Definition des „Residuums"). Somit ist im Falle einer σfachen Wurzel des Ausdruckes:

$$(p - \nu) Z(p) = 0$$

in die allgemeine Superpositionsformel statt des betreffenden Gliedes:

$$\frac{K(p_k, t)}{(p_k - \nu)[Z'(p)]_{p_k}}$$

folgender Ausdruck zu setzen:

$$P_k = A_1 K(p_k, t) + \sum_{n=2}^{\sigma} \frac{A_n}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} K}{\partial p^{n-1}}\right)_{p_k}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

wo die A_n die Koeffizienten der Entwicklung Gl. 11) sind.[2])

[1]) Man könnte gegen diese Beweisführung einwenden, daß man es ja gar nicht nötig habe, über einen Bereich zu integrieren, der alle Wurzeln der Gleichung $Z(p) = 0$ enthält; in der Tat, solange es sich um stetige Vorgänge oder nur um Annäherungen handelt, kann man den Bereich stets auf ein engeres Gebiet um ν beschränken; in unseren Problemen handelt es sich aber gerade um eingeprägte Kräfte, die zur Zeit $t = 0$ unstetig sind; da diese Unstetigkeit nur durch extreme Werte von p parallelisiert werden kann, ist man in der Regel gezwungen, den Rand über alle Grenzen wachsen zu lassen.

[2]) Diese Beweisführung ist derjenigen ganz ähnlich, die K. W. Wagner für die Heavisidesche Formel im Falle mehrfacher Wurzeln angewandt hat.

22. Über das Fehlen von unbestimmten Integrationskonstanten in der Superpositionsformel.

Lehrsatz: Wenn man in einer Differentialgleichung, die keinen Einheitsvorgang darstellt, die willkürlichen Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt hat, so ist es für den Ablauf der weiteren Erscheinungen gleichgültig, ob diese Anfangswerte durch ein plötzliches, gewaltsames Eingreifen in den Gang der durch die Differentialgleichungen beherrschten Erscheinungen entstanden sind, oder ob es Werte sind, die inmitten der sich abspielenden Vorgänge beobachtet worden sind.

Denn für die Differentialgleichung sind nur die Werte selbst, nicht die Entstehungsbedingungen maßgebend.

23. Obwohl also z. B. ein Einschaltvorgang eine gewaltsame Änderung des Betriebszustandes bedeutet, so kann man ihn, dem vorigen Satze gemäß, ideell auch auffassen als stetigen Vorgang, bei dem es nur darauf ankommt, daß zu einer gewissen Zeit auch gewisse Systemwerte erreicht sind.

24. Es ist also erlaubt, die Zeit vor dem Schalten durch einen beliebigen Vorgang auszufüllen, wenn nur im Momente des Schaltens die vorgeschriebenen Werte eingehalten sind.

25. Hat man es nun gar in der Hand, diesen gesamten, nunmehr stetigen zeitlichen Vorgang in lauter Einheitsvorgänge zu zerlegen, d. h. in Vorgänge, die man als Ganzes durch wenige für den Gesamtverlauf charakteristische, von der Zeit unabhängige Größen (die determinierenden Parameter) beschreiben kann, so ergibt die ungestörte Superposition dieser Vorgänge den nicht stetigen Vorgang als Zusammensetzung von nur stetigen Vorgängen. Bei diesen steht also der gesamte zeitliche Verlauf der Form nach fest und wird nur durch die betreffenden Parameter festgelegt.

26. In diesem Sinne ist auch jede (bereits lange Zeit bestehende) gedämpfte Schwingung ein Einheitsvorgang, und die Gesamtheit aller solcher Schwingungen bildet eine Gruppe. Zu jeder Schwingung gehört eine Kraft und eine Wirkung, die durch einfache Beziehungen [$Z(p)$ in Gl. 8)], die von der Zeit nicht abhängen, miteinander verknüpft sind. Als Gesamtwirkung hat man die Summe der Einzelwirkungen; für jeden beliebigen Zeitpunkt ist dann diese Summe das vollständige Integral der Differentialgleichung; der Natur dieser Aufgabe gemäß sind also Integrationskonstanten hier nicht mehr zu bestimmen; die Bestimmtheit der durch die determinierenden Parameter gegebenen Gruppe reicht für die vollständige Lösung des Problems hin.

27. Wenn man nun aber einen gewissen Anfangszustand dadurch auszeichnen will, daß man einer gegebenen Phase des Verlaufs der eingeprägten Kraft eine gewisse Zahl von Systemkonstanten zuordnen will, so scheint das zunächst unter diesen Umständen nicht mehr möglich. Es wird aber möglich, wenn man bedenkt, daß man die eingeprägte Kraft in ihrer Phase beliebig in Rechnung setzen kann, so daß man eine unendliche Mannigfaltigkeit von Zeitfunktionen für denselben Vorgang zur Verfügung hat. Unter dieser Mannigfaltigkeit muß man dann so wählen, daß zu einer gewissen Zeit die Systemgrößen gerade dem Anfangszustand angepaßt sind (siehe das Beispiel auf S. 261).

II. Anwendung der Theorie.

Obwohl die Anwendungen dieser Theorie nicht auf elektrische Probleme beschränkt sind, mögen, um den Rahmen der Arbeit nicht zu überschreiten, nur solche behandelt werden.

Wir übergehen hier die Einschaltvorgänge bei konstanter EMK (dem „Dauerzeichen" in der Telegraphie) oder bei konstantem Strom, weil diese ausführlich bereits



von A. Kunert und K. W. Wagner[1]) a. a. O. mit Hilfe der Formel von Heaviside behandelt worden sind.

A. Das Kurzschließen eines Gleichstromkreises.

Hier, wie in den meisten der später zu behandelnden Fälle werden wir uns darauf beschränken, Systeme zu betrachten, deren Eigenschaften (Widerstand, Induktivität, Kapazität, Trägheitsmoment usw.) zeitlich konstant sind; die Koeffizienten der entsprechenden linearen Differentialgleichungen sind dann konstante Größen.

Wenn es sich außerdem um einen Gleichstromvorgang handelt, so wird man nach 17. eine determinierende Differentialgleichung ansetzen können, indem man der eingeprägten Kraft die Form einer Exponentialfunktion zuerteilt.

Da wir ferner einen Kurzschlußvorgang betrachten, so muß sich durch Spezialisierung des determinierenden Parameters p — die am einfachsten durch $p = 0$ vorgenommen werden kann — für den Vektor der eingeprägten Kraft der Wert 0 ergeben.

Anderseits aber muß im Augenblicke $t = 0$ dieser Wert unbestimmt sein; die eingeprägte elektromotorische Kraft muß sprungweise vom konstanten Werte E auf 0 sinken. Alles dies leistet der Ansatz:

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{p}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 14)$$

im Verein mit der Festsetzung:

$$\lim_{t=0,\ p=0} E = E_0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad 15)$$

In der Tat verschwindet dieser Ausdruck für jeden, von 0 verschiedenen, positiven Wert von t für $p = 0$[2]).

28. Kurzschließen einer Spule mit dem Ohmschen Widerstand R und der Induktivität L.

Die determinierende Differentialgleichung:

$$iR + L\frac{di}{dt} = E_0 e^{-\frac{t}{p}}$$

geht nach Ausführung der Differentiationen (17.) in die Form:

$$i_p\left\{R - \frac{L}{p}\right\} = i_p Z(p) = E_0 e^{-\frac{t}{p}}$$

über. Gemäß Gl. 9) und 10) ist, da aus

$$Z(p) = 0$$

$$p_1 = \frac{L}{R}$$

hervorgeht, und da

$$\nu = 0; \qquad K(\nu, t) = 0; \qquad Z(0) = \infty$$

und

$$p_1 [Z'(p)]_{p=p_1} = \frac{L^2}{p_1^2 R} = R$$

die bekannte Abklingungsformel:

$$i = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 16)$$

29. Das Schalten großer Gleichstrommotoren („Grobschaltungen").

Es hat sich mitunter als vorteilhaft erwiesen, an Gleichstrommotoren von großer

[1]) Siehe die Fußnoten auf S. 225.

[2]) Für negative Werte von t und $p = 0$ wird $E = \infty$; um dies zu parallelisieren (siehe Anmerkung zu 20.), sind dem p wieder extrem hohe Werte beizulegen.



Leistung (einige hundert KW), insbesondere für elektrische Schiffsantriebe, sog. Grobschaltungen vorzunehmen, d. h. Schaltungen unter Weglassung der Anlaß- und Kurzschlußwiderstände. Angaben über derartige Versuche, die im Prüffeld der Siemens-Schuckertwerke ausgeführt wurden, finden sich bei C. Trettin[1]) 1912, der auch einige der wichtigsten Fälle analytisch behandelt[2]).

Wir wollen uns hier insbesondere mit dem Bremsvorgang befassen, der bei plötzlichem Kurzschluß des mit voller Umdrehungszahl laufenden Motors vor sich geht. Dieser Kurzschluß erfolge über einen induktiven Bremswiderstand; dieser läßt im Verein mit der Ankerinduktivität den beim Kurzschluß einsetzenden Strom nur allmählich auf eine gewisse Höhe anwachsen; mit abnehmender Tourenzahl sinkt dann die gegenelektromotorische Kraft und mit ihr auch wieder der Strom.

Trägheitsmoment und Induktivität bewirken hier eine „Phasenverschiebung" des Stromes gegenüber der Winkelgeschwindigkeit, und so kommt es, daß auch beim Stillstand des Motors die Stromstärke noch nicht den Wert 0 erreicht hat; sie dreht den Anker in umgekehrter Richtung und es tritt daher unter Umständen ein Pendeln des Ankers auf.

30. Es sei L die Gesamtinduktivität, R der Gesamtwiderstand des Ankerstromkreises; T sei das Trägheitsmoment des Ankers samt einer etwa von ihm angetriebenen Schwungmasse. i bedeute den Ankerstrom, ω die Winkelgeschwindigkeit, E die Netzspannung und $e = k\omega$ die gegenelektromotorische Kraft, wobei k eine experimentell aus der Beziehung:

$$k = \frac{e_0}{\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

zu findende Konstante ist; der Index 0 soll hier den Zustand bei normaler Tourenzahl kennzeichnen.

Es gilt dann für den Stromkreis:

$$iR + L\frac{di}{dt} + k\omega = E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

und für den sich drehenden Anker:

$$T\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{9{,}81}\cdot i,$$

oder wenn man

$$9{,}81\,T = \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

setzt:

$$i = \frac{\Theta}{k}\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

31. Wir charakterisieren den Einheitsvorgang wieder durch die Formen:

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{p}}$$

$$i = A e^{-\frac{t}{p}}$$

$$\omega = B e^{-\frac{t}{p}}$$

und erhalten aus Gl. 18) und 20):

$$\left(-\frac{L}{p} + R\right)i + k\omega = E, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

[1]) C. Trettin, Das Abschalten großer Gleichstrommotoren ohne Vorschaltwiderstände. ETZ 1912, S. 759.

[2]) Auch für die Zugbeleuchtung elektrischer Bahnen mittels Motor-Dynamo wichtig, indem beim Herunterfallen und wieder Anlegen des Stromabnehmers für die Lampen gefährliche Spannungsschwankungen zu befürchten wären. Siehe z. B. P. Amsler, Zugbeleuchtung bei elektrischen Bahnen mit hochgespanntem Gleichstrom. ETZ 1912, S. 342.

$$i = -\frac{\Theta}{kp}\omega \qquad 22)$$

Eliminiert man aus Gl. 21) und 22) ω, so erhält man wieder:

$$i\,Z(p) = E,$$

wo

$$Z(p) = R - \frac{L}{p} - \frac{k^2 p}{\Theta} = -\frac{k^2}{\Theta p}\left\{p^2 - \frac{R\Theta}{k^2}p + \frac{L\Theta}{k^2}\right\} \qquad 23)$$

mit den Wurzeln:

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = \frac{R\Theta}{2k^2} \pm j\sqrt{\frac{L\Theta}{k^2} - \frac{R^2\Theta^2}{4k^4}} = \alpha \pm j\beta \qquad 24)$$

Gl. 23) läßt sich auch schreiben:

$$Z(p) = -\frac{k^2}{\Theta p}(p - p_1)(p - p_2), \qquad 25)$$

woraus man unter Berücksichtigung von $[Z(p)]_{1,2} = 0$ erhält:

$$p\,Z'(p) = -\frac{k^2}{\Theta}(\overline{p - p_1} + \overline{p - p_2}),$$

also nach Gl. 24):

$$\left.\begin{aligned} p_1[Z'(p)]_{p_1} &= -\frac{2k^2}{\Theta}\beta \cdot j \\ p_2[Z'(p)]_{p_2} &= +\frac{2k^2}{\Theta}\beta \cdot j \end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

In der allgemeinen Superpositionsformel 9) fällt das erste Glied wieder weg, die Summe reduziert sich auf zwei Glieder:

$$i = \frac{E_0 e^{-\frac{t}{\alpha + j\beta}}}{-\frac{2k^2}{\Theta}\beta j} + \frac{E_0 e^{-\frac{t}{\alpha - j\beta}}}{\frac{2k^2}{\Theta}\beta j} \qquad 27)$$

und man kann unschwer zeigen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + j\beta} &= \mu - j\nu \\ \frac{1}{\alpha - j\beta} &= \mu + j\nu \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

wenn

$$\mu = \frac{R}{2L}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{k^2}{L\Theta} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

ist. Es ist ferner:

$$\frac{k^2}{\Theta}\beta = \frac{k^2 L}{\Theta L}\sqrt{\frac{L\Theta}{k^2} - \frac{R^2\Theta^2}{4k^4}} = L\nu \qquad 28')$$

und es wird daher:

$$i = \frac{E_0 e^{-\mu t}}{2L\nu} j\left\{e^{j\nu t} - e^{-j\nu t}\right\} = -\frac{E_0}{L\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t \qquad 29)$$

32. Bevor wir nunmehr daran gehen, auch den zeitlichen Verlauf der Tourenzahl zu bestimmen, sei noch folgendes vorausgeschickt, dessen man sich in ähnlichen Fällen mit Vorteil wird bedienen können.

1. Anmerkung: Es sei Z eine algebraische Funktion von p, und zwar lasse sie sich (wie das in den Anwendungen häufig ist) darstellen durch die Form:

$$Z = \frac{A}{p^m}(p^n + \alpha p^{n-1} + \beta p^{n-2} + \ldots + \tau).$$

Es seien ferner $p_1, p_2 \ldots p_n$ die Wurzeln des Klammerausdruckes. Es ist dann:

$$Z = \frac{A}{p^m}(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n) = \frac{A}{p^m}\prod_1^n(p-p_k) \quad \ldots\ldots \quad 30)$$

Der mit p multiplizierte Differentialquotient wird [unter Berücksichtigung, daß $\prod\limits_1^n p_i - p_k) = 0$, weil der Faktor $(p_i - p_i)$ darunter ist]:

$$p\frac{dZ}{dp} = \frac{A}{p^{m-1}}\sum_{i=1}^n \frac{\prod\limits_1^n(p-p_k)}{p-p_i}.$$

Für $p = p_i$ verschwinden die Produkte unter dem Summenzeichen bis auf ein einziges Glied und es bleibt:

$$p\frac{dZ}{dp}\bigg|_{p_i} = \frac{A}{p_i^{m-1}}\prod_1^n{}'(p_i - p_k), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

wo der Akzent am Produktenzeichen den Ausschluß des Faktors $(p_i - p_i)$ bedeuten soll. Wir haben dadurch eine Produktendarstellung gewonnen und können, wenn Modul und Arcus der einzelnen Faktoren bekannt sind, den Ausdruck sofort in komplexer Form hinschreiben. Es sei also

$$p_i - p_k = h_{ik}e^{j\varphi_{ik}}$$

und

$$p_i = h_i e^{j\varphi_i};$$

dann ist:

$$p\frac{dZ}{dp}\bigg|_{p_i} = \frac{A}{h_i^{m-1}}\prod{}' h_{ik}\cdot e^{j\{\Sigma\varphi_{ik} - \overline{m-1}\varphi_i\}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

2. Anmerkung: Wir betrachten in Anwendung des Vorigen hier nur den einfachen Fall, daß die Funktion quadratisch ist; die beiden Wurzeln sind dann konjugiert komplex und man hat:

$$Z = A(p^2 + \alpha p + \beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

$$p = -m \pm nj \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

$$Z = A(p-p_1)(p-p_2)$$

$$p\frac{dZ}{dp} = Ap\{\overline{p-p_1} + \overline{p-p_2}\}$$

$$p\frac{dZ}{dp}\bigg|_{p_1} = Ap_1(p_1 - p_2) = Ap_1 2nj$$

$$p\frac{dZ}{dp}\bigg|_{p_2} = Ap_2(p_2 - p_1) = -Ap_2 2nj.$$

Die Summe in Gl. 9) ergibt:

$$\frac{K(p_1, t)}{2Anjp_1} - \frac{K(p_2, t)}{2Anjp_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Wir können hier zur Auswertung dieses Ausdruckes das sog. Spiegelungsprinzip zu Hilfe nehmen; wenn nämlich K(p, t) eine Funktion bedeutet, die, wenigstens auf einem gewissen Stück der reellen Zahlenachse (der Parameterebene p), reelle Werte



annimmt, so entsprechen längs dieses Stückes konjugiert komplexen Werten des Arguments auch konjugiert komplexe Werte der Funktion.

Ist beispielsweise $K(p, t) = E_0 e^{pt}$, so trifft die Bedingung sogar längs der ganzen reellen Achse zu.

Im Ausdruck 35) ist also die Differenz zweier konjugiert komplexer Größen zu bilden; man erhält sie als den doppelten Wert des imaginären Bestandteils der ersten Größe.

Für $K(p, t) = E_0 e^{pt}$ hat:

$$\frac{e^{p_1 t}}{p_1} \quad \text{den Modul:} \quad \frac{e^{-mt}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

und den Arcus:

$$nt - \operatorname{arctg} \frac{n}{m},$$

also wird Gl. 35):

$$\frac{E_0 e^{-mt}}{A n \sqrt{m^2 + n^2}} \sin(nt - \chi),$$

wo $\operatorname{tg} \chi = \frac{n}{m}$ ist. Ähnlich ist in schwierigeren Fällen zu verfahren.

33. Fortsetzung des vorigen Beispiels. Wir wählen zur Errechnung der Umlaufsgeschwindigkeit den direkten Weg: Wir eliminieren aus Gl. 21) und 22) die Stromstärke i und erhalten jetzt, ähnlich wie früher:

$$Z = \frac{k}{p^2}\left\{p^2 - \frac{R\Theta}{k^2} p + \frac{L\Theta}{k^2}\right\} = \frac{k}{p^2}(p - p_1)(p - p_2) \quad \ldots \ldots \quad 36)$$

$$u_p = p \frac{dZ}{dp} = \frac{k}{p}\left(\overline{p - p_1} + \overline{p - p_2}\right)$$

$$u_{p_1} = \frac{2k\beta}{p_1} j$$

$$u_{p_2} = -\frac{2k\beta}{p_2} j$$

$$Z(0) = \infty$$

$$\omega = \frac{E_0 e^{-\frac{t}{p_1}}}{2k\beta j} p_1 - \frac{E_0 e^{-\frac{t}{p_2}}}{2k\beta j} p_2 = \frac{E_0}{2k\beta j}\left(p_1 e^{-\frac{t}{p_1}} - p_2 e^{-\frac{t}{p_2}}\right). \quad \ldots \quad 37)$$

Der vorigen Anmerkung gemäß brauchen wir nur das erste Glied des Klammerausdruckes auszuwerten, und da nach Gl. 24) und 28):

$$|p_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sqrt{L\Theta}}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 38)$$

und

$$\left| e^{-\frac{t}{p_1}} \right| = e^{-\mu t}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 39)$$

ferner

$$\operatorname{arc} e^{-\frac{t}{p_1}} = \operatorname{arc} e^{j\nu t} = \nu t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 40)$$

wird, indem wir noch setzen:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\nu}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 41)$$

$$\omega = \frac{2 E_0 j \sqrt{L\Theta}}{2k\beta j k} e^{-\mu t} \sin(\nu t + \chi)$$

oder nach Gl. 28'):

$$\omega = \frac{E_0}{\nu \sqrt{L \Theta}} e^{-\mu t} \sin(\nu t + \chi) \quad \ldots \ldots \quad 42)$$

Diese Gleichung bildet im Verein mit 29) die Lösung unserer Aufgabe.

E_0 ist die EMK unmittelbar vor der Bremsung, ist also identisch mit der gegenelektrom. Kraft e_0 bei normaler Tourenzahl; also ist nach 17):

$$E_0 = k \omega_0 \quad \ldots \ldots \quad 43)$$

und es wird schließlich:

$$\left. \begin{aligned} i &= \omega_0 \frac{k}{L \nu} e^{-\mu t} \sin \nu t \\ \omega &= \omega_0 \frac{k}{\sqrt{L \Theta} \nu} e^{-\mu t} \sin(\nu t + \chi) \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad 44)$$

34. Das — eingangs erwähnte — Strommaximum ergibt sich, wie leicht zu sehen, für:

$$t = \frac{\chi}{\nu},$$

und da

$$\sin \chi = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} = \frac{\nu}{k} \sqrt{L \Theta},$$

so ist

$$i_{max} = \omega_0 \sqrt{\frac{\Theta}{L}} e^{-\frac{\mu}{\nu} \chi}. \quad \ldots \ldots \quad 45)$$

35. Ein Zahlenbeispiel. Bei den obenerwähnten Versuchen im Prüffeld der Siemens-Schuckertwerke wurde u. a. ein Aufzugsmotor von 14 PS und 220 Volt Betriebsspannung bei seiner (etwa normalen) Umlaufsgeschwindigkeit von 1190 Touren pro Minute über eine Drosselspule von 0,009 Henry und 0,15 Ohm gebremst. Das gesamte Schwungmoment war:

$$GD^2 = 3{,}25 \text{ kgm}^2.$$

Der Ankerwiderstand (warm) $R_a = 0{,}092$ Ohm.

Die Induktivität des Ankers $L = 0{,}0003$ Henry. Der zusätzliche Widerstand (Bürsten, Leitungen, Kontakte) werde zu 0,07 Ohm angenommen. Bei normaler Belastung war ferner $i_0 = 55$ Amp.

Es ist also $e = E - i_0 R_a = 215$ Volt.

$$\omega_0 = \frac{2 \pi n_0}{60} = 125{,}6$$

$$k = \frac{215}{125{,}6} = 1{,}71$$

$$\Theta = 9{,}81 \, T = 9{,}81 \cdot 0{,}0255 \cdot 3{,}25 = 0{,}812$$

$$\mu = \frac{R}{2L} = \frac{0{,}312}{2 \cdot 0{,}0093} = 16{,}8$$

$$\frac{k^2}{L \Theta} = 388$$

$$\nu = \sqrt{\frac{k^2}{L \Theta} - \mu^2} = 10{,}35$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\mu} = 31{,}7^0.$$



Gl. 45) ergibt daher:

$$i_{max} = 125{,}6 \sqrt{\frac{0{,}812}{0{,}0093}}\, e^{-0{,}896} = 490 \text{ Ampere,}$$

während experimentell 505 Ampere gefunden wurden.

Auch in den übrigen Teilen deckt sich die Berechnung nach Gl. 44):

$$i = 2230\, e^{-16{,}8t} \sin 10{,}3\, t$$

$$\omega = 237\, e^{-16{,}8t} \sin (10{,}3\, t + 0{,}554)$$

mit den aufgenommenen Oszillogrammen (siehe die entsprechende Abbildung bei C. Trettin, ETZ 1912).

B. Einschaltvorgänge mit sinusförmigem Wechselstrom.

36. Das Einschalten erfolge zunächst in dem Augenblicke, da die EMK von negativen Werten ausgehend durch den Nullpunkt zu positiven Werten schreitet.

Die eingeprägte Kraft läßt sich durch

$$E = E_0 e^{j\omega t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

darstellen; sie tritt für $t = 0$ in Wirksamkeit. Als die den Einheitsvorgang charakterisierende Funktion kann wieder die Exponentialfunktion gewählt werden, als Spezialwert des determinierenden Parameters der Wert

$$\nu = j\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Der allgemeine Vektor der eingeprägten Kraft ist also:

$$E_0 e^{pt}.$$

37. Das Einschalten einer Spule (L, R). Es ist wieder:

$$Z = R + Lp$$

$$p_1 = -\frac{R}{L}$$

$$Z_\nu = Z(j\omega) = R + jL\omega$$

$$[Z'(p)]_{p_1} = L$$

und

$$p_1 - \nu = -\left\{\frac{R}{L} + j\omega\right\}.$$

Mithin ist nach Gl. 9) die Stromstärke:

$$J = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L} - \frac{E_0 e^{-\frac{R}{L}t}}{R + j\omega L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Setzt man hier:

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \nu, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

so ergibt sich sofort die bekannte Formel:

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ \sin(\omega t - \gamma) + e^{-\frac{R}{L}t} \sin \gamma \right\} \quad \ldots\ldots \quad 50)$$

38. Das Einschalten eines Kondensators. Hier ist die determinierende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{K} \int i\, dt = E,$$

also

$$Z(p) = \frac{1}{Kp} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln $p = \pm \infty$. Es liegt jedoch kein Grund vor, diesen Fall auszuschließen, denn man kann ja die Integration: Gl. 8) auf einen endlichen, wenn auch über alle Grenzen ausgedehnten Bereich erstrecken. Die Funktion $\frac{K(p,t)}{Z(p)}$ wird, nach Voraussetzung, nur dort unendlich, wo $\frac{1}{Z(p)}$ unendlich wird; $\frac{1}{Z(p)} = K \cdot p$ wird aber nur im Unendlichen, also außerhalb des betrachteten Bereiches unendlich. Bei der Bestimmung des Residuums sind also Wurzeln von $Z(p) = 0$ überhaupt nicht zu ermitteln. In Gl. 9) bleibt mithin der Ausdruck auf das erste Glied beschränkt und man erhält:

$$J = E_0 e^{j\omega t} K j\omega \quad \ldots \quad 52)$$

Dasselbe müßten wir auch erhalten, wenn wir $(p - \nu) Z(p)$ entwickeln würden; man erhält:

$$\frac{1}{K}\left\{1 - \frac{\nu}{p}\right\},$$

was für $p = p_1 = \infty$ in $\frac{1}{K}$ übergeht; es ist also gemäß Gl. 11):

$$\frac{1}{(p-\nu) Z(p)} = K = G(\xi)$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = 0.$$

Mithin in Gl. 13) $P_k = 0$ und es bleibt wieder Gl. 52), die in reeller Form lautet:

$$i = E_0 K \omega \cos \omega t, \quad \ldots \quad 53)$$

wie bei „stationärem" Wechselstrom.

39. Anmerkung[1]): In derselben Weise läßt sich auch der Einschaltvorgang für den Fall einer konstanten eingeprägten EMK mit Hilfe der Formel von Heaviside darstellen.

Im Momente des Einschaltens ist zwar der Verlauf des Stromes unstetig — er springt auf den Wert Unendlich und im selben Augenblick wieder auf Null —, die Differentialgleichungen aber können gemäß den Erörterungen der Abs. 22 bis 25 dieser Unstetigkeit entraten, wenn nur der anfängliche Wert physikalisch erkannt ist.

Auch hier beschränkt sich wegen der Stetigkeit der Funktion $Z(p)$ das ausgewertete Cauchysche Integral auf ein einziges Glied und es bleibt

$$i = \frac{E}{Z(0)} = \frac{E}{\infty} = 0$$

für jeden noch so kleinen Wert von t. In der Tat erhält man dieses Resultat auch folgendermaßen:

$$i = \lim_{R=0}\left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RK}}\right) = 0 \quad \ldots \quad 54)$$

für jeden noch so kleinen Wert von t, wobei die Funktion in der Klammer denselben Vorgang, aber bei vorgeschaltetem Widerstand R beschreibt.

40. Einschalten von Wechselstrom in einen Kreis, der einen Kondensator mit vorgeschaltetem Widerstand enthält. Die EMK setze hier mit dem Höchstwert ein. Wir fragen nach dem Verlauf der Ladung q.

Die Differentialgleichung für sie lautet:

$$\frac{q}{K} + R\frac{dq}{dt} = E \quad \ldots \quad 55)$$

[1]) Diese Anmerkung bezieht sich auf Abschnitt 6 der Arbeit von K. W. Wagner. Diese Zeitschr. 1916, 4, S. 167.

Es ist also:

$$Z = \frac{1}{K} + Rp; \qquad Z(j\omega) = \frac{1}{K} + j\omega R; \qquad p_1 = -\frac{1}{KR}$$

$$Z'(p) = R; \qquad (p_1 - j\omega) Z'(p) = -\left(\frac{1}{K} + j\omega R\right)$$

und die Superpositionsformel nimmt den Wert an:

$$Q = \frac{E_0 K}{1 + j\omega RK}\left\{e^{j\omega t} - e^{-\frac{t}{KR}}\right\}.$$

Setzt man hier

$$\omega KR = \operatorname{tg}\chi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

und beachtet, daß wir von der Festsetzung in 7. hier eine Ausnahme machen müssen, weil die eingeprägte EMK in unserm Falle die Form

$$E_0 \cos \omega t$$

hat und wir deshalb nicht den imaginären, sondern den reellen Bestandteil von Q zu bilden haben, so ergibt sich die bekannte[1]) Formel:

$$q = \frac{KE_0}{\sqrt{1 + \omega^2 K^2 R^2}}\left\{\cos(\omega t - \chi) - \cos\chi\, e^{-\frac{t}{KR}}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 57)$$

die ein exponentielles Einschwingen der Ladung q beschreibt.

41. Zwischenbemerkung: Beziehung zwischen dem Wechselstrom- und Gleichstromvorgang.

Durch Vergleich der Formel von Heaviside mit der allgemeinen Superpositionsformel 9 ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

Ist die Lösung (in komplexer Form) für den Fall einer konstanten eingeprägten Kraft:

$$J = \frac{E_0}{Z(0)} + \sum_\nu B_\nu,$$

so ist sie für den Fall einer sinusförmigen Schwingung:

$$J = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{Z(j\omega)} + \sum_\nu \frac{B_\nu}{1 - \frac{j\omega}{p_\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 58)$$

Man hat also nur jedes Glied der Ausgleichssumme durch den Faktor $1 - \frac{j\omega}{p_\nu}$ zu dividieren.

42. Da die Heavisidesche Formel für E = konst. (wie in der Einleitung bereits erwähnt) von K. W. Wagner[2]) zur Berechnung vieler wichtiger Beispiele benutzt wurde, so haben wir, um dieselben Beispiele für den Wechselstromvorgang zu behandeln, nur die durch Gl. 58) angezeigten Veränderungen vorzunehmen.

43. Magnetisch verkettete Kreise. (L_1, R_1; L_2, R_2; M = gegenseitige Induktivität. Sekundärkreis kurzgeschlossen). Wir führen den Streukoeffizient

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

und die Zeitkonstanten

$$T_1 = \frac{L_1}{R_1}; \qquad T_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

---

[1]) Siehe z. B. F. Breisig, Theoretische Telegraphie 1910, S. 199

[2]) Diese Zeitschr. 1916, 4, S. 159.

ein. Für Z(p) erhielt Wagner die Größe:

$$Z(p) = R_1 + L_1 p - \frac{M^2 p^2}{R_2 + L_2 p}.$$

Durch leichte Umformungen und Vernachlässigung des Streukoeffizienten σ ergibt sich daraus:

$$Z(j\omega) = \frac{R_1[1 + j\omega(T_1 + T_2)]}{1 + j\omega T_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59)$$

Es sind ferner nach Wagner die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ bei Vernachlässigung von σ:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1 + T_2}$$

$$p_2 = -\infty$$

und daher:

$$1 - \frac{j\omega}{p_1} = 1 + j\omega(T_1 + T_2)$$

und

$$1 - \frac{j\omega}{p_2} = 1.$$

In seiner Endformel für den Gleichstromvorgang:

$$J_1 = \frac{E_0}{R_1}\left\{1 - \frac{T_1}{T_1 + T_2} e^{p_1 t} - \frac{T_2}{T_1 + T_2} e^{p_2 t}\right\}$$

eingesetzt (nach Gl. 58), ergibt sich für den Wechselstromvorgang im Primärkreise:

$$J = \frac{E_0}{R_1}\left\{\frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega(T_1 + T_2)} - \frac{T_1 e^{p_1 t}}{(T_1 + T_2)[1 + j\omega(T_1 + T_2)]}\right\}$$

oder, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \omega(T_1 + T_2) &= \operatorname{tg}\chi \\ \omega T_2 &= \operatorname{tg}\chi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

gesetzt wird:

$$i_1 = \frac{E_0}{R_1}\left\{\sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}} \sin(\omega t + \chi_2 - \chi) + \frac{T_1 e^{p_1 t}}{(T_1 + T_2)\sqrt{1 + \omega^2(T_1 + T_2)^2}} \sin\chi\right\} \quad 61)$$

44. Der Wechselstromausgleich im elektrischen Schwingungskreis (R, L, K).

Hier ist

$$Z(p) = \frac{1}{Kp} + R + Lp$$

und, wenn gesetzt wird:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \alpha^2 = \frac{1}{KL} - \frac{R^2}{4L^2}; \quad v^2 = \frac{1}{KL} \quad \ldots\ldots \quad 62)$$

folgt:

$$Z(j\omega) = \frac{jL}{\omega}[(\omega^2 - v^2) - j2\beta\omega] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

Es ist dann ferner das den Ausgleich darstellende Glied der Gl. 9), wenn man wieder die entsprechende Endformel der Arbeit von Wagner entnimmt:

$$A = \frac{E_0}{2Lj\alpha}\left[\frac{e^{-\beta t + j\alpha t}}{1 - \frac{j\omega}{p_1}} - \frac{e^{-\beta t - j\alpha t}}{1 - \frac{j\omega}{p_2}}\right].$$

Bringt man auf gleichen Nenner und bezeichnet vorläufig den Zähler des Klammerausdruckes mit N, so ergibt sich leicht:

$$A = \frac{E_0 v^2}{2 L j \alpha \left\{(v^2 - \omega^2) + j 2 \beta \omega\right\}} N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

und für N erhält man bei Berücksichtigung der Gln. 62)

$$N = 2 j e^{-\beta t} \sin \alpha t - j \omega \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_2} - \frac{e^{p_2 t}}{p_1} \right) = 2 j e^{-\beta t} \sin \alpha t - \frac{j \omega}{v^2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \; . \quad 65)$$

Hier sind p_1 und p_2 konjugiert komplexe Größen;

$$p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}$$

ist daher gleich dem doppelten imaginären Anteil der ersten Größe (32.), also gleich

$$2 e^{-\beta t} \operatorname{Im} [(-\beta + j \alpha)(\cos \alpha t + j \sin \alpha t)] = 2 j e^{-\beta t} (\alpha \cos \alpha t - \beta \sin \alpha t).$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. 65) ein und ersetzt mit deren Hilfe das N in Gl. 64), so ergibt sich:

$$A = \frac{E_0 v^2 e^{-\beta t}}{L \alpha [(v^2 - \omega^2) + j 2 \omega \beta]} \left\{ \sin \alpha t - \frac{j \omega}{v^2} (\alpha \cos \alpha t - \beta \sin \alpha t) \right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. 63) wird schließlich der rein imaginäre Teil der Gl. 9) und somit unsere Lösung:

$$i = \frac{E_0 \omega}{L \sqrt{(v^2 - \omega^2)^2 + 4 \beta^2 \omega^2}} \left\{ \cos (\omega t + \varphi) + e^{-\beta t} \left[\sin \alpha t \left(\frac{\beta}{\alpha} \cos \varphi + \frac{v^2}{\alpha \omega} \sin \varphi \right) - \cos \alpha t \cos \varphi \right] \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66)$$

wo

$$-\frac{2 \beta \omega}{v^2 - \omega^2} = \operatorname{tg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67)$$

gesetzt ist. (Vgl. Breisig, Theoret. Telegr. S. 210 für $\delta = 0$).

45. Einschaltvorgang bei konstant gehaltener Stromamplitude[1]).

Dieser Strom ergieße sich im Moment des Öffnens eines Kurzschlußkreises über ein System, das aus parallelgeschalteter Induktivität L (R = 0) und Kapazität K besteht.

Es ist:

$$Z(j\omega) = K j \omega + \frac{1}{j L \omega} = j \left(K \omega - \frac{1}{L \omega} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 68)$$

$$1 - \frac{j \omega}{p_1} = 1 - \omega \sqrt{L K}$$

$$1 - \frac{j \omega}{p_2} = 1 + \omega \sqrt{L K}.$$

Für Gleichstrom erhält man als Vektor der gesuchten Klemmenspannung v:

$$V = (-j) \cdot J_0 \sqrt{\frac{L}{K}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{j}{\sqrt{LK}} t} - e^{-\frac{j}{\sqrt{LK}} t} \right\}$$

also nach 41. und Gl. 68) ff.:

$$V = (-j) \cdot J_0 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 e^{j \omega t}}{K \omega - \frac{1}{L \omega}} + \sqrt{\frac{L}{K}} \frac{e^{\frac{j t}{\sqrt{LK}}}}{1 - \omega \sqrt{LK}} - \sqrt{\frac{L}{K}} \frac{e^{-\frac{j t}{\sqrt{LK}}}}{1 + \omega \sqrt{LK}} \right\}$$

[1]) Für Gleichstrom K. W. Wagner a. a. O. S. 170.

oder: $$v = -J_0 \frac{1}{2}\left\{\frac{2\cos\omega t}{K\omega - \frac{1}{L\omega}} + \sqrt{\frac{L}{K}}\frac{\cos\frac{t}{\sqrt{LK}}}{1-\omega\sqrt{LK}} - \sqrt{\frac{L}{K}}\frac{\cos\frac{t}{\sqrt{LK}}}{1+\omega\sqrt{LK}}\right\}$$

oder: $$v = \frac{J_0}{\frac{1}{L\omega} - K\omega}\left(\cos\omega t - \cos\frac{t}{\sqrt{LK}}\right); \quad \ldots \quad 69)$$

Die Klemmenspannung enthält also eine Oberschwingung derselben Amplitude wie die Hauptschwingung; die maximale Klemmenspannung ist also jedenfalls kleiner als:

$$\frac{2 J_0 L\omega}{1 - KL\omega}.$$

Im Falle der Resonanz erhält man durch Grenzübergang aus Gl. 69):

$$v_r = \frac{J_0}{2K} t \sin\omega t \quad \ldots \quad 70)$$

Die Höhe der Spannung wird also nur durch praktisch stets vorhandene Widerstände begrenzt.

46. Einschalten eines am Ende kurzgeschlossenen Kabels.

(Bezeichnungen und Formeln nach der als bekannt vorausgesetzten Wagnerschen Arbeit a. a. O.)

Wird das Kabel als aus unendlich vielen und unendlich kleinen Widerständen und Kapazitäten K gebildet angesehen, so ist in

$$Z = W \operatorname{Sin} m\gamma \quad \ldots \quad 71)$$

$m = \infty$ zu setzen, während Rm und Km gegen endliche Werte: R_1 und K_1 konvergieren. Es ist dann:

$$Z(j\omega) = \sqrt{\frac{R_1}{K_1\omega j}} \operatorname{Sin}\sqrt{R_1 K_1 \omega j}.$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{R_1 K_1 \omega}{2}} = n, \quad \ldots \quad 72)$$

so folgt nach einer leichten Zwischenrechnung:

$$Z(j\omega) = \sqrt{\frac{R_1}{K_1\omega}(\operatorname{Sin}^2 n + \sin^2 n)}\, e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} = M e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \ldots \quad 73)$$

wo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{Tg} n}. \quad \ldots \quad 74)$$

Es ist ferner:

$$1 - \frac{j\omega}{p_K} = 1 + j\frac{\omega R_1 K_1}{k^2\pi^2}.$$

Es werde gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega R_1 K_1}{k^2\pi^2} &= \operatorname{tg}\alpha_k \\ \sqrt{1 + \frac{\omega^2 R_1^2 K_1^2}{k^4\pi^4}} &= m_k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 75)$$

Dann geht die Thomsonsche Formel für den Strom am Ende:

$$i_e = \frac{E_0}{R_1} + \frac{2E_0}{R_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{R_1 C_1}} \quad \ldots \quad 76)$$

für Wechselstrom über in:

$$i_e = \frac{E_0}{M} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2 E_0}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{R_1 K_1}}}{m_k} \sin \alpha_k \quad \ldots \quad 77)$$

47. Einschalten einer am Ende isolierten Leitung. (Gleichmäßig verteilte Induktivität und Kapazität K pro Längeneinheit; der Widerstand sei zu vernachlässigen.)

Hier wird $Z(j\omega)$ reell; setzt man:

$$\omega \sqrt{LK} = \frac{\omega}{v}, \quad \ldots \quad 78)$$

so wird:

$$Z(j\omega) = \frac{\cos\frac{\omega l}{v}}{\cos\frac{\omega(l-x)}{v}} \quad \ldots \quad 79)$$

Es ist ferner:

$$1 - \frac{j\omega}{p_k} = 1 \mp \frac{\omega}{\mu_k v} = 1 \mp \frac{2\omega l}{(2k-1)\pi v} \quad \ldots \quad 80)$$

ebenfalls reell.

Die für Gleichstrom geltende Formel:

$$V = E + \frac{2E}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x}{2k-1} \left[e^{j\mu vt} + e^{-j\mu vt}\right] \quad \ldots \quad 81)$$

geht also für Wechselstrom über in:

$$V = \frac{E_0 \cos\frac{\omega(l-x)}{v}}{\cos\frac{\omega l}{v}} \sin \omega t + \frac{2E_0}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x}{2k-1} \left\{ \frac{e^{j\mu vt}}{1 - \frac{2\omega l}{(2k-1)\pi v}} + \frac{e^{-j\mu vt}}{1 + \frac{2\omega l}{(2k-1)\pi v}} \right\}.$$

Man erkennt unschwer, daß die geschweifte Klammer auf folgenden Ausdruck reduzierbar ist, wenn man nur die rein imaginären Anteile berücksichtigt:

$$\frac{2 \sin \mu_k v t}{1 - \frac{4\omega^2 l^2}{(2k-1)^2 \pi^2 v^2}} \cdot \frac{\omega l}{\pi v (2k-1)}$$

und es bleibt daher der Ausdruck

$$v = \frac{E_0 \cos\frac{\omega(l-x)}{v}}{\cos\frac{\omega l}{v}} \sin \omega t + \frac{8 E_0 \omega l}{\pi^2 v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x \sin \mu_k v t}{(2k-1)^2 - \frac{4\omega^2 l^2}{\pi^2 v^2}} \quad \ldots \quad 82)$$

In seinem Buche: Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln[1]) hat K. W. Wagner diesen Fall unter Berücksichtigung des Widerstandes behandelt. Für $W = 0$ vereinfachen sich die dort auf S. 21 gegebenen Konstanten wesentlich und man erhält für p_{s2} unschwer den ersten Teil der Gl. 82).

Um auch die Identität der Summe mit der dort auf S. 29 gegebenen Entwicklung von p_f nachzuweisen, müßte man die von Wagner nur angedeutete Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten wirklich durchführen. Wir beschränken uns indes nur darauf, zu zeigen, daß bei dieser Bestimmung in der Tat ein Nenner auftritt, der dem der Gl. 82) entspricht.

---

1) Teubner 1908.

Da nämlich die Ausdrücke für $h(x)$ und $g(x)$ (Wagner, ebenda S. 27) in unserem Falle rein periodische Funktionen von

$$\frac{\omega(l-x)}{v} = \frac{\omega l}{v}\left(1 - \frac{2}{\pi} y\right)$$

sind und sich daher linear durch $\sin\frac{2\omega l}{\pi v}\cdot y$ und $\cos\frac{2\omega l}{\pi v}\cdot y$ ausdrücken lassen, bleibt in der Integraldarstellung der Fourierschen Koeffizienten schließlich nur ein Glied von der Form ($M =$ konst.):

$$M\int_0^\pi \sin\frac{2\omega l}{\pi v} y \cos(2k-1) y\, dy$$

übrig; die Integration ergibt nun:

$$\frac{2M\frac{2\omega l}{\pi v}}{\frac{4\omega^2 l^2}{\pi^2 v^2} - (2k-1)^2},$$

enthält also in der Tat den in Gl. 82) auftretenden Nenner.

48. Einpoliges Anschalten einer Spule mit Windungskapazität an eine Wechselspannung. Die gleichmäßig auf die Windungslänge verteilte Erdkapazität sei C, die ebenso verteilte gegenseitige Kapazität der Windungen K; dann ist:

$$\gamma^2 = \frac{-LC\omega^2}{1 - LK\omega^2},$$

und wenn man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{LC}} &= v \\ \frac{1}{\sqrt{LK}} &= w \end{aligned}\right\} \qquad 83)$$

nennt:

$$\gamma = \pm j \frac{\frac{\omega}{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{w}\right)^2}}$$

und

$$Z(j\omega) = \frac{\operatorname{Cos}\gamma l}{\operatorname{Cos}\gamma(l-x)} = \frac{\cos\frac{\omega/v\, l}{\sqrt{1-(\omega/w)^2}}}{\cos\frac{\omega/v\,(l-x)}{\sqrt{1-(\omega/w)^2}}}.$$

Es ist ferner:

$$p_k = \pm j \frac{v}{l} \frac{\mu_k l}{\sqrt{1 + \varkappa \mu_k^2 l^2}}, \qquad 84)$$

wo

$$\varkappa = \frac{K}{C l^2}, \qquad 85)$$

also:

$$1 - \frac{j\omega}{p_k} = 1 \mp \frac{\omega}{v\mu_k}\sqrt{1 + \varkappa\mu_k^2 l^2}. \qquad 86)$$

Nun ist die Formel für die Gleichstrom-Spannungsverteilung:

$$V = E - \frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x}{(2k-1)(1+\varkappa\mu_k^2 l^2)}\left\{\frac{e^{j\frac{\mu_k v t}{\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}}}{1-\frac{\omega}{v\mu_k}\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}+\frac{e^{-j\frac{\mu_k v t}{\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}}}{1+\frac{\omega}{v\mu_k}\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}\right\}.$$

Der imaginäre Teil der geschweiften Klammer ergibt ähnlich, wie im vorigen Beispiel:

$$2\,\frac{\frac{\omega}{v\mu_k}\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}{1-\frac{\omega^2}{v^2\mu_k^2}(1+\varkappa\mu_k^2 l^2)}\sin\frac{\mu_k v t}{\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}},$$

so daß man als Resultat erhält:

$$v = \frac{E_0\cos\frac{\omega v(l-x)}{\sqrt{1-(\omega w)^2}}}{\cos\frac{\omega/v\,l}{\sqrt{1-(\omega w)^2}}}\sin\omega t - \frac{4E_0\omega}{\pi v}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x\,\sin\mu_k v t}{(2k-1)\mu_k\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}\left[1-\frac{\omega^2}{v^2\mu_k^2}(1+\varkappa\mu_k^2 l^2)\right]} \quad 87)$$

49. Wirbelströme in Spulen mit massivem metallenen Kern beim Einschalten von Wechselstrom (Gleichstromvorgang s. Wagner, Formel von Heaviside usw., S. 185).

Dieser Fall läßt sich nicht mehr in solch geschlossener Form wie die vorhergehenden darstellen.

Setzt man:

$$1-\frac{j\omega}{p_k} = 1 + j\frac{4\pi\omega\mu r_1^2}{\varrho y_k^2} = S_k l^{j\sigma_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 88)$$

(wo die y_k die Wurzeln der transzendenten Gleichung: $\frac{J_0(y)}{J_1(y)} = C y$ und J_0, J_1 die Besselschen Funktionen 1. bzw. 2. Ordnung bedeuten), so erhält man für die Ausgleichs-Wirbelströmung

$$i_A = \frac{E_0 2N}{R l r_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{r}{r_1}y_k\right)e^{p_k t}}{S_k\{J_1(y_k)+C y_k J_0(y_k)\}}\sin\sigma_k. \quad \ldots\ldots \quad 89)$$

Das Einschalten erfolge in einer beliebigen Phase der Wechselspannung.

50. Obgleich hier wesentliche Schwierigkeiten nicht auftreten, wollen wir dieses allgemeine Problem nur an einem sehr einfachen Beispiel durchführen.

Prägen wir die sinusförmige Kraft nicht zur Zeit $t = 0$, sondern τ Sekunden später dem System ein, so ist in diesem Augenblicke:

$$E = E_0 e^{j\omega\tau}.$$

Beginnen wir von diesem Moment an unsere neue Zeitrechnung, so wird:

$$E = E_0 e^{j\omega(t+\tau)} = E_0 e^{j\omega t + j\omega\tau}$$

und diese Form ist ein Spezialfall der allgemeineren:

$$E = E_0 e^{pt + j\omega\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

für

$$p = j\omega.$$

Gl. 9) nimmt also hier die Form an:

$$y = \frac{E_0}{Z(j\omega)}\{\cos\omega(t+\tau) + j\sin\omega(t+\tau)\} + \sum_{k=1}^{n}\frac{E_0 e^{p_k t + j\omega\tau}}{(p_\varkappa - j\omega)[Z'(p)]_{p=p_k}}, \quad . \quad 91)$$

woraus man den rein imaginären Bestandteil in jedem gegebenen Falle herauszuschälen hat.

51. Anschalten einer Wechselspannung im Momente τ an eine Spule (R, L). Aus Gl. 48) erhält man sofort:

$$J = \frac{E_0 e^{j\omega(t+\tau)}}{R + j\omega L} - \frac{E_0 e^{-\frac{R}{L}t + j\omega\tau}}{R + j\omega L}$$

und mit Hilfe von Gl. 49):

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ \sin\left[\omega(t+\tau) - \gamma\right] - e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega\tau - \gamma) \right\} \quad \ldots \quad 92)$$

Ist

$$\omega\tau = \gamma,$$

d. h. ist:

$$\operatorname{tg} \omega\tau = \frac{\omega L}{R}, \quad \ldots \quad 93)$$

so ist kein Ausgleichsvorgang zu erwarten.

C. Erregung von Stromkreisen durch gedämpfte Schwingungen (Empfänger-Schaltungen).

a) Die Erregung setzt im Momente $\tau = 0$ (siehe Abs. 50) ein.

52. Obwohl eine strenge Theorie der Resonanzwirkungen, die in den Empfangsschaltungen der drahtlosen Telegraphie auftreten, nur durch die Integration der elektromagnetischen Feldgleichungen erzielt werden kann, ist es nach Bjerknes[1]) durch geeignete Ansätze bekanntlich trotzdem möglich durch bloße Betrachtung des Resonanzkreises mit der Erfahrung übereinstimmende Folgerungen zu ziehen.

Die erregende elektromotorische Kraft ist hier der Integraleffekt des auf den Resonator auftreffenden Wellenimpulses und hängt auch von der Gestalt des Resonators und von dessen Orientierung gegen die Wellenrichtungen ab. Man wird sie in der Form:

$$E = E_0 e^{-\delta t} \sin \omega t \quad \ldots \quad 94)$$

oder, wenn nach Bjerknes angenommen wird, daß sie mit einem Maximalwert einsetzt:

$$E = \frac{A}{\omega^2 + \delta^2} e^{-\delta t} \cos \omega t \quad \ldots \quad 95)$$

ansetzen können; hier bedeutet A den Bjerknesschen „Intensitätsfaktor“; er ist sowohl von der Amplitude und Frequenz der erregenden Schwingungen, als auch von der Gestalt und Orientierung des Resonators abhängig.

53. Die Gl. 94) ist der rein imaginäre Teil, die Gl. 95) der reelle Teil einer allgemeinen Funktion der Form:

$$E_0 e^{pt}$$

für den Wert $p = -\delta + j\omega$.

Die bisherigen Erörterungen bleiben also im Prinzip bestehen und werden jetzt nur dadurch geändert, daß $-\delta + j\omega$ an die Stelle von $j\omega$ tritt. Ja, es wird auch hier möglich sein, die bereits für den Gleichstromvorgang gefundenen komplexen Lösungen zu benutzen, indem man in der Ausgleichssumme jedes Glied durch die Größe:

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_k}$$

dividiert.

54. Spule als Resonator (L, R).[2]) Aus Abs. 37 folgt:

$$Z(-\delta + j\omega) = R - L\delta + jL\omega$$

[1]) Bjerknes, Ann. d. Phys. 1895, S. 120.

[2]) Siehe z. B.: J. Zenneck Lehrbuch der drahtl. Telegr. 1916, S. 101.

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_1} = 1 + \frac{jL\omega - L\delta}{R} = \frac{R - L\delta + jL\omega}{R}.$$

Im Falle des Gleichstromvorganges ist:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Analog bildet man sofort:

$$J = \frac{E_0 e^{(-\delta + j\omega)t}}{(R - L\delta) + jL\omega} - \frac{E_0 e^{-\frac{R}{L}t}}{(R - L\delta) + jL\omega}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 96)$$

Setzt man also:

$$\frac{L\omega}{R - L\delta} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

so wird[1]):

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{(R - L\delta)^2 + L^2\omega^2}} \left\{ e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{R}{L}t} \sin\varphi \right\}. \quad \ldots \quad 98)$$

Hat die Spule denselben Dämpfungswert, wie die erregende Welle, so ist:

$$\delta = \frac{R}{L},$$

also:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

und es wird:

$$i = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\delta t} (1 - \cos\omega t)$$

oder

$$i = \frac{2E_0}{L\omega} e^{-\delta t} \sin^2 \frac{\omega}{2} t. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

In diesem Falle induziert also sowohl der positive wie der negative Impuls der erregenden Welle einen positiven Stromstoß, der mit ihm in Phase ist und, dem Faktor $e^{-\delta t}$ gemäß, verklingt.

Hätten wir in Gl. 96) den reellen Teil als Lösung angenommen, so würde diese dem Ansatz Gl. 95) für die eingeprägte Kraft entsprechen und wir würden im Resonanzfalle erhalten:

$$i = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\delta t} \sin\omega t. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

55. Erregung eines induktionslosen Kondensatorkreises (K, R). Diese Erregung kann z. B. durch lose, kapazitive Koppelung geschehen.

Man hat (Abs. 40):

$$Z(-\delta + j\omega) = \left(\frac{1}{K} - R\delta\right) + j\omega R$$

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_1} = K\left[\left(\frac{1}{K} - R\delta\right) + j\omega R\right].$$

Mithin aus der Gleichstrom-Formel:

$$Q = E_0 K - E_0 K e^{-\frac{t}{KR}}$$

[1]) Die Interpretation dieser Formel entspricht der von Zenneck (s. vorige Fußnote) gegebenen; s. a. dessen Abb. 121.

die gesuchte Lösung in komplexer Form:

$$Q = \frac{E_0 K e^{(-\delta + j\omega)t}}{(1 - KR\delta) + j\omega RK} - \frac{E_0 K e^{-\frac{t}{KR}}}{(1 - KR\delta) + j\omega RK}$$

und in reeller Form:

$$q = \frac{E_0 K}{\sqrt{(1 - KR\delta)^2 + \omega^2 R^2 K^2}} \left\{ e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{t}{KR}} \sin\varphi \right\}, \quad \text{101)}$$

wo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega RK}{1 - KR\delta} \quad \text{102)}$$

56. Erregung des Primärkreises eines magnetisch gekoppelten Systems (R_1, L_1; R_2, L_2), dessen Sekundärkreis kurzgeschlossen ist.

Unter denselben Voraussetzungen, wie in Abs. 43, erhält man leicht:

$$Z(-\delta + j\omega) = \frac{R_1 [(1 - \delta \overline{T_1 + T_2}) + j\omega \overline{T_1 + T_2}]}{1 - \delta T_2 + j\omega T_2}$$

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_1} = 1 - \delta \overline{T_1 + T_2} + j\omega \overline{T_1 + T_2}$$

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_2} = 1$$

und

$$J_1 = \frac{E_0}{R_1} \left\{ \frac{1 - \delta T_2 + j\omega T_2}{1 - \delta(T_1 + T_2) + j\omega(T_1 + T_2)} - \frac{T_1}{T_1 + T_2} \cdot \frac{e^{p_1 t}}{1 - \delta(T_1 + T_2) + j\omega(T_1 + T_2)} \right\},$$

wo

$$p_1 = -\frac{1}{T_1 + T_2}.$$

Setzt man noch, ähnlich wie in Gl. 60):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\omega T_2}{1 - \delta T_2} = \operatorname{tg}\chi_2 \\[2ex] \dfrac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \delta(T_1 + T_2)} = \operatorname{tg}\chi \end{array}\right\}, \quad \text{103)}$$

so wird:

$$i = \frac{E_0}{R_1} \left\{ \sqrt{\frac{(1 - \delta T_2)^2 + \omega^2 T_2^2}{[1 - \delta(T_1 + T_2)]^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2}} \, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \chi_2 - \chi) + \right.$$

$$\left. + \frac{T_1}{T_1 + T_2} \frac{e^{p_1 t}}{\sqrt{[1 + \delta(T_1 + T_2)]^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2}} \sin\chi \right\}. \quad \text{104)}$$

57. Der Resonator ist ein Schwingungskreis (L, K, R). Es ist mit den Bezeichnungen des Abs. 44:

$$Z(-\delta + j\omega) = R - L\delta + j\omega L + \frac{1}{-K\delta + jK\omega},$$

das ist nach leichter Zwischenrechnung, unter Berücksichtigung der Beziehung Gl. 63) und unter der Annahme, daß der Schwingungskreis in bezug auf die erregende Schwingung „abgestimmt“ $\left(\omega = \alpha = \sqrt{\frac{1}{Kl} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)$ ist:

$$Z(-\delta + j\omega) = \frac{L}{j\omega - \delta} \left\{ (\beta - \delta)^2 + 2j\omega(\beta - \delta) \right\},$$

wenn man ferner $\frac{\delta}{\omega}$ und $\frac{\beta}{\omega}$ gegen 1 vernachlässigt:

$$Z(-\delta + j\omega) = 2L(\beta - \delta) \quad \ldots \ldots \quad 105)$$

Es ist nunmehr bei denselben Vereinfachungen:

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_1} = 1 - \frac{j\omega - \delta}{-\beta + j\alpha} = 1 - \frac{j - \frac{\delta}{\omega}}{j - \frac{\beta}{\omega}} = \frac{\delta - \beta}{j\omega} = j\,\frac{\beta - \delta}{\omega}$$

$$1 - \frac{j\omega - \delta}{p_2} = 1 - \frac{j\omega - \delta}{-\beta - j\alpha} = 1 + \frac{j - \frac{\delta}{\omega}}{j + \frac{\beta}{\omega}} = 2$$

und es wird nach Art der Gl. 64):

$$J = \frac{E_0 e^{(-\delta + j\omega)t}}{2L(\beta - \delta)} - \frac{E_0 e^{-(\beta + j\omega)t}}{2L(\beta - \delta)} - \frac{E_0 e^{(-\beta - j\omega)t}}{4Lj\omega}.$$

Man erkennt, daß das letzte Glied wegen seines relativ großen Nenners in Wegfall kommt und es bleibt die bekannte [1]) Gleichung:

$$i = \frac{E}{2L(\beta - \delta)}(e^{-\delta t} - e^{-\beta t}) \sin \omega t \quad \ldots \ldots \quad 106)$$

Wird $e^{-\delta t}$ herausgeschoben, $e^{\beta - \delta}$ in eine Potenzreihe nach $\beta - \delta$ entwickelt und hernach $\beta = \delta$ gesetzt, so ergibt sich:

$$i = \frac{E}{2L} t e^{-\delta t} \sin \omega t \quad \ldots \ldots \quad 107)$$

Die Gln. 106) und 107) stellen Schwingungen dar, deren Amplituden zunächst zunehmen, um dann von einem Maximalwert an abzunehmen.

Im Falle der Gl. 107) hat der Erreger dieselbe Frequenz ω und Dämpfungskonstante δ wie der Resonator [2]). Ausdrücke derselben Form findet man auch für die von den Ladungen der Kondensatorbelegungen herrührende elektromotorische Kraft, wenn man von dem Bjerknesschen Ausdruck Gl. 95) ausgeht [3]).

b) Die Erregung setzt nicht im Momente $\tau = 0$ ein (s. Abs. 50).

58. Die Art des Einsetzens der gedämpften Erregungsschwingungen hängt von den Eigenschaften des Erregers ab; ist dieser z. B. ein Schwingungskreis mit Poulsen-Lampe, so kann die anfängliche Resonanzspannung einen recht komplizierten Verlauf nehmen.

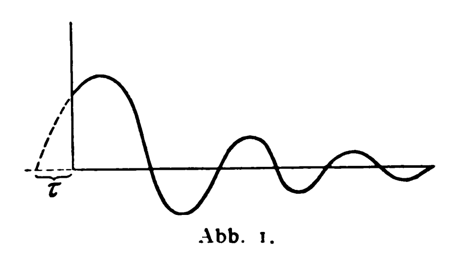


Abb. 1.

Wir wollen im folgenden den Fall betrachten, daß die eingeprägte elektromotorische Kraft sich im allgemeinen durch eine Form wiedergeben lasse, wie sie die folgende Abb. 1 zeigt, daß man sie also gleichsam als einen Teil der durch Gl. 94) oder 95) dargestellten Schwingung, nämlich als den nach Ablauf der Zeit τ stattfindenden auffassen kann.

---

1) Man vgl. z. B.: F. Breisig, Theoret. Telegraphie 1910, S. 127, Gl. 186.

2) In der drahtlosen Telegraphie nahezu erfüllt, wenn als Erreger ein einfacher Marconischer Sendedraht, als Resonator ein Empfangsdraht gleicher Länge und Dicke verwendet wird.

3) Siehe: M. Abraham und A. Föppl, Theorie der Elektrizität I, 1904, S. 290, Gl. 197.



Sie hat also jetzt die Form:

$$E = E_0 e^{(-\delta + j\omega)(t+\tau)} = E_0 e^{(-\delta\tau + j\omega\tau) + t(-\delta + j\omega)},$$

und diese ist ein Spezialfall der allgemeineren:

$$E = E_0 e^{pt + \tau(-\delta + j\omega)}$$

für

$$p = -\delta + j\omega,$$

wodurch wieder alle Vorbedingungen zur Anwendung der allgemeinen Superpositionsformel Gl. 9) gegeben sind.

51. Beispiel: Ladung eines Kondensators (K). Hier ist (Abs. 38) $p_1 = \infty$, daher

$$1 - \frac{-\delta + j\omega}{p_1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{Z(-\delta + j\omega)} = K(-\delta + j\omega)$$

und man erhält sofort:

$$J = E_0 K(-\delta + j\omega) e^{(-\delta + j\omega)(t+\tau)}$$

oder reell:

$$i = E_0 K e^{-\delta(t+\tau)} \{\omega \cos\omega(t+\tau) - \delta \sin\omega(t+\tau)\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 108)$$

für jedes noch so kleine t.

In der Tat geht diese Formel auch hervor aus:

$$i = K \frac{dE}{dt}.$$

52. Erregung einer Spule. (R, L.) Man hat, wie früher:

$$J = \frac{E_0 e^{(-\delta + j\omega)(t+\tau)}}{(R - L\delta) + j\omega L} - \frac{E_0 e^{(-\delta\tau + j\omega\tau) - \frac{R}{L}t}}{(R - L\delta) + j\omega L},$$

mithin:

$$i = \frac{E_0 e^{-\delta\tau}}{\sqrt{(R - L\delta)^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ e^{-\delta\tau} \sin\omega(t + \tau - \varphi) - e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega\tau - \varphi) \right\}, \quad . \quad 109)$$

wo wieder φ aus Gl. 97) hervorgeht.

Ist $\delta = \frac{R}{L}$ und daher $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird, entsprechend der Gl. 99):

$$i = \frac{E_0 e^{-\delta(t+\tau)}}{\omega L} \{\cos\omega\tau - \cos\omega(t+\tau)\} = \frac{2E_0}{\omega L} e^{-\delta(t+\tau)} \sin\left(\omega\tau + \frac{\omega}{2}t\right) \sin\frac{\omega}{2}t \quad . \quad 110)$$

D. Andere eingeprägte Kräfte vom Typus: e^{pt}.

53. Erteilen wir dem determinierenden Parameter p in $E = E_0 e^{-\frac{t}{p}}$ [siehe Gl. 14)] einen positiven reellen Wert, so haben wir den Ausschaltevorgang bei einer anfänglich konstanten (E_0) und im Augenblick $t = 0$ nach einer Exponentialkurve abfallenden elektromotorischen Kraft.

54. Einen solchen Verlauf nimmt unter anderem auch die Klemmenspannung einer plötzlich vom Antrieb getrennten, auslaufenden Gleichstrommaschine und wir könnten uns die Aufgabe stellen, den Verlauf des Stromes im Netzstromkreis zu finden[1]).

Hat dieser die Induktivität L und den Widerstand R, und ist die Abnahme der Klemmenspannung durch den Exponenten ε charakterisiert, so ist (Abs. 28):

[1]) Dabei ist die Rückwirkung des Netzstromes auf die Maschine selbstverständlich nicht berücksichtigt.



$$p_\nu = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad Z\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = R - L\varepsilon$$

$$(p_1 - p_\nu) Z' = -(R - L\varepsilon)\frac{R}{L\varepsilon}$$

und es wird:

$$i = \frac{E_0 e^{-\varepsilon t}}{R - L\varepsilon} - \frac{E_0 L\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}}{R(R - L\varepsilon)} = \frac{E_0}{R - L\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon t} - \frac{L\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\right\} \quad . . . \quad 111)$$

In der Tat wird für $t = 0$, $i_0 = \frac{E_0}{R}$.

55. Anmerkung: Handelt es sich um einen Einschaltevorgang, wird also der Netzstromkreis erst angeschlossen, wenn bereits der Motor ausgeschaltet ist (oder tritt die nach dem Exponentialgesetz abfallende elektromotorische Kraft als induzierte eingeprägte Kraft eines anderen Stromkreises auf), so wird man sich des Ansatzes:

$$E = E_0 e^{pt} \quad \text{mit} \quad p_\nu = -\varepsilon$$

bedienen und man erhält in der gleichen Weise wie vorher:

$$i = \frac{E_0}{R - L\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right\} \quad . . . . \quad 112)$$

Der Strom steigt dann vom Nullwert bis zu einem Maximalwert an, um dann allmählich wieder auf Null zu sinken. Der Maximalwert wird zur Zeit

$$\tau = \frac{L}{R - L\varepsilon} \lg \frac{R}{L\varepsilon}, \quad . . . . \quad 113)$$

erreicht; ist zu dieser Zeit die eingeprägte elektromotorische Kraft auf den Wert E_τ gesunken, so beträgt diese maximale Stromstärke:

$$i_{max} = \frac{E_\tau}{R}, \quad . . . . \quad 114)$$

wovon man sich leicht überzeugen kann.

56. Sukzessives Ausschalten einer Spule.

Dieselbe Gleichung (111) kann auch dazu dienen, den Strom beim sukzessiven Ausschalten durch eine Spule annähernd zu berechnen, wenn man die Schaltstufen wieder nach einem Exponentialgesetz bemißt. Sowohl der Widerstand als auch die Induktivität wachsen dann (wenigstens im Anfang) nach dem Gesetz:

$$\left.\begin{aligned} R &= \varrho e^{\varepsilon t} \\ L &= \lambda e^{\varepsilon t} \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad 112)$$

In der Tat ist jetzt:

$$\varrho e^{\varepsilon t} i + \lambda e^{\varepsilon t} \frac{di}{dt} = E_0$$

oder

$$\varrho i + \lambda \frac{di}{dt} = E_0 e^{-\varepsilon t}$$

dieselbe Differentialgleichung wie im Falle des Abs. 54 und man erhält, wenn man $E_0 e^{-\varepsilon t}$ wie eine eingeprägte Kraft behandelt, wieder die Gl. 111):

$$i = \frac{E_0}{\varrho - \lambda\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon t} - \frac{\lambda}{\varrho} e^{-\frac{\varrho}{\lambda}t}\right\}.$$

Man entnimmt ihr, daß die Stromstärke um so unabhängiger von dem Einfluß der



Induktivität verläuft, je mehr man beim Schalten das Gesetz des natürlichen Abklingens $\left(\frac{R}{L} = \frac{\varrho}{\lambda}\right)$ nachahmt; für $\varepsilon = \frac{R}{L} = \frac{\varrho}{\lambda}$ wird

$$i = \frac{E_0}{R}.$$

E. Eingeprägte Kräfte von anderem Typus.

a) Scheinbar anderer Typus.

57. Bereits in Abs. 17 hatten wir gezeigt, daß man die lineare, aber nicht homogene Differentialgleichung mit konstanter eingeprägter Kraft dadurch zu einer determinierenden machen kann, daß man die Kraft als Spezialwert einer Exponentialfunktion darstellt. Diese Funktion degeneriert aber unter geeigneten Annahmen auch noch in Formen, die scheinbar einem ganz anderen Typus der eingeprägten Kraft angehören. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

58. Spule (L, R) unter dem Einfluß einer vom Nullwert aus linear anwachsenden elektromotorischen Kraft[1]).

Die eingeprägte Kraft wird also jetzt durch den Ausdruck $E = \frac{E_1}{T} t = \mu t$ gegeben sein, wo E_1 den zur Zeit T erreichten Wert von E bezeichnet und μ nur als Abkürzung gebraucht sei.

Es ist nun bekanntlich

$$\lim_{p=0} \frac{e^{jpt}}{p} = \frac{1}{0} + jt$$

und es liegt daher nahe, als allgemeinen Kraftvektor der determinierenden Differentialgleichung den Ansatz

$$K(p, t) = \frac{\mu}{p} e^{jpt} \qquad \qquad 113)$$

zugrunde zu legen. In der Tat erhält man durch Spezialisierung von $p\,(p = 0)$ für den imaginären Bestandteil den Wert $\mu \cdot t$.

Dieser Ansatz ist nun aber eigentlich nach der Festsetzung des Abs. 10 unerlaubt, denn für $p = 0$ wird $K(p, t) = \infty$.

Trotzdem läßt sich das Residium auch in derartigen Fällen leicht mit Hilfe der Überlegungen des Abs. 21 bestimmen. Statt nämlich, der Gl. 11) gemäß, die Größe:

$$\frac{1}{(p - \nu)\, Z(p)}$$

in eine Reihe zu entwickeln, fassen wir auch noch denjenigen Bestandteil der eingeprägten Kraft in dieses Produkt, der das Unendlich-werden verursacht (in unserem Falle also $\frac{1}{p}$) und betrachten den übrigbleibenden Faktor dieser Kraft vorübergehend als diejenige Funktion, die in Gl. 12) als $K(p, t)$ bezeichnet wurde.

Für die Spule z. B. lautet die determinierende Differentialgleichung nunmehr:

$$JR + L \frac{dJ}{dt} = \frac{\mu}{p} e^{jpt}.$$

[1]) In Schwingungskreisen mit Funkenstrecke nähert sich der Verlauf der elektrischen Größen einer Geraden, wenn im Funken mehr Energie absorbiert wird als durch die Joulsche Wärme; siehe J. Zenneck, Ann. d. Ph. 1914, **13**, S. 832.

Hier ist der „Differentialoperator“ nicht mehr wie früher p, sondern jp, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} Z &= R + jLp, \qquad p_1 = -\frac{R}{jL}, \qquad K(p_1, t) = -j\frac{\mu L}{R} e^{-\frac{R}{L}t}, \\ Z'(p) &= jL, \qquad \frac{K(p_1, t)}{p_1 [Z'(p)]_{p_1}} = j\frac{\mu L}{R^2} e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 114)$$

Gl. 11) entspricht hier:

$$\frac{1}{p^2 Z(p)} = \frac{1}{p^2 R\left(1 + j\frac{L}{R}p\right)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{p^2} - j\frac{L}{R}\cdot\frac{1}{p} + G\right).$$

Mithin:

$$A_1 = -j\frac{L}{R^2}; \qquad A_2 = \frac{1}{R},$$

dabei ist also jetzt:

$$K(p, t) = \mu e^{jpt}; \qquad K'(p, t) = j\mu t e^{jpt}$$

und für $p = 0$ entsprechend:

$$\mu \quad \text{bzw.} \quad j\mu t,$$

also ist nach Gl. 13):

$$P_0 = -j\frac{\mu L}{R^2} + j\frac{\mu t}{R}$$

und nach Gl. 9) und Gl. 114):

$$J = j\frac{\mu t}{R} - j\frac{\mu L}{R^2} + j\frac{\mu L}{R^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

oder reell:

$$i = \frac{\mu t}{R} - \frac{\mu L}{R^2}\left\{1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 115)$$

Der Strom wächst also infolge der Induktivität nur allmählich und bleibt auch weiterhin immer um den Ausgleichsbetrag $i_1 = \frac{\mu L}{R^2}$ gegenüber demjenigen Strom zurück, der im reinen Widerstand erzeugt würde.

59. Die der Spule eingeprägte Kraft wächst quadratisch mit der Zeit. $E = \mu t^2$.

Es liegt nahe, auch hier einen ähnlichen Ansatz wie Gl. 113) zugrunde zu legen, jedoch den reellen Teil als eingeprägte Kraft zu verwenden; in der Entwicklung:

$$\frac{\mu}{p^2} e^{jpt} = \frac{\mu}{p^2}(1 + jpt - p^2 t^2 + \ldots)$$

stört jedoch das Glied: 1 unser Vorhaben. Dieses Glied schaffen wir leicht durch den folgenden Ansatz weg:

$$K(p, t) = \frac{\mu}{p^2}\left\{e^{jp^2 t} - e^{jpt}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 116)$$

Hier hat freilich die allgemeine eingeprägte Kraft bereits die Form einer Summe; nach dem Superpositionsprinzip aber kann man aus der für jedes einzelne Glied geltenden Lösung sofort die vollständige Lösung finden und dies um so leichter, als — wie wir erkennen werden — das erste Glied überhaupt keinen Beitrag zu dieser Lösung liefert.

Es ist ferner der reelle Bestandteil von:

$$\lim_{p=0} \frac{\mu}{p^2}\left\{e^{jp^2 t} - e^{jpt}\right\} = \lim\left\{\frac{\mu}{p^2}(jp^2 t - jpt + p^2 t^2)\right\}$$

in der Tat gleich:

$$\mu t^2 = E.$$

a) Für den ersten Summanden in Gl. 116) gilt:

$$Z = R + j L p^2; \qquad [p^2]_{1,2} = -\frac{R}{jL}$$

$$p Z' = 2 j L p^2 = -2 R; \qquad [K(p,t)]_{1,2} = -j \frac{\mu L}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\sum_1^2 j \frac{\mu L}{2 R^2} e^{-\frac{R}{L} t} = j \frac{\mu L}{R^2} e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Das den Ausgleich darstellende Glied ist also imaginär und tritt nicht in Rechnung. Wir haben jetzt ferner, analog den Entwicklungen, die zur Gl. 115) führten:

$$\frac{1}{p^3 Z(p)} = \frac{1}{p^3 R\left(1 + j \frac{L}{R} p^2\right)} = \frac{1}{R p^3}\left\{1 - j \frac{L}{R} p^2 + G_3\right\},$$

also
$$A_1 = -j \frac{L}{R^2}; \qquad A_2 = 0; \qquad A_3 = \frac{1}{R}$$

und die vorübergehend als $K(p,t)$ anzusehende Funktion ist für $p = 0$:

$$K(p,t) = \mu e^{j p^2 t} = \mu;$$

ferner: $K'(p,t) = \mu 2 j p t e^{j p^2 t} = 0; \qquad K''(p,t) = \mu 2 j t e^{j p^2 t} = j 2 \mu t.$

Die nach Gl. 13) gebildete Summe P ergibt also nur imaginäre Glieder, wodurch die im Anhang zu Gl. 116) aufgestellte Behauptung bewiesen ist und wonach wir uns nunmehr auf die Betrachtung allein des zweiten Gliedes in Gl. 116) beschränken dürfen.

b) Hier ist:

$$Z = R + j L p; \qquad p_1 = -\frac{R}{jL}; \qquad p_1 [Z'(p)]_{p_1} = -R;$$

$$K(p_1, t) = -\frac{\mu L^2}{R^2} e^{-\frac{R}{L} t};$$

ferner:
$$\frac{1}{p^3 Z(p)} = \frac{1}{R \cdot p^3}\left\{1 - j \frac{L}{R} p - \frac{L^2}{R^2} p^2 + G_3\right\}$$

$$A_1 = -\frac{L^2}{R^3}; \qquad A_2 = -j \frac{L}{R^2}; \qquad A_3 = \frac{1}{R},$$

und wenn vorübergehend $K(p,t) = -\mu e^{j p t}$ gesetzt wird:

$$K(0,t) = -\mu; \qquad K'(p,t)_{p=0} = -j \mu t; \qquad K''(p,t)_{p=0} = t^2$$

und nach Gl. 13):
$$P_0 = \mu \frac{L^2}{R^3} - \mu \frac{L}{R^2} t + \frac{\mu}{R} \frac{t^2}{2},$$

woraus sofort resultiert:

$$i = \frac{\mu}{R}\left\{\frac{t^2}{2} - \frac{L}{R} t + \frac{L^2}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 117)$$

c) Die eingeprägte Kraft hat die Form $E = E_0 \operatorname{Cos} \omega t$.

64. $E_0 \operatorname{Cos} \omega t$ ist der reelle Wert von $E_0 \cos p t$ für $p_\nu = j\omega$. Determinierende Differentialgleichungen wird man unter den linearen, mit konstanten Koeffizienten überall dort finden, wo neben der gesuchten Funktion nur Differentialquotienten gerader Ordnung auftreten, denn es ist:

$$D^{2n} \cos p t = (-1)^n p^{2n} \cos p t. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 118)$$

Das trifft z. B. für die folgende Aufgabe zu:

65. Die eingeprägte elektromotorische Kraft $E = E_0 \operatorname{Cos} \omega t$ wirke auf einen als widerstandslos angenommenen Schwingungskreis (L, C); es ist der zeitliche Verlauf der Elektrizitätsmenge q zu bestimmen.

Die Differentialgleichung dieses Vorganges lautet:

$$\frac{q}{K} + L\frac{d^2 q}{dt^2} = E_0 \operatorname{Cos} \omega t \qquad 119)$$

und die entsprechende determinierende:

$$\frac{q}{K} + L\frac{d^2 q}{dt^2} = E_0 \cos pt.$$

Es ist also hier nach Gl. 118) für $n = 1$:

$$Z = \frac{1}{K} - Lp^2; \qquad p_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{KL}};$$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{K} + L\omega^2;$$

$$(p - p_\nu)\frac{dZ}{dp} = 2Lp(j\omega - p) = -2\left(\frac{1}{K} \pm j\omega\sqrt{\frac{L}{K}}\right).$$

Da ferner $\cos pt$ für p_1 und p_2 denselben Wert $\cos\frac{t}{\sqrt{KL}}$ annimmt, hat man nur zu bilden:

$$Re\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\frac{1}{K} + j\omega\sqrt{\frac{L}{K}}} + \frac{1}{\frac{1}{K} - j\omega\sqrt{\frac{L}{K}}}\right\}\right] = -\frac{1}{\frac{1}{K} + \omega^2 L}$$

und man erhält nach Gl. 9):

$$i = \frac{E_0 K}{1 + LK\omega^2}\left\{\operatorname{Cos} \omega t - \cos\frac{t}{\sqrt{KL}}\right\} \qquad 120)$$

66. Der Vollständigkeit halber wollen wir mit Hilfe unserer Methode nunmehr auch einige Aufgaben lösen, in denen lineare Differentialgleichungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten auftreten. Wir lassen es dahingestellt sein, ob Anwendungsmöglichkeiten derartiger Aufgaben (und auch einiger der vorhergehenden) auf elektrische oder mechanische Vorgänge zu erwarten sind.

67. Anschalten einer konstanten elektromotorischen Kraft an einen Stromkreis mit konstantem Widerstand, aber vom Augenblicke $t = 0$ an linear wachsender Induktivität.

Es ist also:

$$iR + \lambda t\frac{di}{dt} = E_0.$$

Man erkennt leicht, daß diese Differentialgleichung zu einer determinierenden wird, wenn man für die Systemgrößen die Form:

$$U = At^p$$

wählt; es ist nämlich:

$$\lambda t\frac{dAt^p}{dt} = \lambda pAt^p = \lambda pU \qquad 121)$$

Würden wir hier aber als eingeprägte Kraft setzen: $E_0 t^p$, so könnte sie für negative p und für den Zeitpunkt $t = 0$ unendlich werden: auch durch den Ansatz $E_0 t^{p^2}$ würden wir nichts erreichen, denn es würde dann dasselbe für rein imaginäres p geschehen. Wir passen uns daher hier und in ähnlichen Fällen einem bestimmten Anfangszustand dadurch an, daß wir setzen:

$$E = E_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^p, \qquad 122)$$

es soll also im Momente $t = t_0$ eingeschaltet werden.

Aus Gl. 121) folgt:

$$Z = R + \lambda p; \qquad p_1 = -\frac{R}{\lambda}; \qquad Z(0) = R; \qquad Z' = \lambda;$$

$$p_1[Z']_{p_1} = -R,$$



mithin ist:
$$i = \frac{E_0}{R}\left(1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{R}{\lambda}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 123)$$

Für $t = t_0$ ist in der Tat $i = 0$; die Stromstärke wächst dann allmählich bis zum Wert $\frac{E_0}{R}$ an, obwohl die Induktivität schließlich ungeheure Werte annimmt.

68. Ein elektrischer oder mechanischer Vorgang (siehe Abs. 66) sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben (im Momente $t = 0$ werde eine periodische Kraft E eingeprägt):
$$(\varrho_0 \sin \omega t) i + (\lambda \cos \omega t) \frac{di}{dt} = E_0 \sin \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \quad 124)$$

Auch die Koeffizienten sind also periodische Funktionen der Zeit von derselben Periode wie die eingeprägte Kraft. Diese Gleichung kann auch geschrieben werden:
$$\varrho_0 i + (\lambda \operatorname{cotg} \omega t) \frac{di}{dt} = E_0 .$$
Man findet leicht, daß der Ansatz:
$$U = \frac{A}{(\cos \omega t)^{p/\omega}}$$
diese Gleichung zu einer determinierenden macht; für $p = 0$ wird dieser Ausdruck konstant und gibt als Differentialoperator p; daher ist, wie früher:
$$Z = R + \lambda p$$
und es ergibt sich die Lösung:
$$i = \frac{E_0}{R}\left\{1 - (\cos \omega t)^{\frac{R}{L\omega}}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 125)$$
von deren Richtigkeit man sich durch direkte Lösung der Gl. 124) leicht überzeugen kann.

69. Allgemeinste Form der eingeprägten Kraft. Lösung durch Fouriersche Reihen.

Für die Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips (Abs. 2) bietet die Superpositionsformel wohl nichts wesentlich Neues. Gelingt es, den gegebenen Kraftverlauf durch eine Summe von Funktionen darzustellen, deren jede mit Hilfe dieses Prinzips zu einer Lösung führt, so hat man eben hernach in bekannter Weise die Summe dieser Lösungen zum Resultat zusammenzusetzen.

Anhangsweise sei dies für den Einschaltvorgang mit unterbrochenem Gleichstrom für den Fall des als widerstandslos gedachten Schwingungskreises durchgeführt. Die Fouriersche Entwicklung ergibt als eingeprägte Kraft:
$$E = \frac{4 E_0}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{a} \sin \frac{a\pi}{T} t .$$
Man hat hier lediglich in den Gl. 62), 66) und 67) $R = 0$ zu setzen und an Stelle von E_0 und ω zu schreiben:
$$\frac{4 E_0}{\pi a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a\pi}{T}$$
und erhält sofort bei Beachtung von Gl. 62):
$$i = \frac{4 E_0 K}{T} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{\cos \frac{a\pi t}{T} - \cos \alpha t}{1 - \left(\frac{a\pi}{\nu T}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 126)$$

III. Probleme, die auf partielle Differentialgleichungen führen.

70. Bereits in den Beispielen der Abs. 46 bis 49 haben wir partielle Differentialgleichungen behandelt und uns hierbei einer Methode bedient, deren Richtigkeit wir eigentlich erst im folgenden beweisen werden. Es wird sich bei diesem Beweise aber weiter zeigen, daß der Anwendbarkeit der Superpositionsformel auch für Strömungsprobleme in räumlichen Gebilden theoretisch keine Schranken gesetzt sind, überhaupt für solche mit beliebig vielen unabhängigen Koordinaten, wenn nur die entsprechende partielle Differentialgleichung linear ist. Man hat nämlich nur nötig, eine Art Kettenrechnung anzustellen, die darin besteht, daß man eine Trennung der Variabelen vornimmt und so eine Reihe totaler Differentialgleichungen erhält, von denen irgendeine als Lösung immer die Stammfunktion für die nächstfolgende ergibt.

Praktisch ist dieses Verfahren zur Lösung z. B. räumlicher oder ebener Probleme, die auf die Laplacesche Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ führen, wegen des schon bei einfachen Aufgaben ungeheuer schwierigen Grenzansatzes wohl in den seltensten Fällen durchzuführen, zumal ja die Grenzkoordinaten hier meist Zusammenhänge besitzen.

71. Der Grund, warum die Superpositionsformel auch für die partiellen Differentialgleichungen in Anwendung kommen kann, liegt darin, weil die linearen partiellen und homogenen Gleichungen durch ein partikuläres Integral befriedigt werden, das sich als ein Produkt von Exponentialfunktionen darstellen läßt, deren jede nur eine der unabhängigen Variabelen enthält. Gelingt es also mit Hilfe von determinierenden Parametern p, q, r, ... auch den allgemeinen Vektor der eingeprägten Kraft in die Form eines solchen Produktes zu bringen, so haben wir damit eine determinierende Differentialgleichung gewonnen, die sich theoretisch in folgender Weise lösen läßt:

72. Zunächst sieht man ohne weiteres ein, daß die früher beschriebene Methode nicht auf zeitliche Probleme beschränkt sein kann; in der Tat ist z. B. der Vorgang (t) des Kurzschließens $(t = 0)$ eines zuvor $(t < 0)$ konstant belasteten Stromkreises formell nicht verschieden vom Bilde (x) einer Rechteckswelle $(x < 0)$, die am Leitungsanfang $x = 0$ jäh abbricht und sich längs der Leitung nicht wieder erhebt.

Freilich müssen hier wegen des im allgemeinen endlichen Bereiches der betreffenden Koordinate zwei (oder gar mehrere) Grenzbedingungen berücksichtigt werden, was ohne weiteres nur in besonders einfachen Fällen möglich ist.

73. Es sei die betreffende Differentialgleichung

$$\sum a_k \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \ldots} = K_0 \, s_x \, s_y \ldots \qquad 127)$$

wo die s_x, s_y, ... die erwähnten Exponentialfunktionen sind; dann läßt sich also auch φ darstellen in der Form:

$$\varphi = \varphi_x \varphi_y \varphi_z \ldots = \varphi_x \, s_y \, s_z \ldots$$

Entsprechen ferner den s_x, s_y, ... die Operatoren $\omega_1(p)$, $\omega_2(q)$, ..., so wird Gl. 127) nach sukzessiver Ausführung der Differentiationen (nach x zuletzt) und nach Wegheben der e-Potenzen:

$$\varphi_x \Sigma a_k \, \omega_1^{\mu}(p) \cdot \omega_2^{\nu}(q) \ldots = K_0 \, s_x \, .$$

Diese Gleichung kann als determinierende (p) Differentialgleichung nach x aufgefaßt werden; schreibt man die Lösung (Gl. 9) in der Form:

$$\varphi_x = K_0 \, S(q, r, \ldots),$$

multipliziert mit $\varphi_y = s_y$, bezeichnet $\varphi_x \varphi_y$ mit φ_2 und betrachtet $K_0 \, s_y = K_2$ als neue eingeprägte Kraft, so ist:

$$\varphi_2 = K_2 \, S = \frac{K_2}{Z_2} \, .$$

Hier ist Z_2 wieder Stammfunktion für φ_2 und man erhält wie früher:

$$\varphi_2 = K_0 S_2$$

und:

$$\varphi_3 = \varphi_2 \varphi_z = K_0 s_z S_2 = K_3 S_2 \text{ usf.}$$

Die Funktionen S, S_2, S_3, ... werden dabei immer ärmer an Parametern und schließlich erhält man für die letzte Variabele w:

$$\varphi_{n-1} \cdot \varphi_w = \varphi_x \varphi_y \varphi_z \ldots \varphi_w = \varphi = K_n S_{n-1} = \frac{K_n}{Z},$$

wo Z nur noch von einem Parameter abhängt, und endlich als Lösung:

$$\varphi = K_0 S_n .$$

74. Beispiel. Wir wollen diese Methode nur an dem einfachen Beispiel des am Ende (l) offenen Kabels, das zur Zeit $t = 0$ durch eine konstante elektromotorische Kraft geladen wird, illustrieren.

Wir erinnern uns hier an den Ansatz Gl. 14), der nach dem im Abs. 72 Gesagten geeignet sein wird, die Verteilung der eingeprägten Kraft längs der Leitung darzustellen. Da wir aber auch am Ende der Leitung $(x = l)$ einen „eingeprägten Zustand" fordern müssen, so wird das durch die Funktion $e^{-\frac{x}{q}}$ vermittelte Einheitsbild (Abs. 13) im allgemeinen nicht bei $x = 0$ beginnen können und daher wird auch die „Amplitude des Einheitsbildes" nicht mit der bei $x = 0$ einsetzenden Amplitude E_0 zu identifizieren sein.

Wir könnten uns zwar die Aufgabe stellen, durch eine zweckmäßige Parameterfunktion die Grenzbedingungen gleich im statu nascendi zu bestimmen, wir umgehen aber diese Schwierigkeiten, indem wir die Amplitude des Einheitsbildes A und die Verschiebung λ desselben gegen den Koordinatenanfang als unbestimmte Koeffizienten[1]) in den Ansatz $A e^{-\frac{x+\lambda}{q}}$ bringen.

Die Differentialgleichung für dieses Problem (und für eine große Zahl ähnlicher) lautet:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

oder durch zweimalige Integration:

$$V - v^2 \iint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dt\, dt = 0 .$$

Betrachten wir die rechte Seite dieser Gleichung als eingeprägte Kraft, so wird:

$$V - v^2 \iint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dt\, dt = E = E_0 A e^{-\frac{x+\lambda}{q}} \cdot e^{pt},$$

da es sich ja um einen Einschaltvorgang $(t = 0)$ handelt. Nach Ausführung der Operationen erhält man als letztes Z (Abs. 73):

$$Z = 1 - \frac{v^2}{p^2 q^2},$$

woraus folgt:

$$Z(0) = \infty, \qquad q_{1,2} = \pm \frac{v}{p}, \qquad p Z' = 2$$

und man erhält nach Gl. 9) unmittelbar:

$$V_x = \frac{E_0 A}{2} \left(e^{-\frac{p}{v}(x+\lambda)} + e^{+\frac{p}{v}(x+\lambda)} \right) = E_0 A \operatorname{Cos} \frac{p}{v}(x + \lambda) \quad \ldots \quad 128)$$

Die Bestimmung der Amplitude A und der Verschiebung λ des Einheitsbildes wird

[1]) Vgl. Abs. 27.

höchst einfach: da für jeden beliebigen Zeitpunkt die Stromstärke durch den Spannungsgradienten gegeben ist, also gemäß Gl. 128) durch die Funktion $\mathrm{Sin}\,\frac{p}{v}(x+\lambda)$ und da sie ferner für $x = l$ den Wert 0 haben soll (die Leitung ist am Ende isoliert), so folgt zunächst

$$\lambda = -l, \qquad \qquad 129)$$

und da ferner für $x = 0$ die Spannung in die eingeprägte Netzspannung übergehen soll, folgt aus Gl. 128) und 129)

$$A = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\frac{p}{v}\,l},$$

also schließlich:

$$V_x = E_0 \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{p}{v}(x-l)}{\mathrm{Cos}\,\frac{p}{v}\,l},$$

wodurch wir die neue Funktion:

$$Z_2 = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{p}{v}\,l}{\mathrm{Cos}\,\frac{p}{v}(x-l)}$$

erhalten.

Es wäre überflüssig, die Rechnung weiter durchzuführen, da wir mit dieser Funktion ja bereits auf die der Gl. 79) zugrunde liegende Form gestoßen sind und nunmehr nur noch eine bereits ausgeführte Rechnung wiederholen müßten.

Zusammenfassung[1]).

Es wird für die große Zahl derjenigen technischen Probleme, die auf totale oder partielle lineare Differentialgleichungen führen, eine „allgemeine Superpositionsformel" hergeleitet, deren Gebrauch durch Einfachheit, Übersichtlichkeit und Kürze der Rechnung besonders auch für die Behandlung aller Arten von Schaltvorgängen nutzbringend ist. An einer Anzahl von Beispielen aus verschiedenen Zweigen der Elektrotechnik wird die Anwendung der Superpositionsformel erläutert.

Insbesondere ergibt sich für diejenigen Einschaltvorgänge mit konstanter eingeprägter Kraft, die durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten charakterisiert sind, als Spezialfall eine bereits von Heaviside angegebene Formel.

[1]) Herr Geheimrat Orlich möge an dieser Stelle für seine zahlreichen Anregungen meinen besten Dank entgegennehmen.

Hochspannungsisolatoren.

1. Bemerkungen zu Herrn J. Spielreins Einwänden.

Von

Karl Kuhlmann[1]).

In einer Reihe von Arbeiten[2]) befaßt sich Herr J. Spielrein auch mit meiner in Bd. 3, S. 203ff, 1915 erschienenen Arbeit „Hochspannungsisolatoren", in der ich den Entwurf von Kraftlinienbildern selbst sehr komplizierter Durchführungsisolatoren gezeigt und die praktischen Schlüsse für den Bau derselben behandelt habe.

Herr Spielrein stellt in den beiden ersten seiner Arbeiten, ausgehend von allgemein flächentheoretischen Überlegungen, zwei Kriterien auf, welche im wesentlichen auf eine Nachrechnung der Kurven- und Flächenkrümmungen des bereits nach irgendwelchen Grundsätzen entworfenen Bildes hinauslaufen.

In seiner letzten Arbeit[3]) leitet Herr Spielrein dann auf elementarem Wege seine Kriterien nochmals ab und kommt so für die hier vornehmlich uns interessierenden, meridianebenen Bilder auch zu der Formel, welche ich meinen Bildern zugrunde legte. Diese auf Seite 209 meiner Arbeit abgeleitete Formel drückt den dielektrischen Widerstand des Röhrenwulstes in Funktion seiner mechanischen Maße aus und es muß, wenn man das Bild so entwirft, daß jeder Röhrenwulst ein und dieselbe Linienzahl führt und zwischen Niveauflächen mit stets gleichen Potentialdifferenzen liegt, einfach der numerische Wert des dielektrischen Widerstandes stets der gleiche sein. Dieses einfache Kontrollmittel war zusammen mit dem senkrechten Schnitt von Feld- und Niveaulinien das einzige Hilfsmittel, dessen ich mich unter Berücksichtigung der Brechung der Kraftlinien an den Grenzflächen zweier verschiedener Dielektrika bediente. Daß dabei das Zeichnen der Bilder in erster Linie auf eine geschickte Vereinigungsmöglichkeit von Gefühl und Rechnung hinauslaufe, hatte ich auf Seite 208, und die Tatsache, daß die Kontrolle nicht immer scharf genug ist, auf Seite 225 hervorgehoben. Insofern begrüße ich Herrn Spielreins Ergänzungskriterien 3, 6 und 11 seiner letzten Arbeit, wenn sie auch den prinzipiellen Weg, wie ich ihn einschlug, in nichts ändern, und es sicherlich bei dem Entwurf sehr angenehm ist zu wissen, daß der Wert des dielektrischen Widerstandes jedes Röhrenwulstes konstant sein muß.

Hätte ich soweit also nur Grund mich über die Hilfsmittel zu freuen, die Herr Spielrein zur vielleicht genaueren Lösung dieser gewiß nicht einfachen Aufgaben beigetragen hat, so muß ich mich nun noch gegen Einwände und Bemerkungen Spielreins wenden, die mir geeignet erscheinen, den oberflächlich Hinsehenden glauben zu machen, ich hätte tatsächlich mir solche Überlegungsfehler zuschulden kommen lassen, wie Herr Spielrein es behauptet.

Ganz besonderen Anstoß nimmt Herr Spielrein an einer Kontrolle meiner Formel, welche ich an zwei „typischen" Röhrengestalten auf den Seiten 209 und 210 meiner Arbeit durchgeführt habe. Diese Röhren waren so entstanden, daß innerhalb eines beschränkten Gebietes einmal die Niveaulinien als Radien und die Feldlinien als Kreise und das andere Mal die Feldlinien als Radien und die Niveaulinien als Kreise angenommen wurden. Eine exakte Berechnung des dielektrischen Widerstandes ergab dann, verglichen mit jener auf Seite 209 abgeleiteten Näherungsformel, welche für kompliziertere Fälle auch gelten sollte, eine „glänzende" Übereinstimmung. Herr Spielrein sucht die Unrichtigkeit jener typischen Röhrengestalten nun durch Betrachtung der Abb. 10, Bd. 5, S. 253 zu beweisen.

---

[1]) Die Verspätung dieser Erwiderung erklärt sich durch meine militärische Einberufung.

[2]) Archiv f. Elektrot. 4, S. 78, 1915; 5, S. 140, 1916; 5, S. 244, 1917.

[3]) Diese Zeitschr. 5, S. 244.



Hierzu muß ich bemerken, daß ich nie auf die Vermutung verfallen wäre, man könne mir nach eingehender Lektüre meiner Arbeit zutrauen, ich hielte ein solches Bild, wie es Herr Spielrein da behandelt, überhaupt für ein typisches oder richtiges. Meine Vergleiche waren auf der Erkenntnis aufgebaut, daß wir es bei den Feldbildern der Durchführungsisolatoren mit Röhren zu tun haben, die Rotationskörper sind, deren Axialschnitte bei genügend kleiner Ausdehnung des Bereiches als von Radien (Krümmungsradien) und konzentrischen Kreisbögen begrenzt angesehen werden dürfen. Daß aber etwa das ganze Kraftlinienbild sich aus Radien und die Niveaulinien aus konzentrischen Kreisen zusammensetze, habe ich nie behauptet und wird schon durch ganz oberflächliche Betrachtung meiner Bilder so sinnfällig widerlegt, daß ich hier nichts weiter zu bemerken brauche. Das, was ich auf Seite 209 und 210 an Hand der Abb. 5a und 5b mache, ist ja im Prinzipe nichts anderes, als was Herr Spielrein macht, wenn er die Krümmungen der Kurven und Flächen untersucht.

Weiter sagt Herr Spielrein auf S. 84 Bd. **4**:

„K. Kuhlmann hat seine Bilder in der Weise erhalten, daß er ein parallelebenes Bild in einer Meridianebene entworfen und dann angenommen hat, daß man das gesuchte Feld mit hinreichender Genauigkeit durch Rotation um die Bolzenachse erhalten kann.“ Auf den Irrtum, der in diesen Worten liegt, ist Herr Spielrein ja schon durch Herrn Dr. Bolliger (Bd. **4**, S. 355) hingewiesen worden, und ich betone nochmals, daß die Ableitung meiner Kontrollformel für den dielektrischen Widerstand bei genügender Kleinheit des Ausdehnungsbereiches des betrachteten Röhrenteiles strenge ist. Es ist aber natürlich Sache desjenigen, welcher Bilder entwerfen will, zu entscheiden, wie weit er sich durch Unterteilung der mathematisch notwendigen Kleinheit der Röhrenausdehnung anpassen will. Die Zahlenbeispiele auf Seite 210 beweisen daneben noch, daß die Fehler selbst bei größerer Röhrenausdehnung noch vernachlässigbar klein sind. Aus der praktischen Erfahrung füge ich noch hinzu, daß der Entwurf selbst außerordentlich komplizierter Bilder, wie sie in meiner Arbeit durchgeführt wurden, sich nach einiger Übung verhältnismäßig schnell vollzieht.

2. Erwiderung auf Herrn K. Kuhlmanns Bemerkungen.

Von

J. Spielrein.

Auf die Bemerkungen des Herrn Professor K. Kuhlmann möchte ich folgendes erwidern: Meine Einwände richten sich nicht gegen die Kraftlinienbilder selbst und auch nicht gegen die zu ihrem Entwurf benutzte Näherungsformel; habe ich doch in der zitierten Arbeit[1]) gesagt: „Diese Übereinstimmung mit falschen Bildern spricht aber nicht gegen die Kuhlmannschen Kraftlinienbilder“.

Ich habe aber die „exakte“ Berechnung des dielektrischen Widerstandes in der Arbeit des Herrn Kuhlmann kritisiert, weil eben diese Berechnung nicht exakt ist. Die mit Hilfe der Näherungsformel entworfene Kraftröhre mag annähernd richtig sein. Wenn man aber wünscht, „einen Anhalt zu haben, wie genau diese Rechenweise in mathematisch leicht nachkontrollierbaren Fällen ist“, so muß man von dieser mathematischen Kontrolle verlangen, daß sie eine größere Genauigkeit aufweist als die zu kontrollierenden Bilder. Herr Kuhlmann nennt auch ausdrücklich die mathematische Berechnung dieser Fälle „genau“ im Gegensatz zu der nach der Näherungsmethode ausgeführten. Die Anwendung der Integralrechnung macht aber eine Berechnung nicht exakt, wenn die physischen Voraussetzungen dieser Berechnung nicht stimmen.

[1]) Archiv f. Elektot. **5**, S. 253, 1917.



Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 8. u. 9. Heft. 1918.

Spulen und Wanderwellen. I.

Einschaltspannungen der Spule aus zwei Windungen.

Von

W. Rogowski, z. Z. im Felde.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. **Geschichtliche Übersicht.** Eine gleichmäßig gewickelte einlagige Spule von n Windungen werde einer Wechselspannung $E \sin \omega t$ ($E =$ Amplitude, $\omega =$ Kreisfrequenz) ausgesetzt. Hierbei wird die Isolation zweier benachbarter Windungen durch die Spannung $\frac{E}{n}$ auf Durchschlag beansprucht.

Es sollte daher genügen, die Windungsisolation der Spannung $\frac{E}{n}$ anzupassen. Die Praxis hat aber herausgefunden, daß dies nicht ausreicht. Ihr schlugen nicht selten Spulen unmittelbar nach dem Einschalten durch, trotzdem deren Windungsisolation mit vielfacher Sicherheit der Spannung $\frac{E}{n}$ widerstehen konnte. Meist lag die Stelle des Durchschlags in den Anfangswindungen.

Woher stammt die hohe, für den Durchschlag erforderliche Spannung? Es hat sich hierüber allmählich die folgende Meinung durchgesetzt:

Beim Einschalten nimmt die bis dahin strom- und spannungslose Spule nicht plötzlich ihre stationären Werte an. Hierzu ist eine kurze Zeitspanne erforderlich. In dieser findet ein eigenartiges Wellenspiel, das „Einschwingen“ der Spule, statt. Dieses Wellenspiel ist von starken Überspannungen, die den Durchschlag hervorrufen können, begleitet.

Spannungsdurchschläge der beschriebenen Art haben sich im letzten Jahrzehnt als eine höchst lästige Plage erwiesen. Infolgedessen hat man in technischen Kreisen lebhaft gewünscht, über das Einschwingen einer Spule und das physikalische Wesen und die Höhe der Überspannung einer Spule etwas Genaueres zu erfahren. Eine befriedigende Antwort konnte aber bisher für die Spule nicht gegeben werden.

Es ist daher verständlich, daß man sich über die Einschaltspannungen zunächst bei einem einfacheren Gebilde Klarheit verschaffte. Dies war bei der Doppelleitung möglich. Die Grundlagen hierzu hat im Jahre 1857 Kirchhoff gelegt. Wir haben in den letzten Jahren das Erbe Kirchhoffs für technische Zwecke ausgebeutet und erweitert. Es scheint jedoch, als ob die Zeit, in der uns die Doppelleitung etwas sein konnte, im großen und ganzen vorüber ist: Sie hat uns manche wertvolle Einsicht und manchen praktischen Wink gebracht. Aber auf die Dauer konnte man sich nicht darüber hinwegtäuschen, daß man in der Doppelleitung doch nur ein der Spule verwandtes Leitungsgebilde und nicht die Spule selbst vor sich hatte. Was man nicht wußte, das eben brauchte man. Und was man wußte, das konnte zwar einen Teil, aber sicherlich nicht die ganze Wahrheit enthalten. So ist denn gerade in der jüngsten Zeit der Wunsch rege geworden, tiefer in die Überspannungserscheinungen und zwar in die Überspannungserscheinungen einer Spule zu blicken.

Einen Fortschritt nach dieser Richtung bedeuten die Arbeiten von **Wagner**[1]), **Siegbahn**[2]) und **Vidmar**[3]). Aber auch mit diesen ist das letzte Wort über die Überspannungen einer Spule nicht gesprochen.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, in das Halbdunkel, das trotz aller Anstrengungen immer noch über den Überspannungserscheinungen liegt, hineinzuleuchten. Sie faßt unmittelbar die Spule selbst an. Sie baut sich auf auf den Maxwellschen Gleichungen oder, besser gesagt, auf deren Zuschnitt für Drahtwellen und setzt dabei über Größe und Richtung der Ströme nichts voraus. Ihr Ziel ist natürlich der Einschaltvorgang der flachen und der langen Spule mit vielen Windungen. Ich werde aber in der vorliegenden Arbeit zunächst den einfachsten Fall: den Einschaltvorgang der Spule aus zwei Windungen, behandeln. An ihr zeigen sich bereits alle gesuchten Überspannungserscheinungen. Die physikalische Ursache ihres Zustandekommens tritt in plastischer Reinheit hervor. Dabei läßt sich die mathematische Beschreibung so einfach halten, daß die Spule aus zwei Windungen ein möglichst vielseitig studierter Schulfall werden sollte.

Später wird die Spule mit drei Windungen folgen. Sie wird uns zeigen, in welcher Art die bei der Spule aus zwei Windungen gewonnenen Ergebnisse verallgemeinert werden müssen. Zugleich werden wir erkennen, wie die mathematischen Schwierigkeiten mit der Windungszahl wachsen und überwunden werden. Haben wir auch diesen Fall bewältigt, dann werden wir genügend für die Spule aus vielen Windungen vorbereitet sein.

I. Einschaltspannungen und Einschaltströme der widerstandslosen Spule.

2. Fragestellung. Es werde eine Gleichstrombatterie[4]) von der Spannung E plötzlich an die in Abb. 1 gezeichnete Spule aus zwei Windungen geschaltet. Beide Schaltmesser sollen im gleichen Augenblick Kontakt machen. Wir fragen nach den Spannungen und Strömen der Spule.

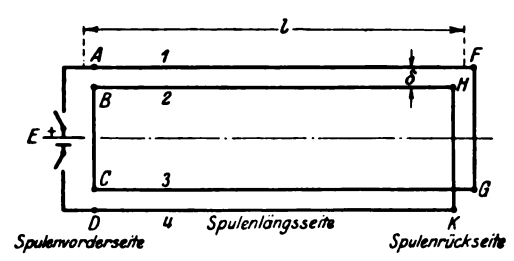


Abb. 1. Spule aus zwei Windungen, zwei ineinander geschobenen Doppelleitungen und echte Kurzschlüsse als Querverbindungen.

Wir idealisieren: Unsere Spule soll (zunächst wenigstens) keinen Widerstand besitzen. Sie bilde ein langgestrecktes schmales Rechteck. Die Längsseiten wollen wir mit verteilter Kapazität und Induktivität ausstatten. Dagegen soll den Querverbindungen AD, BC, FG, HK (zunächst) weder Kapazität noch Induktivität noch Widerstand zukommen. Sie sollen, wie wir uns kurz ausdrücken werden, „echte" Kurzschlüsse sein. Unsere Spule besteht somit aus zwei parallelen Doppelleitungen (AF, DK) und (BH, CG) mit echten Kurzschlüssen als Querverbindungen.

---

[1]) E. u. M. 1915, S. 89, 105; s. auch ETZ 1916, S. 425, 440, 456.

[2]) Archiv f. Elektrot. 4, S. 305.

[3]) E. u. M. 1916, S. 573. In jüngster Zeit ist noch eine wertvolle Arbeit von **Böhm** hinzugekommen, Archiv f. Elektrot. 5, S. 383. Da die vorliegende Arbeit im Felde geschrieben wurde, habe ich andere Verfasser leider nur spärlich zitieren können.

[4]) Die Überspannungserscheinungen klingen so rasch ab, daß sie sich ausgetobt haben, bevor die Werte des gewöhnlichen Wechselstromes (Frequenz etwa 50) eine merkliche Änderung erfahren haben. Aus diesem Grunde können wir uns auf den Fall des Einschaltens einer Gleichspannung beschränken.



Ich werde gleich zeigen, daß das gesuchte Wellenspiel des Einschaltvorganges durch Drahtwellen längs diesen beiden Doppelleitungen beschrieben werden kann.

3. Allgemeine Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen bei zwei Doppelleitungen. Bei einer einzigen Doppelleitung AF, DK (Abb. 2a) können folgende Wellen vorhanden sein:

1. eine Spannungswelle μ' } , die nach rechts laufen;
2. eine Stromwelle ϱ'
3. eine Spannungswelle m' } , die nach links laufen.
4. eine Stromwelle r'

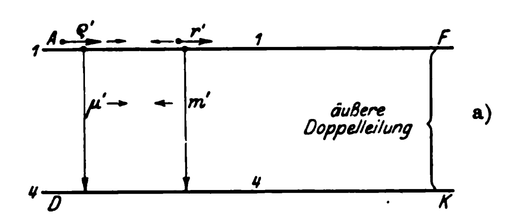
Zwischen den Augenblickswerten von μ' und ϱ' und von m' und r' bestehen bekanntlich die folgenden Beziehungen:

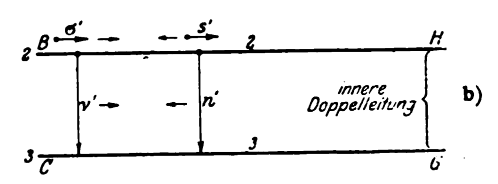
$$\varrho' = \frac{\mu'}{Z}, \tag{1}$$

$$r' = -\frac{m'}{Z}, \tag{2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = cL. \tag{3}$$

L = Induktivität (Henry) }
C = Kapazität (Farad) } pro km;
Z = Wellenwiderstand (Ohm) }
c = Lichtgeschwindigkeit = $3 \cdot 10^5$ km/sec.





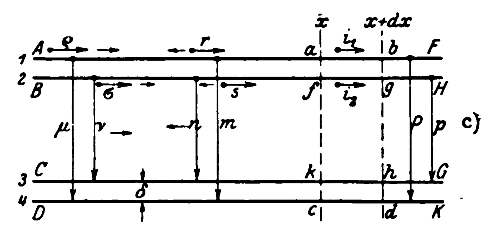


Abb. 2. Strom- und Spannungswellen bei zwei einzelnen Doppelleitungen (a, b) und bei zwei ineinander geschobenen Doppelleitungen (c).

Bei einer zweiten Doppelleitung BH, CG (Abb. 2b), die, wie die vorige, ganz für sich betrachtet werde, seien vorwärts- und rückwärtslaufende Wellen mit ν', σ'; n', s' bezeichnet. Zwischen diesen Größen bestehen die entsprechenden Beziehungen:

$$\sigma' = \frac{\nu'}{Z}, \tag{4}$$

$$s' = -\frac{n'}{Z}, \tag{5}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = cL. \tag{6}$$

Streng genommen müßten wir hier der Wellencharakteristik einen etwas anderen Wert als vorhin geben. Wenn aber die Breite beider Doppelleitungen nahezu gleich ist, und dies wird bei uns später zutreffen, so ist der Fehler praktisch vernachlässigbar klein.

Wir schieben beide Doppelleitungen ineinander (Fig. 2c und 1). Dann werden auch jetzt noch an beiden Doppelleitungen die Spannungs- und Stromwellen: μ, ϱ, m, r; ν, σ, n, s vorwärts bzw. rückwärts wandern. Aber die Beziehungen 1) bis 6) können nicht mehr gelten. Sie müssen vielmehr durch andere ersetzt werden, die zum Ausdruck bringen, daß beide Doppelleitungen vermöge ihrer Nähe magnetisch und elektrisch aufeinander einwirken. Diese Beziehungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho &= \frac{\mu - \frac{M}{L}\nu}{2\mathfrak{z}}, && \text{a)}\\
r &= -\frac{m - \frac{M}{L}n}{2\mathfrak{z}}, && \text{b)}\\
\sigma &= \frac{\nu - \frac{M}{L}\mu}{2\mathfrak{z}}, && \text{c)}\\
s &= -\frac{n - \frac{M}{L}m}{2\mathfrak{z}}, && \text{d)}\\
\mathfrak{z} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)}. && \text{e)}
\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Es hängt somit der Strom ϱ nicht nur allein von der Spannung μ, sondern auch noch von der Spannung ν ab. Für die übrigen Ströme r, σ, s gilt etwas Entsprechendes. Die Charakteristik $\mathfrak{z}$, die jetzt an die Stelle der Charakteristik Z getreten ist, stimmt ungefähr überein mit der Charakteristik einer aus AF und BH gebildeten schmalen Doppelleitung. Wir werden sie kurz die „Windungscharakteristik" nennen. L und M sind die auf 1 km bezogenen magnetischen Eigen- und Gegeninduktivitäten der Doppelleitungen in Henry.

4a. Herkunft der Gleichungen 7. Wir messen Ströme (i_1; i_2) und Spannungen (P; p) nach Abb. 2c. Wir greifen zwei benachbarte Stellen x und x + dx heraus. Für das Rechteck abcd hat die Umlaufsspannung der elektrischen Kraft den Wert: $P_{x+dx} - P_x = \frac{\partial P}{\partial x} dx$. Nach der II. Maxwellschen Hauptgleichung kommt ihr gleich die Abnahmegeschwindigkeit des magnetischen Flusses ($\Phi = L_1 i_1 + M i_2$). Somit besteht der Zusammenhang:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t}. \qquad 8a)$$

Für das Rechteck fgkh gilt die entsprechende Beziehung:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = L_2 \frac{\partial i_2}{\partial x} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}. \qquad 8b)$$

Auf dem Leiterelement a ... b schlägt sich in der Zeit dt die Elektrizitätsmenge $-\frac{\partial i_1}{\partial x} dx$, auf dem Leiterelement f ... g die Elektrizitätsmenge $-\frac{\partial i_2}{\partial x} dx$ nieder.

Die zeitlichen Änderungen der Spannungen P und p müssen diesen Elektrizitätsmengen proportional sein:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial i_1}{\partial x} + H \frac{\partial i_2}{\partial x},\\
-\frac{\partial p}{\partial t} &= K_2 \frac{\partial i_2}{\partial x} + H \frac{\partial i_1}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Mit K und H sind hier die auf ein Kilometer bezogenen „elektrischen" Eigen- und Gegeninduktivitäten[1]) bezeichnet worden $\left(\text{Maßeinheit} = \frac{1}{\text{Farad}}\right)$. Nun besteht bei Doppel-

[1]) s. Wagner, Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen. ETZ 1914, S. 639.

leitungen, mit denen wir es ja zu tun haben, ein einfacher Zusammenhang zwischen den Werten der magnetischen und elektrischen Induktivitäten:

$$K_1 = c^2 L; \qquad K_2 = c^2 L_2; \qquad H = c^2 M. \tag{10}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit.)

Es ist nun nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

erfüllt werden muß, unter W irgendeinen Strom (i_1; i_2) oder irgendeine Spannung (P; p) verstanden.

Unsere partielle Differentialgleichung ist ein alter Bekannter aus der Theorie der Drahtwellen einer einfachen Doppelleitung. Wie dort, so müssen wir auch hier vorwärts und rückwärts laufende Wellen anschreiben. Dies muß hier für jede Spannung und für jeden Strom geschehen:

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu(x - ct) + m(x + ct), \\ p_2 &= \nu(x - ct) + n(x + ct), \\ i_1 &= \varrho(x - ct) + r(x + ct), \\ i_2 &= \sigma(x - ct) + s(x + ct). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

($\mu, \nu \ldots$ willkürliche Funktionen.)

In Zukunft werden wir bei den rechtsläufigen Wellen (griechische Buchstaben) das Argument $(x - ct)$, bei den linksläufigen Wellen (lateinische Buchstaben) das Argument $(x + ct)$ als selbstverständliches Attribut nicht mehr anschreiben.

Es werde eine bestimmte Stelle (x) und ein bestimmter Zeitpunkt (t) herausgegriffen. Zwischen den Strom- und Spannungswerten bestehen dann nach den Gleichungen 8) und 9) folgende Beziehungen[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{c} &= L_1 \varrho + M\sigma, \\ \frac{\nu}{c} &= L_2 \sigma + M\varrho, \end{aligned}\right\} a) \qquad \left.\begin{aligned} -\frac{m}{c} &= L_1 r + Ms, \\ -\frac{n}{c} &= L_2 s + Mr, \end{aligned}\right\} b) \tag{12}$$

Für unsere späteren Zwecke wird es genügen, wenn wir uns auf **nah benachbarte** Doppelleitungen von mäßiger Breite beschränken (Abb. 1 und 2c). In diesem Falle ist es erlaubt,

$$L_1 = L_2 = L$$

zu setzen. Mit dieser Vereinfachung lauten die Lösungen der Gleichungen 12):

$$\varrho = \frac{\mu - \frac{M}{L}\nu}{2\mathfrak{z}},$$

$$\sigma = \frac{\nu - \frac{M}{L}\mu}{2\mathfrak{z}},$$

[1]) $\mu, \nu, \varrho \ldots$ hier als Bezeichnung der Funktionswerte der gleichnamigen willkürlichen Funktionen für eine gegebene Zeit und an einer gegebenen Stelle gebraucht.

$$r = -\frac{m - \frac{M}{L} n}{2\mathfrak{z}},$$

$$s = -\frac{n - \frac{M}{L} m}{2\mathfrak{z}},$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)}.$$

Dies sind genau die auf S. 268 mitgeteilten Beziehungen.

4b. Windungskapazität, Windungsinduktivität und Windungscharakteristik. Wir haben die Größe $\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)}$ Windungscharakteristik genannt. Wir können sie, da $\frac{1}{C} = K = c^2 L$ ist, durch lauter magnetische Größen ausdrücken:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2} c L \left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right). \tag{13a}$$

Wir können sie auch in lauter elektrischen Größen schreiben:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2} \frac{K}{c} \left(1 - \frac{H^2}{K^2}\right). \tag{13b}$$

Unsere Gleichungen 8) und 9) zeigen, daß elektrische und magnetische Größen gleichberechtigt sind. Infolgedessen entspricht dem physikalischen Wesen der Windungscharakteristik besser die gemischte Schreibweise:

$$\mathfrak{z} = \sqrt{\frac{L}{2}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{K}{2}\left(1 - \frac{H^2}{K^2}\right)}. \tag{13c}$$

Folgerichtig müssen wir die magnetische Induktivität

$$\mathfrak{L} = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right) \tag{14}$$

die „Windungsinduktivität“ und die Kapazität

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{K\left(1 - \frac{H^2}{K^2}\right)} \tag{15}$$

die „Windungskapazität“ nennen.

Den physikalischen Charakter der Windungsinduktivität erkennt man am besten aus folgender Vorstellung: Der Strom in der inneren Doppelleitung (Abb. 2) sei genau so groß wie der Strom in der äußeren, aber ihm entgegengesetzt gerichtet. Unter dieser besonderen Stromverteilung erhalten wir das sogenannte „Streufeld“ beider Doppelleitungen. Bei mäßiger Breite der Doppelleitungen besteht dieses Streufeld angenähert aus zwei gleichen Teilen: aus dem Felde einer aus den Leitersträngen 1 und 2 und einer aus den Leitersträngen 3 und 4 gebildeten schmalen Doppelleitung. Zu dem gesamten Streufelde gehört eine Streuinduktivität, die, wie man leicht nachweist, nahezu dem doppelten Wert von $\mathfrak{L}$ gleichkommt[1]). Unsere Windungsinduktivität stimmt daher bis auf einen geringen Fehler mit der Induktivität der aus den Leiter-

---

[1]) Wert der Streuinduktivität: $2(L - M)$,

Doppelwert von $\mathfrak{L}$: $2(L - M) \cdot \frac{\left(1 + \frac{M}{L}\right)}{2}$.

strängen 1 und 2 gebildeten Doppelleitung überein. Ganz ähnlich kommt näherungsweise die Windungskapazität der Kapazität eines Kondensators gleich, dessen eine Belegung aus dem Leiterstrang 1, dessen andere Belegung aus dem Leiterstrang 2 gebildet wird.

Unsere Windungscharakteristik weicht daher (vgl. oben) von der Charakteristik einer aus den Leitersträngen 1 und 2 gebildeten Doppelleitung nur wenig ab und stimmt mit ihr um so besser überein, je breiter die Hauptdoppelleitungen (die Spule) gemacht werden.

5. **Induktionskoeffizienten.** Zur Erleichterung der Berechnung von Wellencharakteristiken seien hier einige Formeln und Kurven gegeben.

Eine Doppelleitung von der Breite B und dem Drahtdurchmesser d (Abb. 3a) hat die Eigeninduktivität

$$L = 2 \ln\left(\frac{2\,B}{d}\right) \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}. \tag{16}$$

Um einen Ausgangspunkt für Zahlenwerte zu haben, setzen wir $d = 0{,}1$ cm (1 mm starker Draht). Die Eigeninduktivität hängt dann lediglich vom Abstande B ab. Ihre Werte sind der Abb. 3a zu entnehmen.

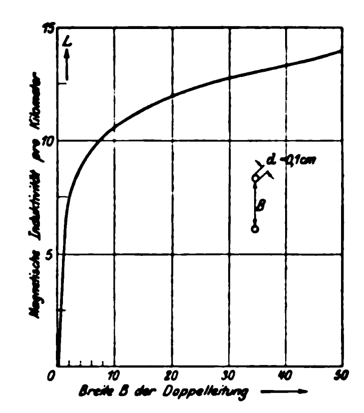


Abb. 3a. Magnetische Induktivität einer einfachen Doppelleitung. Einheit der Ordinaten $1 \cdot 10^{-4}$.

Abb. 3b. Die Funktion 2 ln 2 k.

Ist der Drahtdurchmesser 0,1 mm, so ist die Eigeninduktivität um den Betrag 4,6 größer, ist der Drahtdurchmesser 1 cm, so ist sie um 4,6 kleiner als gezeichnet.

Für die Gegeninduktivität zweier im Abstande δ nahe beieinander befindlicher Doppelleitungen gilt der Ausdruck:

$$M = 2 \ln \frac{B - \delta}{\delta} \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}. \tag{17a}$$

Wir formen um und zielen auf den Wert $1 - \frac{M}{L}$ hin:

$$1 - \frac{M}{L} = 1 - \frac{\ln \frac{B - \delta}{\delta}}{\ln \frac{2\,B}{d}}$$

oder wenn wir

$$\delta = k\,d \tag{18}$$

setzen

$$1 - \frac{M}{L} = \frac{\ln \dfrac{2\,k}{1 - \frac{\delta}{B}}}{\ln \frac{2\,B}{d}} = \frac{2 \ln \dfrac{2\,k}{1 - \frac{\delta}{B}}}{L} \cdot 10^{-4}.$$

Da wir es mit nahe benachbarten Doppelleitungen zu tun haben, vernachlässigen wir $\frac{\delta}{B}$ gegen 1 und erhalten

$$1 - \frac{M}{L} = \frac{2 \ln 2k}{L} \cdot 10^{-4}. \qquad 17b)$$

Die Werte der neu hinzutretenden Funktion $2 \ln 2k$ sind der Abb. 3b zu entnehmen.

Ein Beispiel. Das folgende Beispiel wird uns auf dem Wege unserer Rechnungen begleiten. Eine aus 1 mm starkem Draht hergestellte Spule von der Breite $B = 50$ cm, von der Länge $l = 200$ cm werde an eine Gleichspannung von $E = 10000$ Volt geschaltet. Der Abstand δ der Windungen betrage 1 mm (ganz dicht gewickelte Spule; $k = 1$; vgl. Gl. 18).

Für den Augenblick wollen wir nur die Windungscharakteristik dieser Spule berechnen:

Die Eigeninduktivität der äußeren und inneren Doppelleitung beträgt nach Abb. 3a

$$L = 13{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Henry pro Kilometer.}$$

Für die Berechnung der Gegeninduktivität M entnehmen wir der Abb. 3b zur Abszisse $k = 1$ den Wert

$$2 \ln 2k = 1{,}38.$$

Somit ist

$$1 - \frac{M}{L} = \frac{1{,}38}{13{,}8} = 0{,}1.$$

Die Charakteristik der äußeren oder inneren Doppelleitung (Abb. 2a und b) ergibt sich zu:

$$Z = 3 \cdot 10^5 \cdot 13{,}8 \cdot 10^{-4} = 414 \text{ Ohm/km}.$$

Die Windungscharakteristik $\mathfrak{z}$ dagegen ist viel kleiner (Gl. 13a):

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 13{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}9 = 39{,}4 \text{ Ohm/km}.$$

Die Windungskapazität ist, wie man leicht selbst nachrechnet, etwa 10,5 mal größer als die Kapazität der äußeren Doppelleitung; die Windungsinduktivität dagegen etwa 10,5 mal kleiner als die Induktivität der äußeren Doppelleitung.

Die Windungscharakteristik nähert sich somit den Werten der Charakteristik eines Kabels.

6. Der Anfang des Einschaltvorganges. Mit dem Einwerfen der Schalter (Abb. 1) wird an die Klemmen AD die Spannung E gelegt. Es muß somit von links nach rechts eine Anfangswelle $\mu_0 = E$ in die Spule einziehen[1]). Die Spannung BC war vor dem Schalten gleich Null. Sie behält diesen Wert für alle folgenden Zeiten bei. Denn der Bügel BC sollte ja ein echter Kurzschluß sein.

Für den Anfang der Spulenaufladung haben wir somit

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= E, \\ \nu_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

zu setzen.

Nach den Gleichungen 7a) und c) ziehen gleichzeitig in die Spulen die folgenden Ströme ein:

---

[1]) In genauerer Schreibweise: Für Abzissen $x > ct$ ist $\mu_0 = 0$; für Abszissen $x < ct$ ist $\mu_0 = E$. Das Bild der Welle μ_0 ist somit das folgende (s. Abb. 5).

Wir werden zur Vermeidung von Weitschweifigkeiten bei Niederschrift von Spannungen und Stromwellen die abgekürzte Ausdrucksweise beibehalten, bei der die rechteckige Welle lediglich durch ihre Höhe charakterisiert ist und bei der die Lage des Kopfes und Schweifes aus dem Zusammenhange hervorgeht.

$$\varrho_0 = \frac{E}{2\mathfrak{z}}, \quad a) \qquad \sigma_0 = -\frac{M}{L}\cdot\frac{E}{2\mathfrak{z}}. \quad b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Es liegt kein Grund vor anzunehmen, daß im Schaltmoment rückläufige Spannungen und Ströme entstehen. Die Wellen m_0 und n_0 sind daher gleich Null. Die Formeln 19) und 20) beschreiben somit vollständig den Anfang des Einschaltvorganges.

Das elektrische Feld steckt anfangs vorzugsweise zwischen den Leitern AF und BH und zwischen den Leitern CG und DK, also „zwischen den Windungen". Diese werden mit einer Spannung von je $\frac{E}{2}$ Volt beansprucht. Die große Mittelpartie der Spule (die Windungsfläche) ist praktisch feldfrei (Abb. 4).

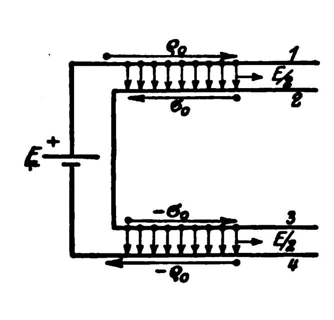


Abb. 4a. Ströme und Spannungen unmittelbar nach dem Einschalten.

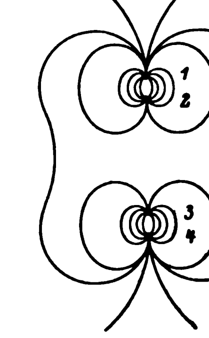


Abb. 4b. Das elektrische Feld unmittelbar nach dem Einschalten.

Hätten wir die Gleichspannung E auf die Freileitung Abb. 2a geschaltet, so wäre in sie der Strom $\frac{E}{Z}$ (in unserem Beispiel S. 272 der Strom von $\frac{10000}{417} = 24$ Ampere) eingezogen. Beim Schalten auf die Spule ergibt sich der vielmal größere Strom $\frac{E}{2\mathfrak{z}}$ (in unserem Beispiel der Strom $\frac{10000}{2\cdot 39{,}4} = 127$ Ampere). Der Strom σ_0 in der inneren Windung hat die entgegengesetzte Richtung wie der Strom ϱ_0 in der äußeren Windung. An Stärke kommt er ihm fast (im Beispiel bis auf $10\,^0/_0$) gleich. Infolgedessen „sitzt" auch das magnetische Feld hauptsächlich im Raume zwischen den Windungen oder doch in deren Nähe. Die innere Spulenfläche erhält somit so gut wie gar kein magnetisches und kein elektrisches Feld (Abschirmung).

Man verschafft sich am besten folgendermaßen einen Überblick über den Anfang des Einschaltvorganges. Man faßt in der Phantasie die Leitungen AF und BH zu einer Doppelleitung zusammen. Man tut das gleiche mit den Leitungen DK und CG. Und nun stelle man sich vor, es würde an jede Doppelleitung die Spannung $\frac{E}{2}$ gelegt.

Bei uns Technikern ist der Glaube weit verbreitet, die Spule verhalte sich wie eine Doppelleitung von sehr hoher Charakteristik. Bisher finden wir das Gegenteil: Für den Anfang des Einschaltvorganges wirkt die Spule wie ein Kabel[1]).

7. Die Wanderwelle erreicht zum ersten Male die Spulenrückseite. Der Anfang des Einschaltvorganges ist abgelaufen, wenn die Wanderwelle zum ersten Male die Längsseiten der Spule durchmessen hat und auf die Rückseite der Spule stößt. Hier sind nun widerstandslose Verbindungen zwischen den Haupt-

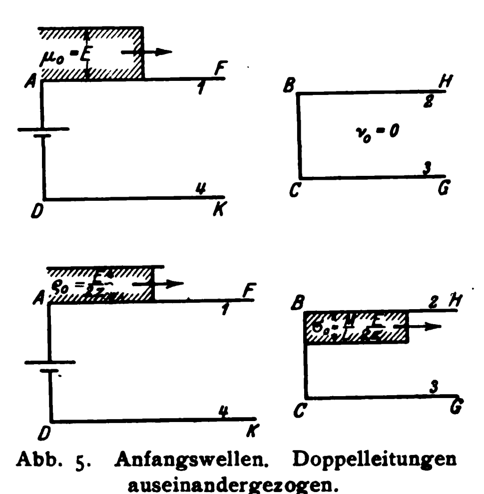


Abb. 5. Anfangswellen. Doppelleitungen auseinandergezogen.

[1]) Man vergleiche hierzu die Aufladungen der Windungskapazitäten am Anfang des Einschaltvorganges bei Wagner a. a. O.

doppelleitungen angebracht. Erst diese Verbindungen machen aus den Doppelleitungen eine richtige Spule. Bisher konnte die Wanderwelle noch nichts davon wissen, daß man sie in eine Spule hineinzwingt. Erst jetzt muß sie sich dem Spulencharakter der Leitung anpassen. Den großen Zügen nach läßt sich schon jetzt übersehen, was erfolgen wird: Die gleichgerichteten Ströme in den Leitersträngen 1 und 3 (Abb. 5 und 1) müssen aufeinanderprallen. Hierdurch muß eine Aufladung entstehen. Entsprechend muß für die Leiterstränge 2 und 4 eine Entladung stattfinden. Im ganzen muß somit eine Spannungserhöhung an der Spulenrückseite erfolgen.

Wir werden von jetzt ab daher annehmen müssen, daß an der Spulenrückseite rückläufige Wellen, die wir mit m_0 und n_0 bezeichnen, entstehen. Sie überlagern sich den vorwärtseilenden Wellen μ_0 und ν_0. Nach zwei Gesichtspunkten müssen wir über die neuen Wellen verfügen:

1. Es müssen die Spannungen für FG und HK verschwinden. Denn die gleichnamigen Bügel sollen ja echte Kurzschlüsse sein.
2. Es müssen die bei F und G zu- und abfließenden Ströme einander gleich werden. Dieselbe Forderung gilt auch für die Ströme bei H und K (Abb. 1).

Wir brauchen nur eine Spannungs- und eine Stromforderung zu erfüllen. Die zweiten Forderungen sind dann von selbst erfüllt. Dies rührt daher, daß unser mathematischer Ansatz (Abschnitt 4) Felder voraussetzt, die zur strichpunktierten Spulenmitte (Abb. 1) symmetrisch sind.

Die Summe der Spannungen zwischen F und H und zwischen G und K beträgt unmittelbar vor dem Eintreffen der Wanderwelle an der Spulenrückseite $\mu_0 - \nu_0$. Sie beträgt unmittelbar nach Passieren der Spulenrückseite offenbar $\mu_0 + m_0 - \nu_0 - n_0$. Die Spannung zwischen F und H ist nach Passieren der Spulenrückseite aus Symmetriegründen $\frac{\mu_0 + m_0 - \nu_0 - n_0}{2}$. Die Spannung zwischen den Punkten FG und HK ergibt sich somit zu: $\nu_0 + n_0 + \frac{\mu_0 + m_0 - \nu_0 - n_0}{2} = \frac{\mu_0 + m_0 + \nu_0 + n_0}{2}$. Soll sie verschwinden, so muß gefordert werden:

$$\mu_0 + m_0 + \nu_0 + n_0 = 0. \tag{21}$$

Nach Passieren der Spulenrückseite hat der Strom im Leiter 1 den Wert $\varrho_0 + r_0$; der Strom im Leiter 3 den Wert $-(\sigma_0 + s_0)$. Die Summe beider soll verschwinden (vgl. oben unter 2.). Somit muß gefordert werden:

$$\varrho_0 + r_0 + \sigma_0 + s_0 = 0$$

oder, wenn auf die Ausdrücke 7) zurückgegriffen wird:

$$\mu_0 - \nu_0 - m_0 + n_0 = 0. \tag{22}$$

Die Forderungen 21) und 22) sind erfüllt, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= -\nu_0, \quad \text{a)} \\ n_0 &= -\mu_0. \quad \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wenn also die Wanderwelle die Spulenrückseite erreicht und passiert hat, so gehören zur Beschreibung des gesamten Vorganges nicht nur die von der Gleichstromquelle entsandten Wellen μ_0 und ν_0, sondern auch die von rechts nach links wandernden Wellen m_0 und n_0. Diese ergeben sich aus den Wellen μ_0 und ν_0 durch Vertauschung und Wechsel des Vorzeichens. Nun war $\mu_0 = E$; $\nu_0 = 0$; somit ist $m_0 = 0$; $n_0 = -E$ (Abb. 7b).

Noch kurz eine physikalische Erklärung dieses durch mathematische Denkweise gefundenen Ergebnisses. Wenn eine Spannungswelle eine am Ende kurzgeschlossene einfache Doppelleitung (Abb. 6a) erreicht, so sagen wir, sie werde daselbst unter

Wechsels des Vorzeichens „reflektiert". Im Augenblick des Auftreffens kommt aus dem Kurzschlußbügel, wie ein deus ex machina, die rückläufige Welle mit passendem Vorzeichen herausgeschnellt. Noch eine andere Vorstellung ist möglich. Die Feldwerte des elektrischen und magnetischen Feldes, die dem Leiter 1 entlang (Abb. 6) gleiten, werden über den Kurzschlußbügel hinweggeleitet und finden sich nachher am Leiter 2 vor. Das Entsprechende gilt für die Feldwerte, die dem Leiter 2 entlang gleiten. (Man beachte die dünn gezeichneten Pfeile der Abb. 6, die die Bewegungsrichtung andeuten sollen.) Wandern die Feldwerte vor dem Passieren des Kurzschlußbügels nach rechts, so wandern sie nach dem Passieren des Kurzschlußbügels nach links. War die Spannung vorher vom Leiter 1 nach dem Leiter 2 gerichtet (dicker ausgezogener Pfeil), so muß sie nachher vom Leiter 2 nach dem Leiter 1 gerichtet sein (dicker gestrichelter Pfeil; Wechsel des Vorzeichens). Die rückläufige Spannungswelle ergibt sich in dieser Auffassungsweise als eine Fortsetzung der ankommenden Welle.

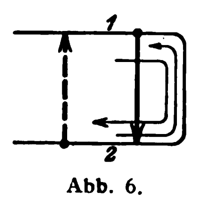


Abb. 6.

Genau so ergeben sich auch unsere Wellen m_0 und n_0 als Fortsetzungen der Wellen μ_0 und ν_0.

Nach Passieren der Spulenrückseite stellt sich folgender Spannungszustand ein, der sich nach und nach zur Spulenvorderseite hin fortpflanzt: Zwischen den Leitern 1 und 2 und zwischen den Leitern 3 und 4 (also zwischen den Windungen) liegt die Spannung (vgl. S. 274) $\frac{\mu_0 + m_0 - \nu_0 - n_0}{2} = E$. Vorhin (Abschnitt 6) hatte die Spannung daselbst den Wert $\frac{E}{2}$. Die Spannung steigt somit auf das Doppelte des früheren Betrages. Jetzt erhält auch das Spuleninnere ein elektrisches Feld, das zwischen den Leitern 2 und 3 die Spannung $-E$ aufrecht erhält (Abb. 7a).

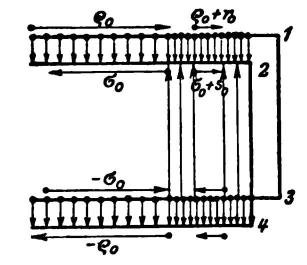


Abb. 7a. Ströme und Spannungen; die Einschaltwelle hat eben zum ersten Male die Spulenrückseite passiert.

Zu dem Strome $\varrho_0 = \frac{E}{2\,\mathfrak{z}}$ (Gl. 20) gesellt sich der Strom

$$r_0 = -\frac{m_0 - n_0 \frac{M}{L}}{2\,\mathfrak{z}} = -\frac{M}{L}\,\frac{E}{2\,\mathfrak{z}}.$$

Der Gesamtstrom im Leiter 1 sinkt daher von $\frac{E}{2\,\mathfrak{z}}$ auf den Wert

$$\varrho_0 + r_0 = \left(1 - \frac{M}{L}\right)\frac{E}{2\,\mathfrak{z}} \tag{24a}$$

herunter. (In unserem Beispiel fällt er somit von 127 auf 12,7 Ampere.) Denselben Strom, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, finden wir im Leiter 4 vor. Im Leiter 2 überlagern sich die Ströme σ_0 und $s_0 = \frac{E}{2\,\mathfrak{z}}$. Der Gesamtstrom im Leiter 2 wird daher

$$\sigma_0 + s_0 = \left(1 - \frac{M}{L}\right)\frac{E}{2\,\mathfrak{z}}. \tag{24b}$$

Die Ströme in den Leitersträngen 1 und 2 werden, nachdem die Wanderwelle die Spulenrückseite passiert hat, gleich groß und gleich gerichtet. Das Spuleninnere erhält daher jetzt ein magnetisches Feld.

In der Stromverteilung des vorigen Abschnittes (Abb. 5) liegt noch nicht die geringste Andeutung, daß unser Vorgang auf eine Gleichstromdurchflutung der Spule hinsteuert. Erst jetzt zeigt sich hierfür die erste Andeutung.

Allerdings schiebt sich von dem recht beträchtlichen Strome $\frac{E}{2\mathfrak{z}}$, der anfangs in die Spule hineinschoß, nun der kleine Bruchteil $\left(1 - \frac{M}{L}\right)\frac{E}{2\mathfrak{z}}$ in die Spule hinein. Der übrige Teil des Stromes dient zur Aufladung der Spule, zur Erzeugung der Überspannung (Abb. 7a u. b).

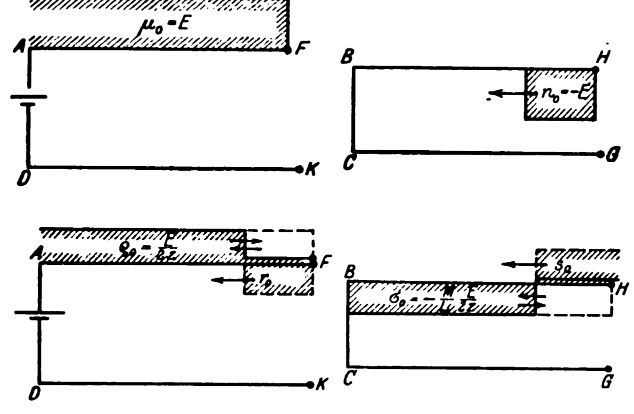


Abb. 7b. Ströme und Spannungen an der Spulenrückseite. Doppelleitungen auseinandergezogen.

8. Die Wanderwelle kommt wieder zur Spulenvorderseite zurück. In der folgenden Zeit wandert der Kopf der Wanderwelle (also der Kopf der Wellen m_0 und n_0) nach der Spulenvorderseite. Gleichzeitig breitet sich der beschriebene Spannungs- und Stromzustand von rechts nach links aus. Sobald der Kopf der Wanderwelle wieder die Spulenvorderseite erreicht, muß sie wieder eine neue Veränderung erleiden. Bisher entsprang der Gleichstromquelle die Spannungswelle μ_0. Tragen wir die zwischen A...D (Abb. 1) gewonnenen Werte der rechtsläufigen Welle in einem Zeitdiagramm auf, so erhalten wir eine Parallele zur Zeitachse. Von dem Zeitmomente τ ab, in dem die Wanderwelle wieder die Spulenvorderseite erreicht, braucht der Wert nicht mehr μ_0 zu sein. Wir bringen dies am besten dadurch zum Ausdruck, daß wir von diesem Augenblick an die Welle μ_0 an der Spulenvorderseite abbrechen und ihr als Fortsetzung eine neue Welle μ_1 folgen lassen, die sich von nun an an Stelle der Welle μ_0 von der Gleichstromquelle loslöst (Abb. 8).

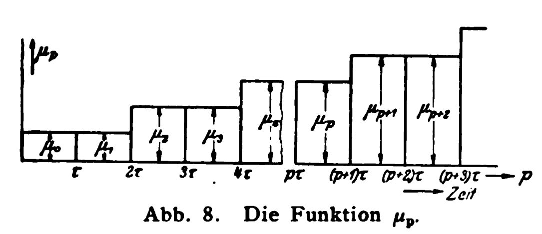


Abb. 8. Die Funktion μ_p.

Es muß offenbar

$$\mu_1 + m_0 = E \tag{25}$$

sein, damit an den Klemmen AD die Spannung E erhalten bleibt. In unserem besonderen Falle ist zwar $m_0 = 0$, so daß wieder $\mu_1 = E$ wird. Später aber wird die hier getroffene Unterscheidung und die Erfüllung der Gl. 25 unerläßlich sein.

Auch bei der inneren Doppelleitung wird eine neue Spannungswelle ν_1, die nach rechts wandert, ihren Ursprung nehmen (vgl. S. 275). Wegen des Kurzschlusses BC muß notwendigerweise

$$\nu_1 + n_0 = 0,$$

$$\nu_1 = E$$

gesetzt werden.

Da die resultierende Spannung $\nu_1 + n_0$ wieder Null ist, wird das Spuleninnere wieder frei vom elektrischen Felde. Und wieder, wie anfangs, liegt das elektrische Feld zwischen den Leitern 1 und 2 und zwischen den Leitern 3 und 4, deren Isolation es wieder mit der Spannung $m_0 + \mu_1 - n_0 - \nu_1 = \frac{E}{2}$ beansprucht.

Für die neuen Ströme ϱ_1 und σ_1 ergeben sich nach 7) die Werte:

$$\varrho_1 = \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right),$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right).$$

Der Gesamtstrom im Leiter 1 ist daher

$$\varrho_1 + r_0 = \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1 - 2 \cdot \frac{M}{L}\right)$$

und im Leiter 2

$$\sigma_1 + s_0 = \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(2 - \frac{M}{L}\right).$$

In unserem Beispiel (S. 272) ergibt sich jetzt der Strom im Leiter 1 zu $127(1 - 2 \cdot 0{,}9) = -127 \cdot 0{,}8 = -102$ Ampere, der Strom im Leiter 2 zu $127 \cdot 1{,}1 = +140$ Ampere.

War für den Anfang des Schaltvorganges der Strom im Leiter 1 positiv, im Leiter 2 negativ, so ist jetzt gerade das Umgekehrte der Fall. Die aufgeladene Spule gibt jetzt Strom in die Energiequelle zurück. Dagegen erhält die innere Doppelleitung einen positiven Strom (Abb. 9).

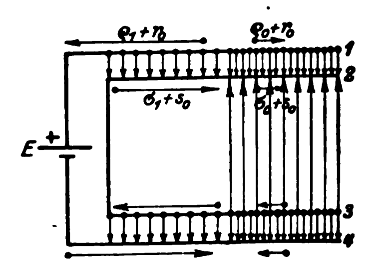


Abb. 9. Die Anfangswelle überschreitet zum zweiten Male die Spulenvorderseite.

9. Allgemeiner Fall. Die Differenzengleichung und ihre Lösung. Wir könnten auf dem eingeschlagenen Wege schrittweise vorwärts gehen. Dieses mühselige Geschäft wollen wir aber mit Hilfe einer Differenzengleichung abkürzen.

Wir werden im folgenden einen Hin- und Rückgang der Wanderwelle, wie wir ihn soeben betrachtet haben, einen „Lauf" nennen und somit von einem ersten, zweiten, ... p-ten Laufe der Wanderwelle sprechen.

μ_p, ν_p seien die Werte der von links nach rechts laufenden Wellen nach vollendetem p-ten Laufe [also am Anfange des $(p+1)$-ten Laufes]. m_p und n_p mögen die entsprechenden Werte der von rechts nach links laufenden Wellen sein (vgl. Abb. 8)[1]. Denken wir unst die Werte μ_p und ν_p gegeben, so werden die entsprechenden Werte von m_p und n_p die folgenden sein müssen:

$$\left.\begin{aligned} m_p &= -\nu_p, \\ n_p &= -\mu_p. \end{aligned}\right\} \quad 25)$$

Man überzeugt sich von ihrer Richtigkeit, wenn man die im Abschnitt 7 für μ_0, ν_0, m_0 und n_0 durchgeführte Gedankenfolge Wort für Wort auf die Wellen μ_p, ν_p, m_p und n_p überträgt.

Wenn die rücklaufenden Wellen m_p und n_p an der Vorderseite der Spule angekommen sind und der $(p+1)$-Lauf vollendet ist, dann brechen wir wieder die μ_p und ν_p ab und lassen als Fortsetzung die Wellen μ_{p+1} und ν_{p+1} folgen. Übertragen wir wieder die bereits für m_0, n_0, μ_1 und ν_1 durchgeführten Gedankengänge, so kommen wir jetzt zu den folgenden Forderungen:

$$\mu_{p+1} + m_p = E$$

oder (vgl. Gl. 25)

$$\left.\begin{aligned} \mu_{p+1} - \nu_p &= E, \\ \nu_{p+1} &= -n_p = +\mu_p. \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

[1]) Die m_p-Wellen entstehen immer einen halben Lauf später als die μ_p-Wellen.

Mit letzterer Gleichung identisch ist die Beziehung:

$$\nu_p = \mu_{p-1}. \tag{27}$$

Somit ergibt sich die Differenzengleichung[1]):

$$\mu_{p+1} - \mu_{p-1} = E$$

oder auch

$$\mu_{p+2} - \mu_p = E. \tag{28}$$

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$\mu_p = A + B(-1)^p + \frac{E}{2} p. \tag{29}$$

Von der Richtigkeit der Lösung überzeugt man sich durch Einsetzen.

Wir haben jetzt die noch willkürlich gelassenen Konstanten A und B zu bestimmen.

Für $p = 0$, also nach vollendetem nullten Laufe (am Anfang des Einschaltvorganges) ist (Gl. 11)

$$\mu_{p\,|p=0|} = \mu_0 = E = A + B.$$

Auch nach vollendetem 1-Laufe ist (vgl. S. 276)

$$\mu_{p\,|p=1|} = \mu_1 = E = A - B + \frac{E}{2}.$$

Somit ist

$$A = \frac{3}{4} E; \qquad B = \frac{E}{4} \tag{30}$$

und

$$\mu_p = \frac{E}{4}[3 + 2p + (-1)^p]. \tag{31a}$$

Weiter schreiben wir:

$$\left.\begin{aligned} \nu_p &= \frac{E}{4}[1 + 2p - (-1)^p], && \text{b)} \\ m_p &= -\frac{E}{4}[1 + 2p - (-1)^p], && \text{c)} \\ n_p &= -\frac{E}{4}[3 + 2p + (-1)^p]. && \text{d)} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hiermit können wir jetzt Spannungen und Ströme zu beliebiger Zeit angeben.

10. Die Einschaltspannungen. Ist unsere Rechnung richtig, so muß sie für die Klemmenspannung (längs dem Wege A—D) den Wert E ergeben. Sie tut dies auch, denn nach vollendetem p-tem Laufe ergibt sich die Klemmenspannung:

$$E_K = \mu_p + m_{p-1} = \frac{E}{4}[3 + 2p + (-1)^p - 1 + (-1)^{p-1} - 2p + 2] = E.$$

Die Spannung DC (Klemmen eines echten Kurzschlusses) muß für alle Zeiten verschwinden. Auch diese Probe besteht unsere Rechnung. Es ist:

$$\nu_p + n_{p-1} = \frac{E}{4}[1 + 2p - (-1)^p - 3 - 2p + 2 - (-1)^{p-1}] = 0.$$

Wollen wir Überspannungserscheinungen und Windungsdurchschläge unserer Spule erklären, so müssen wir die Spannung zwischen den Leitern 1 und 2 oder 3 und 4 berechnen. Mißt man die Spannungen bei AB (Spulenvorderseite), so erhält man für sie den dauernd gleichen Wert:

$$E_v = \frac{\mu_p + m_{p-1} - \nu_p - n_{p-1}}{2} = \frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2} = \frac{E}{2}. \tag{32}$$

[1]) Über andere Beispiele von Differenzengleichung s. bei Wagner, ETZ 1914 S. 706 und die dort angeführte Literatur.

Dies ist der „normale“ Wert der Spannung. Mit ihr würde die Isolation der Windungen ebenfalls beansprucht werden, wenn wir statt der Gleichspannung E die Wechspelspannung $E \sin \omega t$ an die Spule gelegt hätten (vgl. Anm. 1 S. 266).

Mißt man die Spannung dagegen bei FH (Spulenrückseite), so erhält man den Wert:

$$\mathbf{E}_r = \frac{\mu_p + m_p - \nu_p - n_p}{2} = \mu_p - \mu_{p-1} \qquad 33)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. 25)

$$\mathbf{E}_r = \mu_p - \mu_{p-1} = \frac{E}{4}[3 + 2p + (-1)^p - 1 + (-1)^p - 2p] = \frac{E}{2}[1 + (-1)^p]. \qquad 34)$$

Für Null und alle geraden Werte von p verschwindet $\mathbf{E}_r$. Für alle ungeraden Werte von p erreicht $\mathbf{E}_r$ den Wert E und ist dann doppelt so hoch als die „normale“ Spannung und genau so hoch als die Klemmenspannung E. In Abb. 10 habe ich den Verlauf der Spannung $\mathbf{E}_v$ und $\mathbf{E}_r$ in Abhängigkeit von der Zahl p der Läufe dargestellt. Dies Bild gilt gleichzeitig für die zeitliche Abhängigkeit der Spannung. Als Zeiteinheit ist dann die Laufzeit τ der Wanderwelle gewählt. Daselbst findet sich auch die Spannung $\mathbf{E}_m$, die Windungsspannung für die Mitte der Spulenlängsseite. Die Spannung $\mathbf{E}_m$ setzt sich, wie man leicht selbst ermittelt, teilweise aus den Werten der Spannung $\mathbf{E}_v$, teilweise aus denen der Spannung $\mathbf{E}_r$ zusammen.

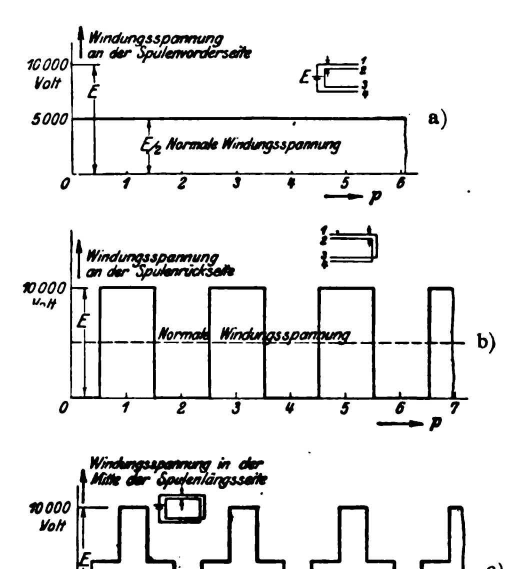


Abb. 10. a) Die Windungsspannungen der Spulenvorderseite, b) an der Spulenrückseite und c) in der Mitte der Spulenlängsseite.

Ein Blick auf unser Spannungsbild zeigt klar, daß die gefährdete Stelle der Spule an ihrer Rückseite nahe bei der Drahtmitte liegt. Ist die Isolation so gewählt, daß sie die normale Spannung $\frac{E}{2}$ gut aushält, aber bei der Spannung E unfehlbar durchschlägt, so muß die Spule an der Rückseite bestimmt durchschlagen werden.

Beim Einschalten wird eine Schwingung der Spule angeregt. Sehen wir von der durchschnittlichen Spannung $\frac{E}{2}$ ab, so liegt der Spannungsbauch an der Spulenrückseite, der Spannungsknoten an der Spulenvorderseite. Die Verwandtschaft mit der Schwingung eines über eine konzentrierte Induktivität eingeschalteten Kondensators ist leicht zu erkennen. Die Überspannung wirkt stoßweise für die kurze Dauer eines einzelnen Laufes. Sie wirkt bei vernachlässigbarem Widerstande aber nicht nur ein einziges Mal, sondern kehrt in regelmäßigen Zeitintervallen immer wieder. Sie dauert somit lange genug an, um trotz des bekannten Entladeverzuges den Durchschlag hervorrufen zu können. Bekanntlich bestand in der Kürze der Zeit, die sich für die Dauer der Überspannung ergab, wenn man die Spule als eine Doppelleitung mit sehr hoher Charakteristik auffaßte, ein Hauptbedenken gegen die Berechtigung dieser Auffassung. Diese Schwierigkeit fällt hier ganz weg.

Den physikalischen Grund der Entstehung der Überspannung haben wir bereits S. 274 angedeutet. Wir wollen ihn aber der Wichtigkeit und Neueit wegen ausführlicher zur Sprache bringen.

Die Spule verhält sich im allerersten Augenblicke wie ein Kabel. Der Strom fließt ungehindert in kräftigem Strahle in diejenigen Leiter ein, die unmittelbar mit der Stromquelle leitend verbunden werden. Gleichzeitig wird in benachbarten Leitern ein entgegengesetzter Strom induziert. Der von der Stromquelle getriebene und der durch die Induktion hervorgerufene Strom stoßen infolge der an der Rückseite der Spule angebrachten Drahtverbindungen aufeinander. Nun folgt ein Aufstauen der Elektrizität und eine Erhöhung der Spannung. Durch den elektrischen Stoß wird eine Eigenschwingung angeregt. Die einmal aufgetretene Überspannung wiederholt sich nach gewissen Zeitintervallen immer wieder, bis sie, wie wir später zeigen werden, durch den Widerstand der Leitung abgedämpft wird.

Noch auf eine Eigenschaft der Überspannung sei hingewiesen. Sie ist bei der Spule aus zwei Windungen (beim Einschalten über ganz kurze Zuleitungen) sonderbarerweise unabhängig von dem Abstande der beiden Windungen. Ob wir die Windungen fest aneinanderlegen oder auseinanderziehen, immer bleibt die Überspannung die gleiche[1]). Der physikalische Grund liegt im folgenden. Liegen die Windungen nahe beieinander, dann ist die Windungskapazität ziemlich beträchtlich. Der Anfangsstrom ϱ_0 ist groß, und ebenso die sich an der Spulenrückseite aufstauende Elektrizitätsmenge. Werden die Windungen auseinandergezogen, so verkleinert sich die Windungskapazität. Es verkleinert sich aber im selben Verhältnis der Anfangsstrom ϱ_0 und die sich aufstauende Elektrizitätsmenge. Da für die Überspannung das Verhältnis von Elektrizitätsmenge und Windungskapazität in Frage kommt, so bleibt sie ungeändert.

11. Die Einschaltströme. Nach vollendetem p-ten Laufe entfließt der Gleichspannung der Strom

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{I}_{v_1} &= \varrho_p + r_{p-1} = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\mu_p - \frac{M}{L}\nu_p - m_{p-1} + \frac{M}{L} n_{p-1}\right] \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\mu_p - \frac{2M}{L}\mu_{p-1} + \mu_{p-2}\right], \\ \mathfrak{I}_{v_1} &= \frac{E}{4\mathfrak{z}}\left[\left(1 - \frac{M}{L}\right) + (-1)^p\left(1 + \frac{M}{L}\right) + 2p\left(1 - \frac{M}{L}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Der Klemmenstrom besteht im wesentlichen aus zwei Teilen: aus einem mit der Laufzahl p (der Zeit) proportional ansteigendem Strom immer gleicher Richtung von der Größe $\frac{E}{2\mathfrak{z}}\cdot p\cdot\left(1 - \frac{M}{L}\right)$ und einem Wechselstrom reckteckiger Kurvenform von der Amplitude $\frac{E}{4\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)$. (Man beachte den Faktor $(-1)^p$.) Dazu tritt noch ein schwacher Gleichstrom der Größe: $\frac{E}{4\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)$. Die Werte, die zu unserem Beispiel gehören, findet der Leser in Abb. 11a.

Im Leiter 2 fließt an der Spulenvorderseite der Strom:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{I}_{v_2} &= \sigma_p + s_{p-1} = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\nu_p - \frac{M}{L}\mu_p - n_{p-1} + \frac{M}{L} n_{p-1}\right] \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[2\mu_{p-1} - \frac{M}{L}\mu_p + \frac{M}{L}\mu_{p-2}\right], \\ &= \frac{E}{4\mathfrak{z}}\left[\left(1 - \frac{M}{L}\right) - (-1)^p\left(1 + \frac{M}{L}\right) + 2p\left(1 - \frac{M}{L}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

[1]) Bei einer Spule aus vielen Windungen gilt dies nicht mehr; hier nimmt die Überspannung zu, wenn die Windungen auseinandergezogen werden.

Der Strom I_{v_2} besteht aus denselben Teilströmen wie der Strom I_{v_1}, doch hat der übergelagerte Wechselstrom immer die entgegengesetzte Richtung wie beim Strome I_{v_1} (Abb. 11 b).

An der Spulenrückseite fließt im Leiter 1 der Strom:

$$I_{r_1} = \varrho_p + r_p = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\mu_p - m_p - \frac{M}{L}(\nu_p - n_p)\right] = \frac{1}{2\mathfrak{z}}[\mu_p + \mu_{p-1}]. \qquad 37a)$$

Für den Strom I_{r_2} im Leiter 2 erhält man denselben Ausdruck. Durch unsere Spannung E und die Spulenkonstanten ausgedrückt ist:

$$I_{r_1} = I_{r_2} = \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)(1 + p). \qquad 37b)$$

Der Strom an der Spulenrückseite hat in den Leitern 1 und 2 gleichen Wert und gleiche Richtung. Eine Wechselkomponente enthält er nicht. Er ist also ein echter Gleichstrom, der proportional der Zeit ansteigt (Abb. 11 c).

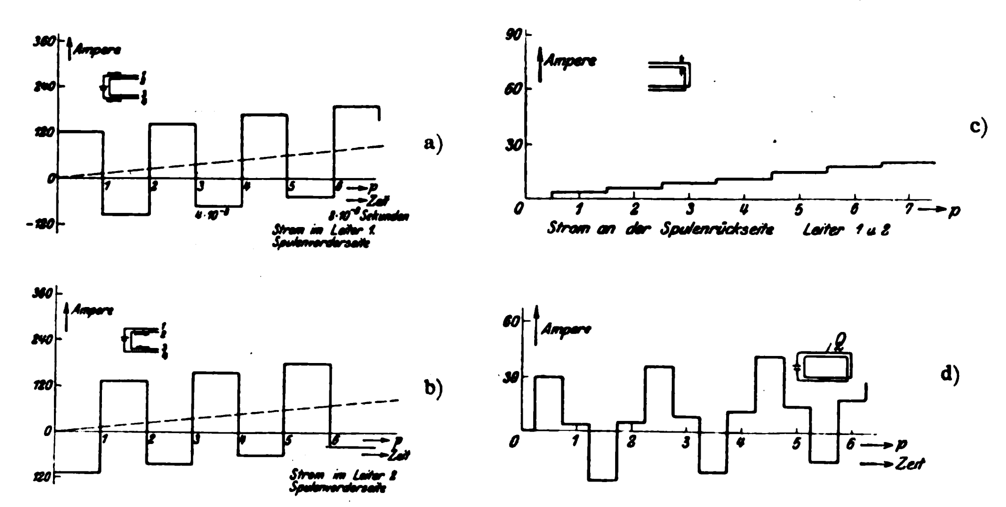


Abb. 11. Strom an der Spulenvorderseite. a) im Leiter 1 und b) im Leiter 2. c) Strom an der Spulenrückseite im Leiter 1 und 2. d) Strom im Leiter 1 für die Mitte der Spulenlängsseite.

Für Querschnitte in mittleren Partien der Spulenseiten ergeben sich für die Ströme Zwischenstufen der Kurven Abb. 11 a und 11 c (vgl. Abb. 11 d).

Die Abb. 11 läßt übersichtlich erkennen, in welcher Weise sich der von der Gleichspannung erzeugte Gleichstrom durch die Spule hindurchschiebt. Aber außer dem Gleichstrom erhält die Spule noch Wechstelstrom. Wir erkennen aus unseren Bildern deutlich, daß dieser mit einer Eigenschwingung der Spule schwingt. An der Spulenrückseite liegt ein Stromknoten, an der Spulenvorderseite ein Strombauch.

II. Einschaltspannungen und Ströme der mit Widerstand behafteten Spule.

12. Fragestellung. Die Differenzengleichung und ihre allgemeine Lösung. Wir denken uns einen konzentrierten Widerstand R vor die widerstandslose Spule geschaltet (Abb. 12). Wir werfen wieder beide Schalter gleichzeitig ein und fragen nach den Spannungs- und Stromwerten der Spule.

Für den besonderen Fall $R = 0$ gilt die im Abschnitt 9 durchgeführte Betrachtung. Wir haben sie jetzt zu erweitern. Es mögen wieder nach vollendetem p-ten Laufe von der Spulenvorderseite aus die Wellen μ_p und ν_p ihre Wanderung beginnen (vgl. Abschnitt 9). Angelangt an der Spulenrückseite, werden hier die Wellen m_p und n_p

zurückwandern (vgl. S. 277), die sich genau wie früher den ankommenden Wellen nach den Beziehungen

$$m_p = -\nu_p; \qquad n_p = -\mu_p$$

zuordnen müssen (Abschnitt 9). Anders verhält es sich dagegen, wenn die Wellen m_p und n_p die Spulenvorderseite erreichen. Zwar muß auch jetzt noch wie früher infolge des echten Kurzschlusses BC gefordert werden:

$$\nu_{p+1} = -n_p = \mu_p.$$

Dagegen gilt offenbar die Beziehung 26a) nicht mehr. Jetzt braucht die Spannung bei AD (Abb. 12) nicht mehr den Wert E, sondern nur den Wert $E - R\,\mathfrak{l}_{v_1}$ zu ergeben. Unter $\mathfrak{l}_{v_1}$ ist der aus der Gleichstromquelle fließende Strom im Leiter 1 verstanden. Nun ist (Gl. 35)

Abb. 12. Die mit Widersfand behaftete Spule aus zwei Windungen.

$$\mathfrak{l}_{v_1} = \varrho_{p+1} + r_p.$$

Somit haben wir die Gleichung 26a) durch folgende zu ersetzen:

$$\mu_{p+1} + m_p + R(\varrho_{p+1} + r_p) = E.$$

Wir formen um (vgl. Ausdruck 35):

$$\mu_{p+1} - \mu_{p-1} + \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(\mu_{p+1} - 2\frac{M}{L}\mu_p + \mu_{p-1}\right) = E.$$

Als Differenzengleichung des Problems erhalten wir jetzt:

$$\mu_{p-1}\left(\frac{R}{2\mathfrak{z}} - 1\right) - \mu_p \cdot \frac{M}{L} \cdot \frac{R}{\mathfrak{z}} + \mu_{p+1} \cdot \left(1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}\right) = E.$$

oder

$$\mu_{p+2} - \mu_{p+1} \cdot \delta - \mu_p \zeta = \frac{E}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}, \tag{39}$$

$$\delta = \frac{\frac{M}{L}\frac{R}{\mathfrak{z}}}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}; \qquad \zeta = \frac{1 - \frac{R}{2\mathfrak{z}}}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}. \tag{40}$$

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$\mu_p = A\eta_1^p + B\eta_2^p + \frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}. \tag{41}$$

η_1 und η_2 sind die Wurzeln der „charakteristischen“ (quadratischen) Gleichung:

$$\eta^2 - \delta\eta - \zeta = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung stimmen mit denen der Differenzengleichung überein. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\delta}{2} + \lambda, && \text{a)} \\ \eta_2 &= \frac{\delta}{2} - \lambda, && \text{b)} \\ \lambda &= \sqrt{\zeta + \frac{\delta^2}{4}}. && \text{c)} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Wir lassen die willkürlichen Konstanten A und B in 41) vorläufig noch unbestimmt und wenden uns den Ausdrücken für die Windungsspannungen und Ströme zu.

Bei der Spulenvorderseite beträgt die Windungsspannung (vgl. Gl. 32):

$$E_v = \frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2} = \frac{1}{2}\left[A\,\frac{(\eta_1 - 1)\cdot(\eta_1 + 1)}{\eta_1^2}\,\eta_1^p + B\,\frac{(\eta_2 - 1)(\eta_2 + 1)}{\eta_2^2}\,\eta_2^p\right]. \qquad 45a)$$

Bei der Spulenrückseite beträgt sie (vgl. Gl. 33):

$$E_r = \mu_p - \mu_{p-1} = A\,\frac{(\eta_1 - 1)}{\eta_1}\,\eta_1^p + B\,\frac{(\eta_2 - 1)}{\eta_2}\,\eta_2^p. \qquad 45b)$$

An der Spulenvorderseite fließt in den Leiter 1 der Strom ein (vgl. Gl. 35):

$$I_{v_1} = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\mu_p - 2\frac{M}{L}\mu_{p-1} + \mu_{p-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[A\,\frac{1 + \eta_1^2 - 2\frac{M}{L}\eta_1}{\eta_1^2}\,\eta_1^p + B\,\frac{1 + \eta_2^2 - 2\frac{M}{L}\eta_2}{\eta_2^2}\,\eta_2^p\right] + \frac{E}{R}. \qquad 45c)$$

Daselbst führt der Leiter 2 den Strom (vgl. Gl. 36):

$$I_{v_2} = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[2\mu_{p-1} - 2\frac{M}{L}(\mu_p + \mu_{p-2})\right]$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[A\,\frac{2\eta_1 - \frac{M}{L} - \frac{M}{L}\eta_1^2}{\eta_1^2}\,\eta_1^p + B\,\frac{2\eta_2 - \frac{M}{L} - \frac{M}{L}\eta_2^2}{\eta_2^2}\,\eta_2^p\right] + \frac{E}{R}. \qquad 45d)$$

An der Spulenrückseite fließen in beiden Leitern wieder gleiche Ströme, und zwar die folgenden (vgl. Gl. 37):

$$I_{r_1} = I_{r_2} = \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)(\mu_p + \mu_{p-1})$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)\left[A\,\frac{(\eta_1 + 1)}{\eta_1}\,\eta_1^p + B\,\frac{(\eta_2 + 1)}{\eta_2}\,\eta_2^p\right] + \frac{E}{R}. \qquad 45e)$$

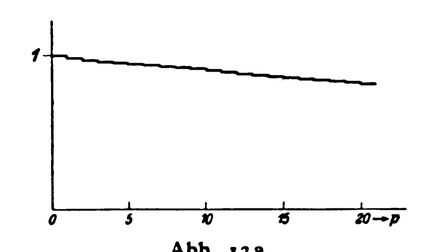


Abb. 13a.

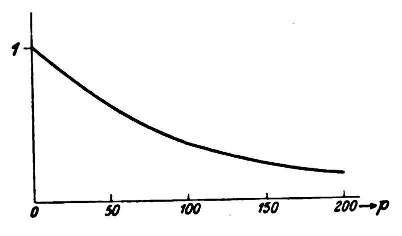


Abb. 13b.

Die Funktion η_1^p. a) Für den mikroskopischen Beurteiler, b) für den makroskopischen Beurteiler.

Der Wert η_1 ist positiv und kleiner als 1. Der Ausdruck η_1^p stellt daher eine abklingende Gleichspannung oder einen stufenweise abklingenden Gleichstrom dar (Abb. 13a und b). η_2 ist negativ. Der Ausdruck η_2^p stellt somit eine Wechselspannung oder einen abklingenden Wechselstrom rechteckiger Kurvenform dar. Da η_2, absolut genommen, kleiner als η_1 ist, so verschwindet der Ausdruck η_2^p rascher als der Ausdruck η_1^p.

Die Windungsspannungen E_v und E_r bestehen aus einer abklingenden Gleichspannung und einer stärker gedämpften Wechselspannung rechteckiger Kurvenform.

Auch die Ströme bilden eine Überlagerung von abklingenden Gleichwerten und von stärker abklingenden Wechselwerten. Außerdem enthalten sie den Gleichstrom $\frac{E}{R}$.

Nach genügend langer Zeit bleibt nur der Gleichstrom $\frac{E}{R}$ allein übrig. Unsere Lösung steht daher im Einklang mit dem Ohmschen Gesetz.

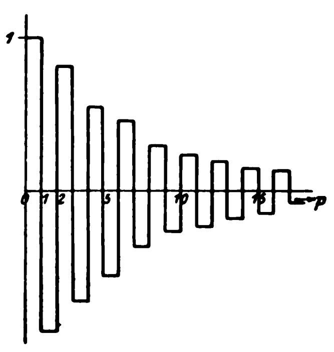


Abb. 13c. Die Funktion η_2^p.

13. Zuschnitt für kleine Werte des Widerstandes. Wenn wir etwas Genaueres über die Größe der abklingenden Gleich- und Wechselkomponenten aussagen wollen, müssen wir die Konstanten A und B bestimmen. Wir tun dies nur für den Fall, daß der Widerstand R klein gegen die Charakteristik $\mathfrak{z}$ ist. Dann vereinfachen sich unsere Werte. Man findet unter Vernachlässigung von $\frac{R^2}{\mathfrak{z}^2}$ gegen 1:

$$\eta_1 = 1 - \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right), \tag{46a}$$

$$\eta_2 = -\left[1 - \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right]. \tag{46b}$$

Offenbar müssen die Konstanten A und B so abgepaßt werden, daß

$$\mu_0 = \frac{E}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}, \tag{47}$$

$$\mu_1 = \frac{E}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}\left[1 + \frac{M}{L}\frac{R}{\mathfrak{z}}\right] \tag{48}$$

wird.

Man erhält diese Werte aus der Differenzengleichung 39), wenn man einmal $p = -2$, das andere Mal $p = -1$ setzt. Das erstemal liefert die Differenzengleichung dann eine Beziehung zwischen μ_{-2}; μ_{-1} und μ_0; das zweitemal eine Beziehung zwischen μ_{-1}; μ_0 und μ_1. Man hat nun die Spannung μ_{-2}; μ_{-1} gleich Null zu setzen, da sie physikalisch keine Bedeutung haben. Wem diese formale Schlußweise nicht gefällt, überzeuge sich von der Richtigkeit der angeschriebenen Werte durch schrittweise Verfolgung das Einschaltvorganges, wie dies im Falle $R = 0$ in den Abschnitten 7 und 8 geschehen ist.

Somit muß gefordert werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}} &= A + B + \frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}, \\ \frac{E}{1 + \frac{R}{2\mathfrak{z}}}\left[1 + \frac{M}{L}\frac{R}{\mathfrak{z}}\right] &= A\,\eta_1 + B\,\eta_2 + \frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

oder, da uns bereits eine angenäherte Berechnung genügt:

$$-\frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)} = A + B,$$

$$-\frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)} = A\,\eta_1 + B\,\eta_2.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{E}{\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1-\frac{M}{L}\right)}, \\ B &= \frac{E}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad 51)$$

Man überzeuge sich, daß bei Vernachlässigung von $\frac{R}{\mathfrak{z}}$ gegen 1 folgende Ausdrücke angenähert gelten:

$$\eta_1 + 1 = 2, \qquad \eta_1^2 = 1,$$

$$\eta_1 - 1 = -\frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1-\frac{M}{L}\right), \qquad \eta_2^2 = 1,$$

$$\eta_2 + 1 = \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right), \qquad 1+\eta_1^2 - 2\frac{M}{L}\eta_1 = 2\left(1-\frac{M}{L}\right),$$

$$\eta_2 - 1 = -2, \qquad 1+\eta_2^2 - 2\frac{M}{L}\eta_2 = 2\left(1+\frac{M}{L}\right),$$

$$(\eta_1+1)(\eta_1-1) = -\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1-\frac{M}{L}\right), \qquad -\frac{M}{L}(1+\eta_1^2)+2\eta_1 = 2\left(1-\frac{M}{L}\right),$$

$$(\eta_2+1)(\eta_2-1) = -\frac{R}{\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right), \qquad -\frac{M}{L}(1+\eta_1^2)+2\eta_1 = -2\left(1+\frac{M}{L}\right).$$

Nun schreibt man mit leichter Mühe an:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_v &= \frac{E}{2}\left[\eta_1^p + \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right)\eta_2^p\right], && a) \\ \mathfrak{E}_r &= \frac{E}{2}\left[\eta_1^p - \eta_2^p\right], && b) \\ \mathfrak{I}_{v_1} &= \frac{E}{R}\left[1-\eta_1^p\right] + \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right)\eta_2^p, && c) \\ \mathfrak{I}_{v_2} &= \frac{E}{R}\left[1-\eta_1^p\right] - \frac{E}{2\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right)\eta_2^p, && d) \\ \mathfrak{I}_{r_1} = I_{r_2} &= \frac{E}{R}\left[1-\eta_1^p\right] + \frac{E}{16\mathfrak{z}}\cdot\frac{R}{\mathfrak{z}}\cdot\left(1+\frac{M}{L}\right)\left(1-\frac{M}{L}\right)\eta_2^p. && e) \end{aligned}\right\} \qquad 53)$$

Die Wechselspannung [der mit η_2^p behaftete Ausdruck in 53a und b)] ist für die Spulenvorderseite klein, für die Spulenrückseite anfänglich von gleicher Größe wie die Spannung $\frac{E}{2}$. An der Spulenvorderseite erreicht die Windungsspannung den Wert $\frac{E}{2}$. An der Spulenrückseite erreicht sie wie früher den Wert E. Sie sinkt von dieser Höhe langsam herunter (Abb. 14a und b).

Die Wechselkomponente des Stromes prägt sich am stärksten an der Spulenvorderseite aus. Aber auch hier ist sie nur klein gegenüber dem Ohmschen Strome $\frac{E}{R}$ und anfangs von der Größe $\frac{E}{2\mathfrak{z}}$ (Abb. 14c und d).

Den besten Überblick verschafft die Abb. 15, der wieder das Beispiel S. 272 und der Wert $\frac{R}{\mathfrak{z}} = \frac{1}{20}$ zugrunde gelegt ist.

Die Wechselkomponenten der Spannung und des Stromes blieben beim Widerstande $R = 0$ (Abschnitt 11 und 12) ungedämpft. In Wirklichkeit klingen sie ab. Der Strom

stieg beim Widerstande Null fortgesetzt an. In Wirklichkeit strebt er mit der Zeit dem Ohmschen Werte $\frac{E}{R}$ zu.

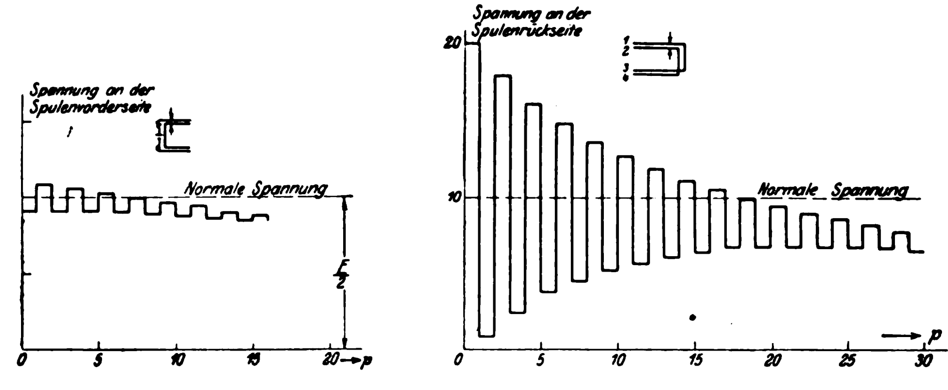


Abb. 14a. Abb. 14b.
Windungsspannungen an der Spulenvorderseite und Spulenrückseite.

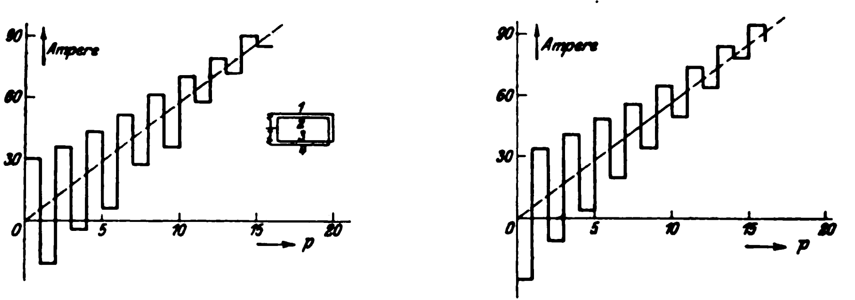


Abb. 14c. Abb. 14d.
Ströme im Leiter 1 und im Leiter 2 für die Spulenvorderseite.

14. **Vergleich mit dem Einschalten einer konzentrierten Induktivität.** Die Gleichströmung der Spule wächst nach dem Ausdrucke [vgl. Gl. 53c) bis e)]:

$$\frac{E}{R}(1 - \eta_1{}^p) \tag{54}$$

an. Es liegt der Gedanke nahe, ihn zu vergleichen mit dem Ausdrucke:

$$\frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \tag{55}$$

nach dem bekanntlich bei konzentriertem Widerstand R und konzentrierter Induktivität L und vernachlässigter Kapazität der Strom ansteigt. Durch t wird die nach dem Einschalten verstrichene Zeit gemessen. Läßt sich etwa der Ausdruck 54) in den Ausdruck 55) umwandeln?

Das trifft zu. Zunächst schreiben wir:

$$\eta_1{}^p = e^{p \cdot \ln \eta},$$

und da (Gl. 46a) η_1 eine sehr nahe bei 1 gelegene Zahl ist,

$$\eta_1{}^p = e^{-p \cdot \frac{R}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}.$$

Zur Zurücklegung eines einzelnen Laufes (Länge = 2 l; l = Länge einer Spulenseite) gebraucht die Wanderwelle die Zeit $\tau = \frac{2\,l}{c}$. Wir können daher p durch $\frac{t \cdot c}{2\,l}$

ersetzen. Wir ersetzen hierdurch die sprungweise Zunahme von p durch einen kontinuierlichen Anstieg. Somit wird aus dem Ausdrucke 54) wenn z durch seinen Wert 13a ersetzt wird:

$$\frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{2L\left(1+\frac{M}{L}\right)\cdot l}t}\right].$$

Der Wert $2L\left(1+\frac{M}{L}\right)l$ stimmt nun mit der gesamten Induktivität $\mathbf{L}$ unserer Spule überein. Der Ausdruck 54) geht daher völlig in den Ausdruck 55) über.

Für den mikroskopischen Beurteiler steigt somit der Strom nach einer bogenförmigen Treppe, für den makroskopischen Beurteiler nach der glatten Kurve des zugehörigen Treppenbogens an.

Darüber lagert sich, wenn wir die Kapazitätswirkung berücksichtigen, gedämpfter Wechselstrom, der bereits längst abgeklungen ist, wenn der Gleichstrom seinen stationären Wert erreicht hat. Die einzelnen Komponenten sind der Abb. 15 zu entnehmen.

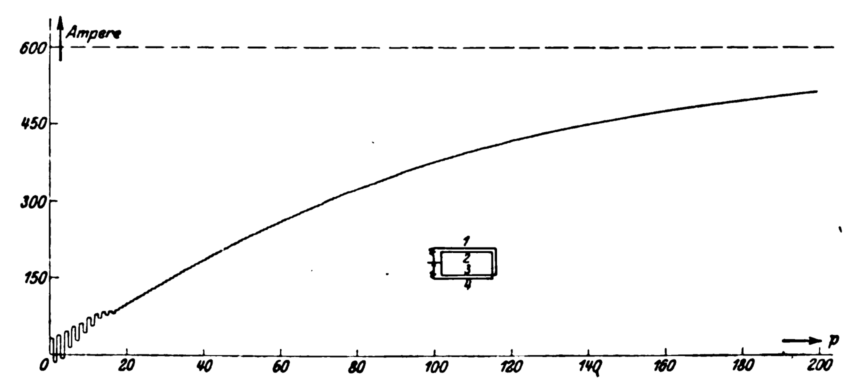


Abb. 15. Der Anstieg des Stromes im Leiter 1. Anfänglich Schwingungen, die durch die Kapazität der Spule hervorgerufen werden. Anstieg für den mikroskopischen Beurteiler nach einer Treppenkurve, für den makroskopischen Beurteiler nach einer e-Funktion.

Auf ähnlichem Wege leitet man ab, daß die Wechselspannung und somit auch die Überspannung nach dem Ausdrucke $e^{-\frac{R}{S}t}$ abklingt, wo

$$S = 2lL\cdot\left(1 - \frac{M}{L}\right)$$

gesetzt ist und die Streuinduktivität der Doppelleitung 1, 4 gegen die Doppelleitung 2, 3 bedeutet (vgl. S. 270). Die Streuinduktivität wächst, die Dämpfung der Wechselstromspannung nimmt ab, wenn wir die Windungen auseinanderziehen. Eine Vergrößerung des Windungsabstandes erhöhte die Überspannungen nicht (vgl. S. 280), wohl aber erhöht sie die Zeitdauer ihrer Wirkung.

Ergänzungen.

15. Die große Spule. Wie ändern sich Spannungen und Ströme, wenn wir die Induktivität L der aus den Leitern 1 und 4 oder 2 und 3 gebildeten Doppelleitung sehr (unendlich) groß werden lassen? Physikalisch entspricht dies einer sehr (unendlich) breiten Spule oder einer Spule endlicher Breite, die wir um einen idealen Ring gewickelt haben, dessen Permeabilität und Dielektrizitätskonstante sehr groß sind. Die Forderungen 25) für den Wellendurchgang an der Spulenrückseite bleiben hierdurch ungeändert. Das gleiche gilt von den Forderungen für die Spulenvorderseite (vgl. Gl. 22).

Die Spannungsverteilung der unendlich großen Spule erweist sich somit genau gleich derjenigen der mäßig großen Spule.

Nicht ganz dasselbe gilt für die Ströme. In den Ausdrücken 35), 36) und 37) sind für eine sehr große Spule die mit dem Faktor $1 - \frac{M}{L}$ behafteten Glieder zu streichen. Physikalisch heißt dies, die Gleichstromkomponenten des Spulenstromes verschwinden. Es bleibt vom Strome lediglich die Wechselstromkomponente übrig.

$$\mathfrak{l}_{v_1} = - \mathfrak{l}_{v_2} = \frac{E}{2\mathfrak{z}} \cdot (-1)^p,$$

$$\mathfrak{l}_{r_1} = \mathfrak{l}_{r_2} = 0.$$

Die Ströme in den Leitersträngen 1 und 2 (Abb. 1 und 12) werden genau gleich stark, aber entgegengesetzt gerichtet. Die Gesamtdurchflutung einer Spulenseite verschwindet somit.

Auch bei konzentrierter sehr (unendlich) großer Induktivität kann nach der Theorie der kapazitätslosen Spule (Ausdruck 55) kein Gleichstrom eindringen. Unsere Betrachtung der mit Kapazität behafteten Spule erweitert diese Aussage. Sie ergibt, daß in die Anfangswindung zwar Strom einfließt, daß dieser aber in der Nachbarwindung so viel Gegenstrom induziert, daß der eingedrungene Strom wieder ganz hinausgestoßen wird (vgl. oben und Abb. 14).

Bei der mäßig großen Spule kommt es uns nicht auf die Ausdrücke an, die den Anstieg des Gleichstroms beschreiben. Sie bildeten ein, wenn auch nicht unwillkommenes Nebenprodukt. Unser Ziel ist die Überspannung. Beschränken wir uns einzig und allein auf dieses, so können wir den Einschaltvorgang der unendlich großen Spule auch für die mäßig große Spule gelten lassen. Tun wir dies, so können wir uns auch bei der mäßig großen Spule folgende zwei Vereinfachungen zunutze machen:

1. Die Gesamtdurchflutung einer Spulenseite ist gleich Null. (Die Amperewindungen einer Spulenseite verschwinden.)
2. Der Wert für die Charakteristik

$$\mathfrak{z} = \frac{c}{2} L\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right) = \frac{c}{2} L\left(1 - \frac{M}{L}\right)\left(1 + \frac{M}{L}\right) = c(L - M) = cS$$

geht genau in den Wert der Streuinduktivität über.

Von diesen Vereinfachungen werden wir in späteren Arbeiten Gebrauch machen.

16. Die Querverbindungen sollen nicht mehr echte Kurzschlüsse sein. Grad der Annäherung der Rechnung. Wir greifen wieder auf den Fall einer einzelnen Doppelleitung zurück (Abb. 2a). Die Ergebnisse der Theorie gelten hier streng für den Fall, daß die Doppelleitung gerade ausgespannt ist (Abb. 2c). Liegen die Drähte einer Doppelleitung so nahe wie die Windungen einer Spule, dann wird niemand Bedenken tragen, auf sie die Ergebnisse der Theorie auch dann noch gelten zu lassen, wenn wir die Doppelleitung in mäßig gekrümmtem Bogen führen (Abb. 16). Bei der unendlich großen Spule bilden unsere Leiter 1 und 2 mit den Querverbindungen FG und HK; AE und BC als Fortsetzung eine solche schmale Doppelleitung. Man erkennt daher auch ohne Rechnung, daß sich auf den Querverbindungen FG und HK; AD und BC der mäßig großen Spule die Vorgänge beim Einschalten genau so abspielen werden wie auf den Längsseiten der Spule. Unsere Voraussetzung, daß diese Verbindungen widerstandslos, kapazitätslos und induktivitätslos sein sollten, können wir daher jetzt fallen lassen. Wir brauchen, um unsere Ergebnisse zu

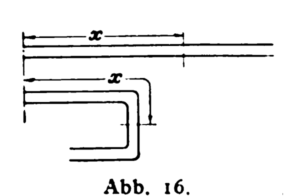


Abb. 16.

korrigieren, nur die Länge l der Spulenseite durch den halben Spulenumfang zu ersetzen.

Die Gl. 8), auf die wir unsere Arbeit aufgebaut haben, stellen einen Zuschnitt der Maxwellschen Gleichungen für Drahtwellen dar. Wir können mit Recht behaupten, daß jede andere Behandlung der Spule aus zwei Windungen nach den Maxwellschen Gleichungen unter Abstreifung von Nebensächlichem auf unsere Ergebnisse zurückkommen muß.

17. Erdkapazität. In neueren Arbeiten über denselben Vorgang ist stark die Abhängigkeit der Überspannung von der Erdkapazität betont. Den Einfluß der Erde können wir für unseren Fall abschätzen, wenn wir uns in einer gewissen Entfernung von der Spule eine große, unendlich gut leitende Platte angebracht denken.

Da nun das magnetische und elektrische Feld hauptsächlich in dem Raume zwischen den Windungen stecken, so können sie erst dann beeinflußt werden, wenn die Erde (die Platte) der Spule bis auf Entfernungen nahe kommt, die mit dem Windungsabstand von gleicher Größenordnung sind. Im allgemeinen beeinflußt somit die Erdkapazität den Einschaltvorgang der Spule aus zwei Windungen nicht.

III. Die Spule aus zwei Windungen im Anschluß an eine Freileitung und an ein Kabel.

18. Fragestellung. Schrittweise Lösung. Eine sehr lange Freileitung werde über die in Abb. 1 gezeichnete Spule aus zwei Windungen geschlossen (Abb. 17). Von links möge eine rechteckige Wanderwelle ankommen. Sie sei zunächst doppelt so lang wie eine Spulenseite. Ihre Spannungshöhe sei E. Welche Spannungsbeanspruchung erfährt die Spule?

Abb. 17. Spule im Anschluß an eine Freileitung.

Unsere Untersuchung lehnt sich eng an Kapitel I an, dessen Voraussetzungen auch hier gelten sollen.

Angelangt an den Klemmen der Spule, wird sich die Wanderwelle in zwei Teile spalten. Eine Spannungswelle μ_0, wie früher zwischen den Leitern 1 und 4 gemessen, wird in die Spule hineinwandern. Eine andere Spannungswelle von der Höhe V_0 wird in das Kabel zurückkehren. Offenbar müssen wir fordern, daß die Spannung E der Urwelle und die Spannung V_0 der reflektierten Welle sich gegenseitig zur Spannung μ_0 ergänzen:

$$E + V_0 = \mu_0.$$

Welcher Strom fließt in den Leiter 1 ein? Allgemein wird dieser wieder durch den Ausdruck 7) dargestellt. Nun sollte der Bügel BC ein echter Kurzschluß sein. Die Spannung ν_0 der in die innere Doppelleitung der Spule einziehenden Welle ist wie im Abschnitt 6 Null. Es fließt daher nach 7a) in den Leiter der Strom ein:

$$\varrho_0 = \frac{\mu_0}{2\mathfrak{z}}. \tag{60}$$

Dieser muß nun offenbar die Fortsetzung des in der Freileitung fließenden Stromes $\frac{E - V_0}{Z}$ (Gl. 2) sein. Infolgedessen gilt auch die zweite Beziehung:

$$\frac{E - V_0}{Z} = \frac{\mu_0}{2\mathfrak{z}}. \tag{61}$$

Es folgt nun:

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= E \cdot \frac{4\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}+Z}, && a) \\ V_0 &= -E\frac{Z-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}+Z}, && b) \\ \varrho_0 &= \frac{2E}{2\mathfrak{z}+Z}. && c) \end{aligned}\right\} \quad 62)$$

Für den Strom im Leiter 2 ergibt sich nach 7c):

$$\sigma_0 = -\frac{M}{L}\varrho_0 = -\frac{M}{L}\frac{2E}{2\mathfrak{z}+Z}. \qquad 62\,d)$$

Die Ausdrücke 62) stimmen genau mit denjenigen überein, die die gewöhnliche Kabeltheorie für denjenigen Fall aufgestellt hat, daß eine Doppelleitung mit der Charakteristik $2\mathfrak{z}$ auf eine Doppelleitung mit der Charakteristik Z folgt.

Die Charakteristik Z einer Freileitung kann im allgemeinen groß gegen die Windungscharakteristik vorausgesetzt werden. Infolgedessen ist μ_0 klein gegen E. Trifft daher aus der Freileitung eine Wanderwelle auf die Spule auf, so entsteht bei der Spule im allerersten Anfang keine Spannungserhöhung, sondern eine Spannungsverminderung. Also auch hier wirkt die Spule anfangs durchaus nicht wie eine Doppelleitung von hoher Charakteristik (veraltete Annahme, vgl. Abschnitt 10), sondern wie ein Kabel (vgl. Abschnitt 6).

Die Wanderwelle μ_0 erreiche die Spulenrückseite. Es setzen dann wieder rückläufige Wellen m_0 und n_0 ein, die sich zu μ_0 und ν_0 nach den Beziehungen 19) anordnen:

$$m_0 = -\nu_0; \qquad n_0 = -\mu_0.$$

Wenn die Wanderwelle in der Spule ihren ersten Lauf beendet hat, kommt der Kopf der Wellen m_0 und n_0 gerade an der Spulenvorderseite an. In demselben Augenblicke verläßt auf der Freileitung der Schweif der reflektierten Welle V_0 gerade die Spulenklemmen. Von der Welle m_0 zieht ein Teil V_1 in die Freileitung ein. Ein anderer Teil μ_1 wandert in die Spule wieder zurück. Desgleichen wird auch eine neue Welle ν_1 in der aus den Leitern 2 und 3 gebildeten Doppelleitung nach rechts davoneilen. Offenbar besteht infolge des echten Kurzschlusses BC wieder die Beziehung:

$$\nu_1 = -n_0$$

(vgl. S. 276). Wir werden für die Wellen V_1 und μ_1 verlangen müssen, daß sich durch sie an den Spulenklemmen gleiche Werte für den Strom und die Spannung ergeben, gleichgültig, ob wir sie für die Freileitung oder die Spule anschreiben. Wir kommen so zu den Forderungen (vgl. Abschnitt 6):

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 + m_0 &= V_0, \\ -\frac{V_1}{Z} = \varrho_1 + r_0 &= \frac{1}{2\mathfrak{z}}\left[\mu_1 + 2\frac{M}{L}n_0 - m_0\right]. \end{aligned}\right\} \quad 63)$$

Sie werden durch folgende Werte erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= m_0 \cdot \frac{Z-2\mathfrak{z}}{Z+2\mathfrak{z}} - n_0 \cdot 2\frac{M}{L} \cdot \frac{Z}{Z+2\mathfrak{z}}, \\ V_1 &= \frac{2Z}{Z+2\mathfrak{z}}\left[m_0 - n_0\frac{M}{L}\right]. \end{aligned}\right\} \quad 64)$$

Die Gleichungen 19), 62), 63) und 64) enthalten die Grundlage zu einer schrittweisen Lösung unserer Frage. Wir kommen aber rascher durch eine Differenzengleichung ans Ziel.

19. Allgemeine Lösung. Wir bezeichnen wieder mit μ_p und ν_p die rechtsläufigen Wellen der Spule nach vollendetem p-ten Laufe der Wanderwelle (vgl. Abschnitt 7). Außerdem wollen wir mit V_p diejenige Wanderwelle bezeichnen, die nach vollendetem p-ten Laufe in der Freileitung nach links davoneilt. Verfolgen wir jetzt das Schicksal der Welle μ_p genau so, wie wir vorhin das Schicksal der Welle μ_0 verfolgt haben, so erhalten wir ähnliche Beziehungen wie vorhin. Ein Unterschied besteht nur darin, daß an Stelle von μ_0, $\nu_0 \ldots$ die Werte μ_p, $\nu_p \ldots$ auftreten. Somit schreiben wir an:

$$m_p = -\nu_p; \qquad n_p = -\mu_p;$$

und weiter:

$$\nu_{p+1} = -n_p = \mu_p,$$

$$\mu_{p+1} = m_p \alpha - n_p \beta,$$

$$\alpha = \frac{Z - 2\mathfrak{z}}{Z + 2\mathfrak{z}},$$

$$\beta = 2\frac{M}{L}\frac{Z}{Z + 2\mathfrak{z}},$$

$$V_{p+1} = \frac{2Z}{Z + 2\mathfrak{z}}\left[m_p - n_p\frac{M}{L}\right].$$

Ihre Verknüpfung liefert die Differenzengleichung:

$$\mu_{p+1} = -\alpha\mu_{p-1} + \beta\mu_p$$

oder

$$\mu_{p+2} - \beta\mu_{p+1} + \alpha\mu_p = 0. \tag{68}$$

Nach der Theorie der Differenzengleichungen ist es nützlich, zur Lösung der Differenzengleichung 68) die folgende „charakteristische“ quadratische Gleichung aufzustellen:

$$\xi^2 - \beta\xi + \alpha = 0. \tag{69}$$

Ihre Koeffizienten stimmen mit denen der Differenzengleichung überein. Für ξ ergeben sich die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}, \\ \xi_2 &= \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Hauptfall. Die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 sind komplex. Man schreibt dann zweckmäßig:

$$\xi_1 = \sqrt{\alpha}\,[\cos\gamma + i\sin\gamma],$$

$$\xi_2 = \sqrt{\alpha}\,[\cos\gamma - i\sin\gamma].$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\varepsilon}{\beta}; \qquad \varepsilon = \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4}}.$$

Und nun ergibt sich nach der Theorie für unsere Differenzengleichung die Lösung:

$$\mu_p = \sqrt{\alpha}^{\,p}\,[F\cos p\gamma + G\sin p\gamma], \tag{74}$$

wo F und G noch zu bestimmende Konstanten sind.

Soll der eben angeschriebene Ausdruck für $p = 0$ den, für den Augenblick als bekannt angesehenen, Wert μ_0 und für $p = 1$ den Wert $\mu_1 = \beta\mu_0$ ergeben, dann hat man

$$F = \mu_0,$$

$$G = \mu_0 \operatorname{ctg}\gamma$$

zu setzen. Man erhält daher

$$\mu_p = \mu_0 \frac{\sqrt{\alpha}^{-p+1}}{\varepsilon} \sin \gamma (p+1),$$

$$\nu_p = \mu_0 \frac{\sqrt{\alpha}^{-p}}{\varepsilon} \sin \gamma p,$$

$$m_p = -\mu_0 \frac{\sqrt{\alpha}^{-p}}{\varepsilon} \sin \gamma p,$$

$$n_p = -\mu_0 \frac{\sqrt{\alpha}^{-p+1}}{\varepsilon} \sin \gamma (p+1),$$

$$\mu_0 = E \frac{4\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}+Z}.$$

Der Wert von α ist immer kleiner als 1. Der Ausdruck $\sqrt{\alpha}^{-p}$ stellt daher eine mit wachsender Zahl p abfallende Treppenkurve dar. Der Ausdruck $\sin \gamma (p+1)$ ergibt eine auf sinusförmigen Bogen geführte Treppe. Das Bild der Spannung μ_p erhalten wir daher, wenn wir die glatte Kurve einer gedämpften Welle durch einen ihr folgenden Treppenweg ersetzen.

Es macht keine Schwierigkeiten, für einen bestimmten Fall μ_p tabellarisch in Abhängigkeit von p zu berechnen (vgl. die Tabelle S. 293). Mit einer solchen Tabelle haben wir die Grundlage geschaffen, sowohl die Klemmenspannung als auch die Windungsspannung der Spule zu bestimmen. Wir brauchen dazu nur, wie wir gleich genauer sehen werden, die Zahlen der Tabelle für benachbarte Werte von p miteinander in Beziehung zu setzen. Und zwar hat dies nach den folgenden Vorschriften zu geschehen (vgl. S. 278 u. 279).

$$E_k = \mu_p - \mu_{p-2},$$

$$E_v = \frac{\mu_p' - \mu_{p-2}}{2},$$

$$E_r = \mu_p - \mu_{p-1}.$$

Diese Vorschriften erfordern für die Sonderfälle $p=0$ und $p=1$ die Werte μ_{-2} und μ_{-1}. Diese sind gleich Null zu setzen.

Zahlenbeispiel. Wir schließen die aus dem Beispiel S. 272 bekannte Spule an eine Freileitung von der Breite $B = 50$ cm und der Drahtstärke $d = 1$ mm an. Auf der Freileitung breite sich nach rechts eine Spannungswelle von der Länge $l = 400$ cm, von der Spannungshöhe $E = 10000$ Volt aus. Halber Umfang der Spule 200 cm. Welche Klemmen- und Windungsspannung ist zu erwarten?

Wir berechnen die folgenden Zahlenwerte:

Induktivität der Freileitung:

$B = 50$ cm; $d = 0{,}1$ mm

nach Fig. 3a $13{,}9 \cdot 10^{-4}$ Henry pro km;

Charakteristik der Doppelleitung: 414 Ohm/km;
Windungscharakteristik: 39,4 Ohm/km.

$$L = 13{,}8 \cdot 10^{-4}; \qquad 2 \ln 2 k = 1{,}38.$$

$$|k = 1|$$

$$1 - \frac{M}{L} = 0{,}1; \quad \frac{M}{L} = 0{,}9; \quad 1 + \frac{M}{L} = 1{,}9; \quad 1 - \frac{M^2}{L^2} = 0{,}19.$$

$$\alpha = \frac{0{,}81}{1{,}19} = 0{,}680; \quad \sqrt{\alpha} = 0{,}825; \quad \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{0{,}190} = 0{,}436; \quad \gamma = 23^0\,30'.$$

Tabelle.

p	$\sqrt{\alpha}^{-p} = 0{,}825^p$	γp	γp	$\sin \gamma p$	$\sqrt{\alpha}^{-p} \cdot \sin \gamma p$	$\frac{\mu_p}{\mu_0}$	$\frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{\mu_0} = \frac{E_k}{\mu_0}$	$\frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2\,\mu_0} = \frac{E_v}{\mu_0}$	$\frac{\mu_p - \mu_{p-1}}{\mu_0} = \frac{E_r}{\mu_0}$
0	1,000	0		0	0	1	1,000	0,500	1,000
1	0,825	23° 30′		0,399	0,329	1,510	1,510	0,755	0,510
2	0,680	47°		0,731	0,497	1,605	0,605	0,302	0,095
3	0,561	70° 30′		0,942	0,529	1,395	− 0,115	− 0,0575	− 0,210
4	0,462	94°	90° + 4°	0,997	0,460	1,026	− 0,580	− 0,290	− 0,369
5	0,381	117° 30′	90° + 27° 30′	0,887	0,338	0,600	− 0,795	− 0,397	− 0,426
6	0,314	141°	90° + 51°	0,629	0,197	0,210	− 0,816	− 0,408	− 0,390
7	0,259	164° 30′	90° + 74° 30′	0,267	0,0692	− 0,0905	− 0,690	− 0,345	− 0,305
8	0,214	188°	180° + 8°	− 0,139	− 0,0298	− 0,279	− 0,489	− 0,244	− 0,189
9	0,176	211° 30′	180° + 31° 30′	− 0,522	− 0,0920	− 0,362	− 0,272	− 0,136	− 0,083
10	0,145	235°	180° + 55°	− 0,819	− 0,1190	− 0,355	− 0,076	− 0,038	+ 0,007
11	0,119	258° 30′	180° + 78° 30′	− 0,980	− 0,1170	− 0,294	+ 0,068	+ 0,034	0,061
12	0,0987	282°	270° + 12°	− 0,978	− 0,0966	− 0,202	0,103	0,052	0,092
13	0,0815	305° 30′	270° + 35° 30′	− 0,814	− 0,0665	− 0,105	0,190	0,095	0,097
14	0,0672	329°	270° + 59°	− 0,515	− 0,0346	− 0,0219	0,180	0,090	0,087
15	0,0555	352° 30′	270° + 82° 30′	− 0,130	− 0,00722	+ 0,0382	0,143	0,072	0,060
16	0,0457	376°	360° + 16°	+ 0,275	0,0126	0,0729	0,0948	0,0472	0,0347
17	0,0377	399° 30′	360° + 90° 30′	0,636	0,0240	0,0841	0,0459	0,023	0,011

$$E = \mu_0 \cdot \frac{1{,}190}{2 \cdot 0{,}190} = 3{,}14\,\mu_0.$$

$$\mu_0 = \frac{E}{3{,}14} = \frac{10000}{3{,}14} = 3160 \text{ Volt}.$$

$$\text{„Normale" Windungsspannung} = \frac{E}{2} = \mu_0 \cdot 1{,}57.$$

Mit den Werten der Tabelle ist die Abb. 18a gezeichnet worden. Deutlich fällt ins Auge, daß wir es mit gedämpften Treppenwellen zu tun haben. Der höchste Wert der Windungsspannung bleibt an der Spulenvorderseite weit unter 5000 Volt. Das gleiche ist auch bei der Windungsspannung an der Spulenrückseite der Fall.

Man sieht, wie stark die Spule im Vergleich zur Freileitung als Kabel wirkt.

In der Freileitung zieht nach genügend langer Zeit die in Abb. 18c gezeichnete Welle davon. Ihr Bild ähnelt dem der Windungsspannung an der Spulenvorderseite. Es unterscheidet sich von ihm nur in zweifacher Hinsicht:

1. Seine Erhebungen sind doppelt so groß.
2. Ihr wandert die Welle V_0 voran.

Zu beachten bleibt, daß die Abb. 18a ein zeitlich, die Abb. 18c ein räumlich auseinandergezogenes Bild gibt.

Weitere Beispiele. Auf genau dem gleichen Wege habe ich noch zwei weitere Fälle durchgerechnet und in den Abb. 19 und 20 aufgetragen.

In Abb. 19 habe ich dieselbe Spule wie in Abb. 18 vorausgesetzt. Der Freileitung dagegen habe ich den Abstand von 2 cm gegeben. Wir nähern uns hier dem Fall, daß die Spule an ein Kabel angeschlossen wird. In Abb. 20 habe ich dieselbe Freileitung wie in Abb. 18 beibehalten, dafür aber die Windungen der Spule bis auf 1 cm auseinandergezogen. In beiden Fällen ergibt sich gegen früher eine Erhöhung der Windungsspannung. Sie macht sich an der Spulenrückseite stärker als an der Vorderseite bemerkbar. Also auch beim Anschluß an eine Freileitung liegt die gefährdete Stelle an der Spulenrückseite (Spulenmitte). Die Windungsspannung erreicht in diesen Beispielen immer noch nicht die Wanderwellenspannung.

Bei der Anschaltung eines Elementes (unendlich kurze Freileitung) hatten wir eine von dem Windungsabstande unabhängige Überspannung gefunden. Bei Wanderwellen, die aus einer langen Freileitung kommen, wird die Windungsspannung mit wachsendem

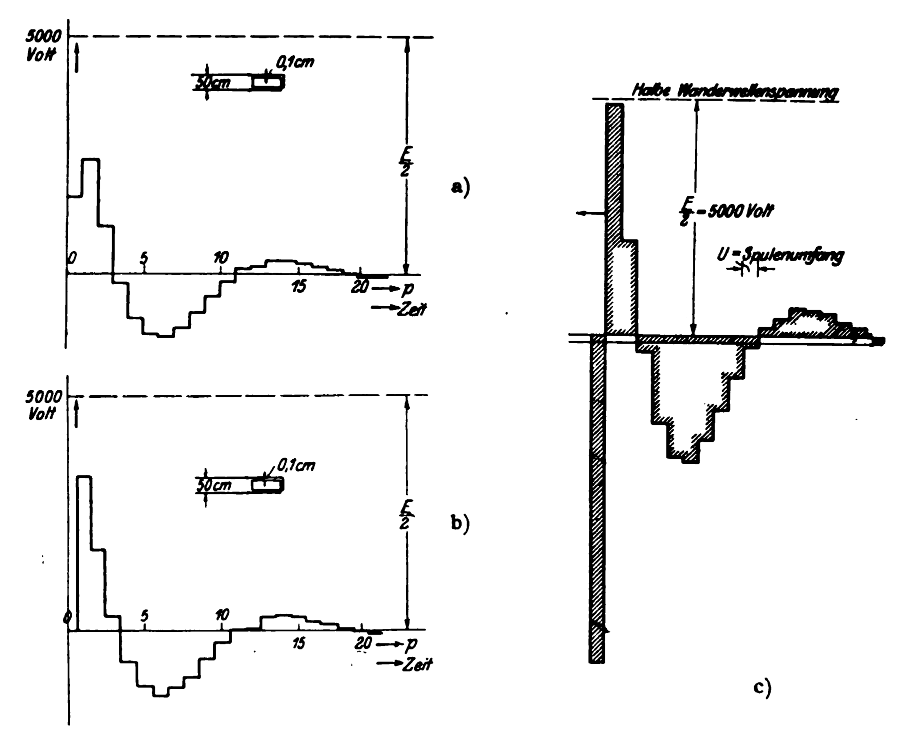


Abb. 18. Länge der ankommenden Wanderwelle gleich Spulenumfang. Windungsabstand gleich 1 mm. Breite der Freileitung 50 cm. a) Windungsspannung an Spulenvorderseite. b) Windungsspannung an der Spulenrückseite. c) In die Freileitung zurückwandernde Welle.

Windungsabstande größer. Ein Vergleich der Abb. 18, 19 und 20 mit der Abb. 12 lehrt, daß die Windungsspannung bei Anschluß der Spule an eine Freileitung nur sehr kurze Zeit wirkt. Auch dieser Umstand trägt dazu bei, daß die Spannungsbeanspruchung im vorliegenden Falle ganz milde ausfällt.

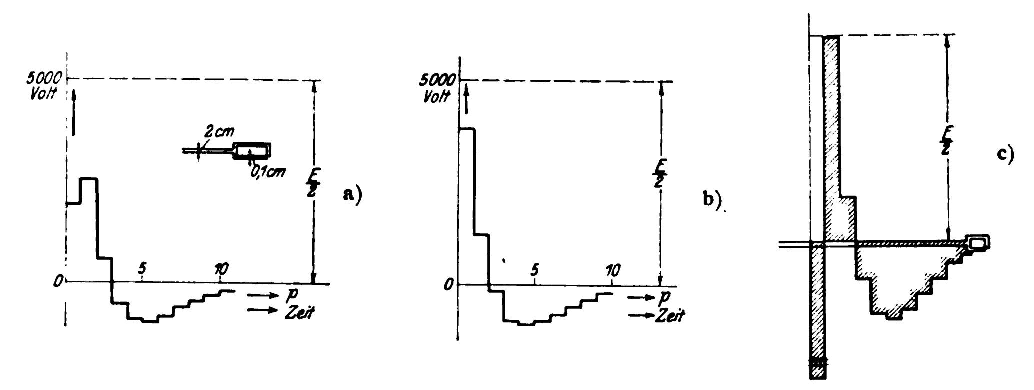


Abb. 19. Wie in Abb. 18, nur Breite der Freileitung 2 cm.

2. Hauptfall. Die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 sind reell. Wir wollen sie jetzt der besseren Unterscheidung wegen ζ_1 und ζ_2 nennen:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha},\\ \zeta_2 &= \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha},\end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung lautet nun:

$$\mu_p = A\,\zeta_1{}^p + B\,\zeta_2{}^p.$$

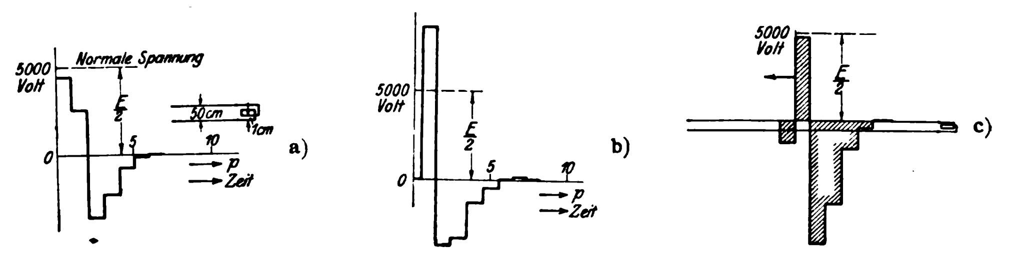


Abb. 20. Wie in Abb. 18, nur Windungsabstand 1 cm.

A, B sind noch zu bestimmende Konstante. Wenn nun wieder wie früher (S. 291) μ_0 als gegeben betrachtet und

$$\mu_1 = \beta\,\mu_0$$

gefordert wird, so muß man

$$A = \mu_0 \frac{\zeta_1}{2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}}, \qquad B = -\mu_0 \frac{\zeta_2}{2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}} \qquad 79)$$

setzen. So gelangen wir zu dem Ausdrucke:

$$\mu_p = \frac{\mu_0}{2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}}\,\zeta_1{}^{p+1}\left[1 - \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^{p+1}\right]. \qquad 80)$$

Die Wurzel ζ_2 ist kleiner als die Wurzel ζ_1; $\zeta_2{}^{p+1}$ stellt daher eine stärker abfallende Treppenkurve als $\zeta_1{}^{p+1}$ dar. Praktisch ist daher μ_p durch die abfallende Treppenkurve $\cdot\,\zeta_1{}^p$ gegeben. Während wir im Falle komplexer Wurzeln vom Standpunkte des makroskopischen Beurteilers es mit gedämpften Schwingungen zu tun haben, haben wir jetzt den Fall einer aperiodischen Schwingung der Spule vor uns.

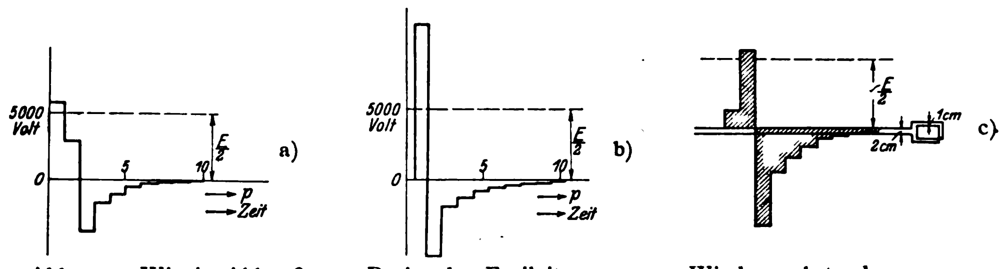


Abb. 21. Wie in Abb. 18, nur Breite der Freileitung 2 cm. Windungsabstand 1 cm.

Legt man wieder μ_p in Abhängigkeit von p tabellarisch fest, so sind durch Kombination der Werte dieser Tabelle nach den Beziehungen 76) die uns interessierenden Windungsspannnngen leicht zu ermitteln. Auf diesem Wege habe ich den Fall behandelt, daß an eine Doppelleitung vom Abstande 2 cm die bereits früher betrachtete Spule mit dem Windungsabstande von 1 cm angeschlossen wird. Die Ergebnisse habe ich in der Abb. 21 aufgetragen. Wie zu vermuten war, ergeben sich jetzt höhere Spannungen als früher.

20. Die Spule im Anschluß an ein Kabel. Es verlohnt sich noch den Fall genauer ins Auge zu fassen, daß unsere Spule an ein Kabel mit sehr niedriger Wellencharakteristik angeschlossen ist. Da es uns um die Herausarbeitung der wesentlichen Eigenschaften der hierbei auftretenden Spannungswerte handelt, so sei die Charakteristik Z des Kabels in unseren Formeln als klein gegen die Windungscharakteristik $\mathfrak{z}$ angesehen. (Es entspricht dies dem Fall eines Kabels und einer Spule mit auseinandergezogenen Windungen. Wenn wir die Spule aus zwei Windungen als Vertreter beliebiger Spulen betrachten wollen, müssen wir auch mit solchen Fällen rechnen.) Mit dieser Einschränkung ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right); \qquad \beta = \frac{M}{L}\cdot\frac{Z}{\mathfrak{z}}; \\ \zeta_1 &= 1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right); \\ \zeta_2 &= -\left[1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right]; \\ \mu_0 &= -2E\cdot\left(1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Und so geht der Wert 80) über in:

$$\mu_p = \frac{E}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\cdot\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left[\zeta_1^{p+1} - \zeta_2^{p+1}\right]. \tag{82}$$

Die Spannung μ_p setzt sich jetzt zusammen aus einer abfallenden Treppenkurve ζ_1^{p+1} und (man beachte das negative Vorzeichen von ζ_2) einer gedämpften Schwingung ζ_2^{p+1}.

Welche Werte ergeben sich nun für die Windungsspannungen an der Spulenvorder- und -rückseite?

An der Vorderseite messen wir die Spannung:

$$E_v = \frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2} = -\frac{E\cdot\frac{Z}{\mathfrak{z}}\cdot\left(1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\right)}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left[\zeta_1^{p-1}\left(1 - \frac{M}{L}\right) - \zeta_2^{p-1}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right] \tag{83}$$

gültig für $p \geqq 1$.

Für $p = 0$ ist

$$E_{v\,(p=0)} = \frac{\mu_0}{2} = E\cdot\left(1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\right).$$

Verglichen mit der ankommenden Wanderwelle bleibt die Windungsspannung an der Spulenvorderseite bis auf den allerersten Spannungsstoß ($p = 0$) klein.

Die in das Kabel zurücklaufende Welle hat für $p = 0$ den Wert (Gl. 62b) $V_0 = 2E$ und für $p \geqq 1$ den Wert $2E_v$.

Für die Windungsspannung an der Spulenrückseite erhält man den Ausdruck:

$$E_r = \mu_p - \mu_{p-1} = -\frac{E}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left\{\zeta_1^p\frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right) - \zeta_2^p\left[2 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right]\right\} \tag{85}$$

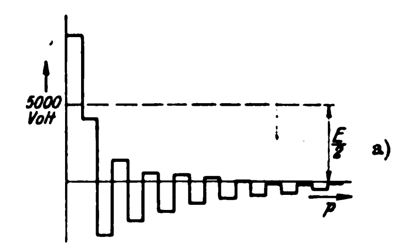
gültig für beliebigen Wert von p.

Der aperiodisch abfallende Teil ist in 85) ebenfalls wie in 83) mit dem Faktor

$\frac{Z}{\mathfrak{z}}$ behaftet und daher klein. Frei von diesem Faktor bleibt der Ausdruck für die gedämpfte Welle ζ_2^p. Deren Amplitude beträgt anfangs $(p = 0)$

$$\frac{E}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left[2 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right].$$

Sie kann somit schlimmstenfalls dem Werte 2 E sehr nahe kommen. Die Wechselspannung kann daher an der Spulenrückseite erhebliche Beträge erreichen und beträchtliche Zeit wirken, wie die Abb. 22 lehrt. Eine Spule ist daher im Anschluß an ein Kabel besonders gefährdet. Die gefundene Spannung wird uns physikalisch verständlich, wenn wir uns wieder vorstellen, daß durch die aufstoßende Wanderwelle die Spule zu Schwingungen angeregt wird und daß an der Spulenrückseite ein Spannungsbauch liegt. Für diese Schwingung wirkt das angeschlossene Kabel so, als ob die Spule an den Klemmen über einen Widerstand, dessen Wert gleich dem der Charakteristik des Kabels ist, kurz geschlossen wäre[1]). Ist daher die Kabelcharakteristik, wie in diesem Kapitel vorausgesetzt, sehr klein, so kann sich an den Klemmen der Spule keine merkliche Spannung ausbilden.



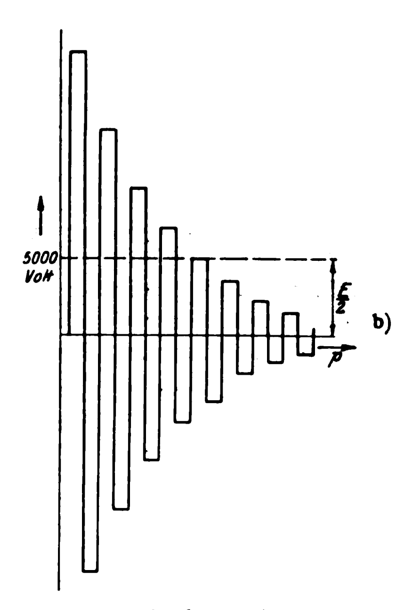


Abb. 22. Spule und Kabel. Mäßig lange Wanderwelle.
a) Windungsspannung an der Spulenvorderseite.
b) Windungsspannung an der Spulenrückseite.

21. Spannungen bei ganz kurzen und bei ganz langen Wanderwellen. a) Freileitung. Wir haben ausdrücklich bisher vorausgesetzt, daß die Länge der Wanderwelle gleich dem Spulenanfang sein sollte. Alsdann setzen sich die einsetzenden Wellen lückenlos sowohl zeitlich wie räumlich auseinander (Abb. 18 bis 22). Ist die Urwelle kürzer als der Spulenumfang, so bleiben die Spannungen in ihrer Höhe ungeändert. Wie man leicht selbst nachweist, legen sich aber zwischen die einzelnen Wellen Lücken.

Da bei kurzer Wanderwelle die Dauer der Überspannung abnimmt, so ist sicher, daß es bei der Spannungsgefährdung durch Wanderwellen auch auf deren Länge ankommt. Dies tritt noch deutlicher zutage, wenn wir uns mit dem Fall einer sehr langen Wanderwelle beschäftigen.

Auch die von ihr hervorgerufenen Windungsspannungen lassen sich auf den Fall der mäßig langen Wanderwelle zurückführen. Man überzeugt sich davon, wenn man die unendlich (sehr) lange Wanderwelle in Teilwellen von der Länge 2 l zerlegt. Für jede dieser Teilwellen gelten die in den vorigen Abschnitten aufgedeckten Gesetzmäßigkeiten. Nur erfolgen die zur zweiten Teilwelle gehörigen Werte um die Laufzeit $\frac{2l}{c}$ später als die entsprechenden Werte der ersten Teilwelle usf. Wir müssen somit, um die Wirkung der langen Wanderwelle zu überblicken, für jede Teilwelle

[1]) Man beachte, daß die Schwingungsdauer durch diesen Ersatzwiderstand infolge seines kleinen Wertes nicht beeinflußt wird. Bei den Abb. 18, 19 und 20 befinden wir uns in einem Gebiete, in dem die Schwingungsdauer vom Ersatzwiderstand infolge seiner Größe stark abhängt.

Treppenzüge zeichnen, wie wir sie aus den Abb. 18 bis 21 für die erste Teilwelle kennen. Die so erhaltenen Teilbilder müssen wir gegeneinander erst jedesmal um eine Stufe versetzen, dann überdecken und ihre Ordinaten addieren. Auf dieser Grundlage sind die

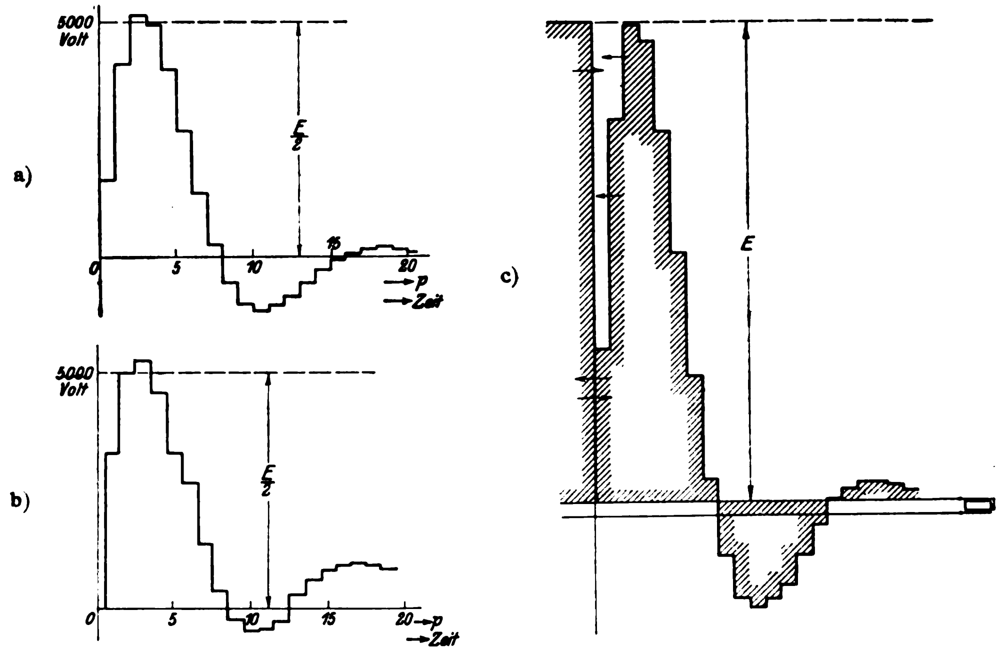


Abb. 23. Wie in Abb. 18, nur sehr lange Wanderwelle.

Abb. 24 bis 26 gezeichnet worden. Die Windungsspannungen sind bei der sehr langen Wanderwelle höher als bei der mäßig langen Wanderwelle. Sie übertreffen jetzt bereits die halbe Höhe der Spannung der Urwelle. Wir können jetzt mit Recht wieder von einer Überspannung reden. Aber auch jetzt dauert sie nur kurze Zeit an.

b) Kabel. Es sei die Zeit ins Auge gefaßt, während welcher sich die $(p+1)$-te Teilwelle gerade aus dem Kabel

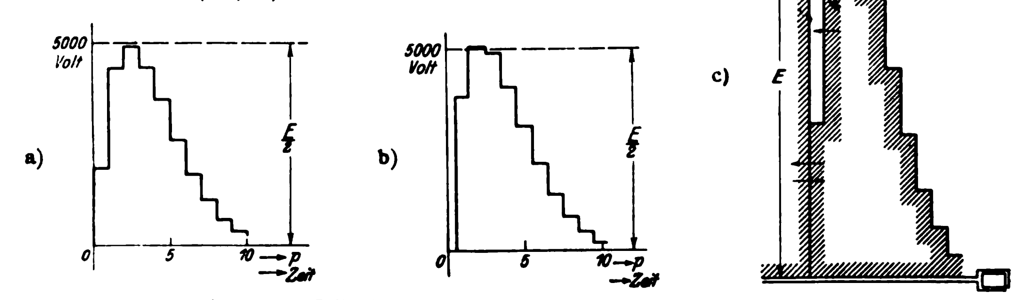


Abb. 24. Wie in Abb. 19, nur sehr lange Wanderwelle.

in die Spule hineinschiebt. Das ist die Zeitspanne, die auf den vollendeten p-ten Lauf der ersten Teilwanderwelle in der Spule folgt. Zu ihr gehört für die Spulenrückseite die Spannung:

$$E_r = -\frac{E}{1-\frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1-\frac{M}{L}\right)} \cdot \left\{\frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1-\frac{M}{L}\right)\left[\zeta^0+\zeta^1+\zeta_2+\dots+\zeta^p\right] - \left[2-\frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1+\frac{M}{L}\right)\right]\left[\zeta_2^{\,0}+\zeta_2^{\,1}+\dots+\zeta_2^{\,p}\right]\right\}.$$

Nun ist:

$$\zeta_1^0 + \zeta_1^1 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_1^p = \frac{1 - \zeta_1^{p+1}}{1 - \zeta_1} = \frac{1 - \zeta_1^{p+1}}{\frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)},$$

$$\zeta_2^0 + \xi_2^1 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_2^p = \frac{1 - \zeta_2^{p+1}}{\left[2 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 + \frac{M}{L}\right)\right]}.$$

Somit erhält man:

$$E_r = -\frac{E}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left[1 - \zeta_1^{p+1} - (1 - \zeta_2^{p+1})\right] = -\frac{E}{1 - \frac{Z}{2\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{M}{L}\right)}\left[\zeta_2^{p+1} - \zeta_1^{p+1}\right].$$

Die unendlich lange Wanderwelle versursacht jetzt keine größeren Überspannungen als die mäßig lange (Abb. 27).

Ist ein großer Teil der Wanderwelle erst in die Spule hineingedrungen (p groß), dann ist die Spule spannungsfrei. Dies Ergebnis hat man bereits früher gefunden unter der Annahme, daß man die Spule durch eine Doppelleitung oder durch eine konzentrierte Induktivität ersetzen kann.

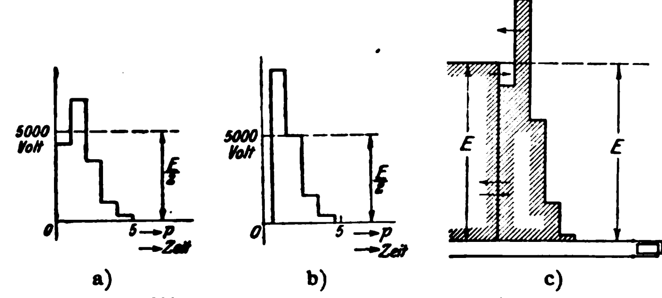


Abb. 25. Wie in Abb. 20, nur sehr lange Wanderwelle.

Schlußbetrachtung.

22. Die Überspannungen einer Spule beim Einschalten über eine ganz kurze und eine ganz lange Zuleitung. Ein Vergleich. Wir können eine sehr lange Wanderwelle verwirklichen, wenn wir eine Spule unter Vorschaltung einer sehr langen Doppelleitung einschalten. Dagegen gilt der im Kapitel I durchgerechnete Fall, wenn die Zuleitung sehr (unendlich) kurz ist. Wann darf eine Zuleitung bereits als lang, wann darf sie noch als kurz angesehen werden?

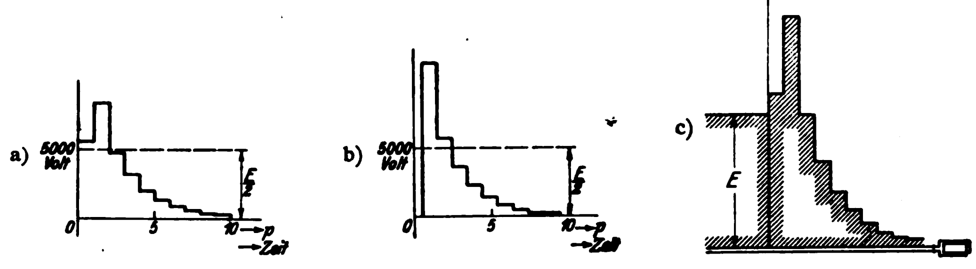


Abb. 26. Wie in Abb. 21, nur sehr lange Wanderwelle.

Eine Nachprüfung unserer Rechnungen lehrt: Ist eine Zuleitung etwa viermal so lang und länger als der aufgewundene Draht der Spule, dann kann sie praktisch als unendlich lang gelten. Ist die Zuleitung so kurz oder kürzer als etwa der achte Teil der Drahtlänge der Spule, dann darf man sie angenähert als unendlich kurz ansehen.

Die Spannungsbeanspruchung der Spule zeigt in beiden Hauptfällen manche Übereinstimmung, aber auch recht viel Verschiedenheiten. In beiden Fällen liegt die gefährdete Stelle an der Spulenrückseite (Nähe Spulenmitte). In beiden Fällen haben wir es mit einer Schwingung der Spule zu tun, bei der sich an der Spulenrückseite ein Spannungsbauch, an der Spulenvorderseite ein mehr oder weniger stark ausgeprägter Spannungsknoten bildet.

Bei kurzer Zuleitung ist die Überspannung von dem Windungsabstande der Spule unabhängig. Bei langer Zuleitung wächst sie stark mit ihm.

Bei kurzer Zuleitung wird die Spulenschwingung durch den Ohmschen Widerstand der Spule gedämpft. Bei langer Zuleitung wirkt auch die Zuleitungscharakteristik dämpfend.

Bei kurzer Zuleitung erreicht die maximale Windungsspannung höchstens den Wert E der Einschaltspannung. Bei langer Zuleitung über ein Kabel kann im ungünstigsten Falle auch der doppelte Wert 2 E erreicht werden.

Bei kurzer Zuleitung macht es nicht viel aus, ob sie ein Kabel oder eine Freileitung ist. Bei langer Zuleitung ist das Gegenteil der Fall. Eine Spule kann bei Anschluß an eine lange Freileitung ungefährdet sein. Wird die Freileitung durch ein Kabel ersetzt, so kann hierdurch sowohl der Wert als auch die Dauer ihrer Einwirkung ganz erheblich heraufgesetzt werden (Abb. 18 bis 20 und Abb. 22).

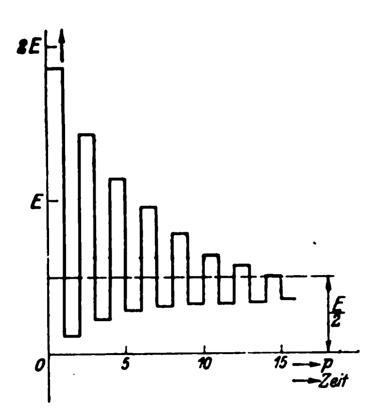
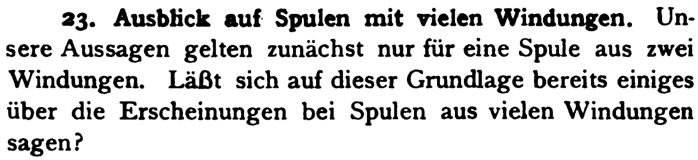


Abb. 27. Sehr lange Wanderwelle. Spule im Anschluß an ein Kabel. Windungsspannung an der Spulenrückseite.

Der Ersatz von Freileitungen durch Kabel kann daher mit verhängnisvollen Folgen verknüpft sein.

Es liegt die Frage nahe, welche Spannungsbeanspruchungen ergeben sich für das Zwischengebiet, in dem die Zuleitung weder als (unendlich) lang noch als (unendlich) kurz angesehen werden kann. Es treten hier Besonderheiten (Resonanzerscheinungen) auf, die wir in einer späteren Arbeit aufdecken werden.



23. Ausblick auf Spulen mit vielen Windungen. Unsere Aussagen gelten zunächst nur für eine Spule aus zwei Windungen. Läßt sich auf dieser Grundlage bereits einiges über die Erscheinungen bei Spulen aus vielen Windungen sagen?

Man muß hier zwei Hauptfälle unterscheiden: die flache und die lange Spule. Bei beiden wollen wir uns nur auf den Fall einer einzigen Windungsschicht beschränken.

Beim Einschalten einer flachen Spule wird der Einschaltvorgang sich ähnlich wie bei der Spule aus zwei Windungen abspielen. Im allerersten Anfang erhalten die beiden an die Spannungsquelle angeschlossenen Leiter einen kräftigen Strom. Bevor dieser in das Spuleninnere eingedrungen ist, induziert er in den Nachbarleitern entgegengesetzt gerichtete Ströme. Infolge der an der Rückseite der Spule angebrachten Verbindungen prallen getriebener und induzierter Strom aufeinander. Es staut sich Elektrizität auf und es entsteht eine Spannungserhöhung. Die gefährdete Stelle liegt nicht an den Enden selbst, wohl aber in Nähe der Spulenmitte (auf halber Drahtlänge). Natürlich wird auch hier eine Eigenschwingung der Spule angestoßen, deren Spannungsbauch in Nähe der Spulenmitte liegt. Aber die Kurvenform der Schwingung ist verwickelter als bei der Spule aus zwei Windungen. Nach diesen Betrachtungen müßte die flache Spule keineswegs vorzugsweise an den Enden durchschlagen.

Anders bei der langen Spule. Auch hier wird man im allerersten Anfang des Einschaltvorganges unterscheiden müssen zwischen unmittelbar getriebenen und den in den Nachbarwindungen induzierten Strömen. Bei der langen Spule ist aber zu erwarten, daß die induzierten Ströme eine merkliche Stärke nur in der Nähe der Spulenenden haben. Infolgedessen prallen auch hier nur getriebener und induzierter Strom aufeinander und infolgedessen ist im wesentlichen hier eine Überspannung zu erwarten. Die gefährdete Stelle liegt bei der langen Spule somit vorzugsweise in der Nähe der Enden. Wir kommen später hierauf noch genauer zurück.



Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen.

Von

Karl Willy Wagner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Bemerkungen über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Die Frage nach der Beanspruchung von Transformatorwicklungen durch eindringende elektrische Wellen erlangte eine praktische Bedeutung, sobald man erkannt hatte, daß viele der sogenannten Überspannungen von Wanderwellen herrühren. Anfangs begnügte man sich damit, die Wicklungen als gewöhnliche, gestreckte Leitungen mit dem besonderen Kennzeichen eines hohen Wellenwiderstandes zu betrachten. Diese Auffassung gibt von den Vorgängen ein einfaches Bild, das für manche Zwecke ausreicht; es genügt aber nicht, um die Beanspruchung der Wicklung zu bestimmen. Der Grund ist, daß sich die Wellen in einer Wicklung infolge der gegenseitigen Beeinflussung benachbarter Windungen wesentlich anders ausbreiten als in einer gestreckten Leitung. Von der Art der Ausbreitung hängt aber die räumliche Feldverteilung ab, die die Beanspruchung bestimmt. Nun ist das elektromagnetische Feld einer in der Wicklung verlaufenden Welle ein so kompliziertes Gebilde, daß man heute nicht erwarten darf, diesen Vorgang mit allen seinen Feinheiten rechnerisch erfassen zu können. Die Rechnung muß sich daher mit dem bescheideneren Ziel begnügen, die Vorgänge in groben Zügen wiederzugeben. Zu diesem Zweck betrachtet man an Stelle der wirklichen Wicklung eine Ersatzspule mit einfacheren elektromagnetischen Eigenschaften. Natürlich ist darauf zu achten, daß auf diesem Wege nicht gerade diejenige Besonderheit des Vorgangs verloren geht, die man untersuchen will. Das ist freilich leichter gesagt als getan; da man die exakte Lösung[1]) nicht kennt, fehlt die Grundlage für eine sichere Entscheidung, und man bleibt letzten Endes immer auf das physikalische Gefühl angewiesen. Die Erfahrung an wirklichen Spulen muß lehren, wie weit die Überlegungen stichhaltig sind.

In einigen Arbeiten[2]), die sich auf das hier erörterte Problem beziehen, habe ich die Wicklung durch eine Ersatzspule nach Abb. 1 ersetzt. Die Kondensatoren C sollen die verteilte Kapazität der Wicklung nach Erde, die Kondensatoren K die Kapazität zwischen Windung und Windung darstellen. In den Kondensatoren K drückt sich die gegenseitige elektrische Beeinflussung benachbarter Windungen aus. Die Induktivität L einer Windung wurde aus dem gesamten magnetischen Felde definiert, das mit der Windung verkettet ist, wenn in den übrigen Windungen derselbe Strom fließt wie in der betrachteten Windung. Bei dieser Art der Definition ist der Hauptteil der gegenseitigen magnetischen Beeinflussung benachbarter Windungen bereits in L mit enthalten. Vernachlässigt ist nur die Änderung, die in der gegenseitigen magnetischen Einwirkung auftritt, wenn die Ströme in benachbarten Windungen verschieden sind.

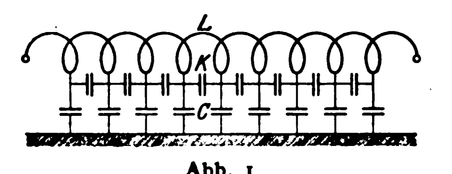


Abb. 1.

---

[1]) Hierunter verstehen wir eine genaue Bestimmung des elektromagnetischen Feldes der Spule, etwa wie sie von A. Sommerfeld (Ann. d. Phys. **24**, S. 609, 1907) und W. Lenz, (Ann. d. Phys, **37**, S. 923, 1912) für andere Spulenprobleme durchgeführt ist.

[2]) „Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in eine Spule mit Windungskapazität", Elektrot. u. Maschinenbau, Wien 1915, S. 89, 105. — „Beanspruchung und Schutzwirkung von Spulen bei schnellen Ausgleichsvorgängen", ETZ 1916, S. 425, 440, 456. — Archiv f. Elektrot. **4**, S. 180, Abschnitt 11 (Einpoliges Einschalten einer Spule mit Windungskapazität).

Neuerdings hat O. Böhm in einer sehr bemerkenswerten Arbeit[1]) auch die von dem Unterschied der Ströme in benachbarten Windungen herrührende Gegeninduktion berücksichtigt. Er glaubt aus seinen Untersuchungen den Schluß ziehen zu sollen, daß diese Gegeninduktion beim Eindringen periodischer Wellen eine wesentliche Rolle spielt. Das trifft jedoch nicht zu, wie hier gezeigt werden soll. Außerdem hat sich in die schöne Untersuchung Böhms leider ein Versehen eingeschlichen: Die eine der benutzten Grenzbedingungen ist nicht richtig. Infolgedessen ist die Endformel für die Spannungsverteilung ebenfalls zu berichtigen. Glücklicherweise ist die Änderung unter den praktisch zumeist vorliegenden Verhältnissen von geringem Einfluß auf die Zahlenwerte. Die von Böhm ausgeführten Versuche geben wertvolle Aufschlüsse über die Vorgänge beim Eindringen von Wellen in Transformatorwicklungen.

In den genannten Arbeiten habe ich die Spule als ein homogenes Gebilde betrachtet, wobei die Windungslänge als unendlich klein im Vergleich zur Länge der Spule bzw. zur Längeneinheit angesehen ist. Auch Böhm geht von einer Spule mit stetig verteilten Leitungskonstanten, jedoch mit endlicher Windungslänge l_w aus. Im Laufe der Rechnung setzt Böhm aber $\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\,a\,l_w$ gleich $\frac{1}{2}\,a\,l_w$, was gleichfalls auf die Annahme einer unendlich kleinen Windungslänge hinausläuft[2]).

Bei der homogenen Spule mit unendlich kleiner Windungslänge macht die Definition der Windungskapazität und der Gegeninduktivität benachbarter Windungen einige begriffliche Schwierigkeiten[3]); weitere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Feststellung der richtigen Grenzbedingungen. Alle diese Denkschwierigkeiten entfallen, wenn man gleich von vornherein der Wirklichkeit entsprechend eine Spule mit endlicher Windungszahl und endlicher Windungslänge in die Betrachtung einführt. Überraschenderweise läßt sich die Rechnung für diesen Fall streng durchführen; sie gestaltet sich sogar einfacher als bei dem idealisierten homogenen Spulengebilde mit unendlich vielen Windungen. An Hand der gefundenen Lösung sind diejenigen Fragen, die bei dem Problem von praktischer Bedeutung sind, unschwer zu beantworten. Im Hinblick auf die Böhmsche Arbeit erschien es mir außerdem von Interesse, hinterher durch einen Grenzübergang wieder zum homogenen Spulengebilde überzugehen und dann klarzustellen, worin sich die Grundlage und das Ergebnis unserer Rechnung von der Böhmschen unterscheidet[4]).

2. Die Grundgleichungen einer Spule mit endlicher Windungszahl.

Abb. 2 zeigt den Schaltungsplan des betrachteten Spulengebildes. Die Spule hat im ganzen m Windungen, die einzelnen Windungen sind mit

$$1, 2, \ldots n-1, n, n+1, \ldots m-1, m$$

bezeichnet. Gegen Erde habe die n-te Windung am Anfang die Spannung V_{n-1}, am Ende die Spannung V_n, I_n sei der in dieser Windung fließende Strom.

Leitungsgebilde der in Abb. 2 dargestellten Art habe ich früher als „Kettenleiter" bezeichnet[5]). Unser Spulengebilde unterscheidet sich von den damals betrachteten Kettenleitern allerdings dadurch, daß noch eine Gegeninduktivität M zwischen benach-

[1]) Darmstädter Doktordissertation: „Rechnerische und experimentelle Untersuchung der Einwirkung von Wanderwellen-Schwingungen auf Transformatorwicklungen". 1917. (Abgedruckt im Archiv f. Elektrot. 5, 1917, S. 383—438.)

[2]) Der Rechnungsbegriff „unendlich klein" bedeutet natürlich praktisch immer nur „sehr klein im Vergleich zu der angenommenen Einheit".

[3]) Beide werden im Grenzfall unendlich groß (vgl. Abschnitt 12 dieser Arbeit).

[4]) Ich verweise ferner auf die vorangehende, mir erst bei der Korrektur dieser Arbeit bekannt gewordene Abhandlung von W. Rogowski (dieses Heft S. 265), in der das Einschaltproblem der Spule auf einem anderen Wege behandelt wird.

[5]) „Die Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen". Archiv f. Elektrot. 3, 1915, S. 315.



barten Kettengliedern angenommen ist. Indessen hindert dieser Umstand nicht, das seinerzeit angegebene Berechnungsverfahren auch auf den vorliegenden Fall anzuwenden.

Wir wollen das Eindringen periodischer Wellen untersuchen und denken uns diese durch eine auf den Anfang der Spule wirkende elektromotorische Kraft

$$V_0 = E \sin \omega t \quad \ldots \quad 1)$$

hervorgebracht. Dann ergibt sich durch die Anwendung des Induktionsgesetzes auf die n-te Windung die erste Grundgleichung

$$\mathbf{V}_{n-1} - \mathbf{V}_n = j\omega L\, \mathbf{I}_n + j\omega M (\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{I}_n) + j\omega M (\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{I}_n) \quad \ldots \quad 2)$$

Der erste Posten rechts ist die vom Strom $\mathbf{I}_n$ selbstinduzierte EMK, der zweite Posten die vom Stromüberschuß der vorhergehenden Windung, der dritte Posten die vom Stromüberschuß der folgenden Windung gegeninduzierte EMK. In der Gl. 2) sind die Größen $\mathbf{V}$ bzw. $\mathbf{I}$ als Spannungsvektoren bzw. Stromvektoren aufzufassen[1]). Die Gl. 1) lautet als Vektorgleichung

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{E} \quad \ldots \quad 1a)$$

$\mathbf{E}$ ist der Vektor der aufgedrückten EMK.

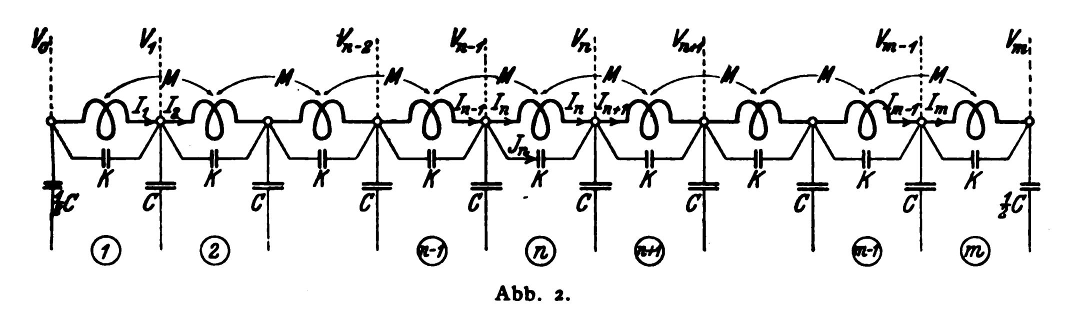


Abb. 2.

Wendet man ferner das Kirchhoffsche Gesetz der Stromverzweigung auf die Verbindungsstelle der n-ten mit der (n + 1)-ten Windung an, so erhält man die zweite Grundgleichung

$$\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_{n+1} = j\omega C\, \mathbf{V}_n - j\omega K (\mathbf{V}_{n-1} - \mathbf{V}_n) - j\omega K (\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_n) \quad \ldots \quad 3)$$

Sie ist gleichfalls in Vektorform angeschrieben.

3. Die allgemeine Lösung.

Man kann aus den Gleichungen 2) und 3) enweder $\mathbf{I}$ oder $\mathbf{V}$ eliminieren und gelangt dadurch zu einer linearen Differenzengleichung 4. Ordnung für $\mathbf{V}$ oder $\mathbf{I}$. Sie ist in bekannter Weise durch eine Exponentialfunktion a^n zu lösen[2]), die man hier zweckmäßigerweise mit der Grundzahl der natürlichen Logarithmen schreibt, indem man

$$a = e^{\mu}, \qquad a^n = e^{\mu n}, \qquad \mu = \ln a$$

setzt. Die Größe μ muß sich dann aus der Rechnung ergeben.

Einfacher ist es, unmittelbar mit dem Ansatz

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{A} e^{\mu n}, \qquad \mathbf{I}_n = \mathbf{B} e^{\mu n} \quad \ldots \quad 4)$$

in die Grundgleichungen hineinzugehen. Man kann dann den Faktor $e^{\mu n}$ wieder herausheben und erhält aus der Gl. 2) bzw. 3):

$$\mathbf{A}(e^{-\mu} - 1) = j\omega L \mathbf{B} + j\omega M (e^{\mu} - 2 + e^{-\mu}) \mathbf{B},$$
$$\mathbf{B}(1 - e^{\mu}) = j\omega C \mathbf{A} - j\omega K (e^{\mu} - 2 + e^{-\mu}) \mathbf{A}.$$

[1]) Sie sind als solche durch die besondere Schrift gekennzeichnet.

[2]) Siehe z. B. G. Wallenberg, „Theorie der linearen Differenzengleichungen", Leipzig 1911.

Die Gleichungen lassen sich, wenn man Hyperbelfunktionen einführt, wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} -2\,\mathbf{A}e^{-\frac{\mu}{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu}{2} &= j\omega\,\mathbf{B}\left(L+4\,M\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2}\right), \\ -2\,\mathbf{B}e^{\frac{\mu}{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu}{2} &= j\omega\,\mathbf{A}\left(C-4\,K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Jede dieser Gleichungen ergibt einen bestimmten Wert des Verhältnisses $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, beide Werte müssen einander gleich sein. Diese Bedingung liefert eine Gleichung zur Bestimmung der für unser Problem maßgebenden Werte von μ. Sie lautet:

$$4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2} = -\omega^2\left(L+4\,M\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2}\right)\left(C-4\,K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2}\right). \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Setzt man

$$4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2} = \xi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

so ist das eine quadratische Gleichung für ξ, die sich geordnet in der Form

$$\xi^2 + \xi\left(\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2}\right) - \frac{LC}{MK} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

darstellt und die beiden Lösungen

$$\xi_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2}\right)^2 + \frac{LC}{MK}} \quad \ldots \quad 9a)$$

und

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2}\right)^2 + \frac{LC}{MK}} \quad \ldots \quad 9b)$$

besitzt.

Die Koeffizienten L, M, C und K sind allesamt reell und positiv; daher ist ξ_1 stets positiv, ξ_2 stets negativ.

Setzt man nun in die Gl. 7) $\xi = \xi_1$ ein, so erhält man die Beziehung

$$2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2} = \pm\sqrt{\xi_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10a)$$

die zwei entgegengesetzt gleiche, reelle Werte

$$\mu = +\mu_1 \quad \text{und} \quad \mu = -\mu_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11a)$$

ergibt. Dagegen läßt die andere Gleichung

$$2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu}{2} = \pm\sqrt{\xi_2}$$

nur zwei rein imaginäre Werte

$$\mu = +j\mu_2 \quad \text{und} \quad \mu = -j\mu_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11b)$$

zu. Wir schreiben sie daher zweckmäßig in der Gestalt:

$$-2j\,\mathfrak{Sin}\frac{j\mu_2}{2} = 2\sin\frac{\mu_2}{2} = \pm\sqrt{-\xi_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10b)$$

Endlich merken wir uns noch die Beziehung an

$$-\xi_1\,\xi_2 = 4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\mu_2}{2} = \frac{LC}{MK}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Sie drückt den bekannten Satz aus, daß das Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung gleich dem absoluten (d. h. von ξ freien) Gliede ist (siehe Gl. 8).

Als erstes Ergebnis unserer Überlegungen stellen wir fest, daß es vier verschiedene Werte vom μ gibt, mit denen der Ansatz 4) die Grundgleichungen befriedigt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen hat somit die Form:

$$V_n = A_1 e^{\mu_1 n} + A_2 e^{-\mu_1 n} + A_3 e^{j\mu_2 n} + A_4 e^{-j\mu_2 n} \quad \ldots \ldots \quad 13a)$$

$$I_n = B_1 e^{\mu_1 n} + B_2 e^{-\mu_1 n} + B_3 e^{j\mu_2 n} + B_4 e^{-j\mu_2 n} \quad \ldots \ldots \quad 13b)$$

Die acht Konstanten A_1 bis B_4 sind jedoch nicht alle voneinander unabhängig, vielmehr sind gemäß den Gleichungen 5) die Größen B gegeben, sobald die entsprechenden Größen A festliegen. Z. B. ergibt sich aus der zweiten Gl. 5):

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{j\omega A_1 e^{-\frac{\mu_1}{2}}}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}\left(C - 4K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right),\\
B_2 &= +\frac{j\omega A_2 e^{\frac{\mu_1}{2}}}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}\left(C - 4K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right),\\
B_3 &= -\frac{\omega A_3 e^{-j\frac{\mu_2}{2}}}{2\sin\frac{\mu_2}{2}}\left(C + 4K\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right),\\
B_4 &= +\frac{\omega A_4 e^{j\frac{\mu_2}{2}}}{2\sin\frac{\mu_2}{2}}\left(C + 4K\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

4. Die Grenzbedingungen.

Die Konstanten A_1 bis A_4 ergeben sich dadurch, daß man die allgemeine Lösung 13a) und 13b) den im besonderen Falle vorgeschriebenen Grenzbedingungen anpaßt. Die eine dieser Grenzbedingungen haben wir bereits durch die Gl. 1) bzw. 1a) ausgedrückt. Sie besagt, daß wir das Eindringen periodischer Wellen betrachten wollen, die durch eine am Anfang des Spulengebildes tätige EMK $E \sin \omega t$ erregt werden.

Wenn wir ferner annehmen, daß das Ende der Spule (die m-te Windung) mit Erde verbunden sei, so ist als zweite Grenzbedingung die Gleichung

$$V_m = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

anzusetzen.

Damit sind die äußeren Grenzbedingungen erschöpft. Die Eigenart unseres Spulengebildes bringt es indes mit sich, daß noch zwei innere (d. h. durch die Natur des Gebildes bedingte) Grenzbedingungen zu beachten sind. Die Grundgleichung 2) hat nämlich zunächst nur für innere Windungen einen Sinn; das sind solche, die sowohl einen linken als auch einen rechten Nachbarn haben. Für die erste Windung fällt dagegen das zweite Glied auf der rechten Seite fort, da es keine nullte Windung und somit auch keine Induktion von dorther gibt. Ebenso ist für die letzte (m-te) Windung das letzte Glied rechts fortzulassen[1]). Die beiden Gleichungen lauten dann:

[1]) Auch die folgende Überlegung führt zum Ziel. Man denkt sich noch eine nullte und (m + 1)te Windung hinzu, macht für den Strom in diesen beiden fiktiven Windungen denselben mathematischen Ansatz wie für die übrigen Windungen und schreibt dann die Grenzbedingungen $I_0 = I_1$ und $I_{m+1} = I_m$ vor. Sie sind den Gleichungen 16a) und 16b) gleichwertig. Für die homogene Wicklung (Abschnitt 12) gehen sie ebenfalls in die Gl. 32) über.

$$\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1 = j\omega L \mathbf{I}_1 + j\omega M (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1), \quad \ldots \ldots \quad 16a)$$

$$\mathbf{V}_{m-1} - \mathbf{V}_m = j\omega L \mathbf{I}_m + j\omega M (\mathbf{I}_{m-1} - \mathbf{I}_m) \quad \ldots \ldots \quad 16b)$$

5. Berechnung der Konstanten.

Indem man den allgemeinen Ansatz 13a), 13b) und 14) in die Grenzbedingungen 1a), 15), 16a) und 16b) einführt, erhält man die folgenden vier Gleichungen zur Berechnung der Konstanten $\mathbf{A}_1$ bis $\mathbf{A}_4$:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 = \mathbf{E}, \\
&\mathbf{A}_1 e^{\mu_1 m} + \mathbf{A}_2 e^{-\mu_1 m} + \mathbf{A}_3 e^{j\mu_2 m} + \mathbf{A}_4 e^{-j\mu_2 m} = 0, \\
&\mathbf{A}_1 f_1 + \mathbf{A}_2 f_2 + \mathbf{A}_3 f_3 + \mathbf{A}_4 f_4 = 0, \\
&\mathbf{A}_1 g_1 + \mathbf{A}_2 g_2 + \mathbf{A}_3 g_3 + \mathbf{A}_4 g_4 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

Dabei ist

$$f_1 = 1 - e^{\mu_1} - \frac{\omega^2}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}\left(L e^{\frac{\mu_1}{2}} + 2 M e^{\mu_1}\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}\right)\left(C - 4K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right),$$

$$g_1 = e^{\mu_1 m}\left[e^{-\mu_1} - 1 - \frac{\omega^2}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}\left(L e^{-\frac{\mu_1}{2}} - 2 M e^{-\mu_1}\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}\right)\left(C - 4K\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)\right].$$

Die übrigen Koeffizienten f_2, f_3 und f_4, bzw. g_2, g_3 und g_4 erhält man der Reihe nach dadurch, daß man in diesen Ausdrücken μ_1 durch $-\mu_1$, durch $+j\mu_2$ und durch $-j\mu_2$ ersetzt.

Aus den Gleichungen 17) lassen sich die Größen $\mathbf{A}_1$ bis $\mathbf{A}_4$ am einfachsten mittels Determinanten berechnen. Die viergliedrigen Determinanten, die man erhält, lassen sich nämlich vor der wirklichen Ausrechnung ganz bedeutend vereinfachen, indem man die bekannten Rechenregeln über die Zusammenfassung von Gliederreihen anwendet. Wir übergehen die etwas langwierige, aber ganz elementare Rechnung und schreiben sofort das Ergebnis an[1]):

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= -\frac{\mathbf{E}}{2}\,\frac{\left(1 + 4\frac{M}{L}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{-\mu_1 m}}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}, \\
\mathbf{A}_2 &= +\frac{\mathbf{E}}{2}\,\frac{\left(1 + 4\frac{M}{L}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{+\mu_1 m}}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}, \\
\mathbf{A}_3 &= -\frac{\mathbf{E}}{2}\,\frac{\left(1 - 4\frac{M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right)\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{-j\mu_2 m}}{j\sin\mu_2 m}, \\
\mathbf{A}_4 &= +\frac{\mathbf{E}}{2}\,\frac{\left(1 - 4\frac{M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right)\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{+j\mu_2 m}}{j\sin\mu_2 m}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 18)$$

---

[1]) Wer die direkte Ausrechnung scheut, kann leicht die Nachprüfung machen, daß die Ausdrücke 18) die Gleichungen 17) befriedigen.

Nunmehr ergeben sich die Größen **B**, indem man diese Werte in die Gl. 14) einsetzt. Die so erhaltenen Ausdrücke lassen sich mit Rücksicht auf die Gl. 6) noch wie folgt vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \frac{\mathbf{E}}{j\omega L}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{-\mu_1\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}},\\
\mathbf{B}_2 &= \frac{\mathbf{E}}{j\omega L}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{+\mu_1\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}},\\
\mathbf{B}_3 &= \frac{\mathbf{E}}{j\omega L}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{-j\mu_2\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{\sin\mu_2 m\,\sin\frac{\mu_2}{2}},\\
\mathbf{B}_4 &= \frac{\mathbf{E}}{j\omega L}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{+j\mu_2\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{\sin\mu_2 m\,\sin\frac{\mu_2}{2}}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19)$$

6. Spannungs- und Stromverteilung.

Sie ist durch die Gleichungen 13a) und 13b) gegeben, wobei für die Konstanten die durch 18) und 19) gegebenen Werte einzuführen sind. Man kann dann mit Rücksicht auf die Beziehung 12) sowie auf bekannte Formeln aus der Lehre von den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen noch einiges vereinfachen und erhält die folgenden Gleichungen, die die Spannungsverteilung und die Stromverteilung längs der Wicklung darstellen:

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{E}\left[a_1\frac{\mathfrak{Sin}\,\mu_1(m-n)}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}+a_2\frac{\sin\mu_2(m-n)}{\sin\mu_2 m}\right] \quad \ldots\ldots \quad 20a)$$

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{E}\,b\left[\frac{\mathfrak{Cos}\,\mu_1\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m\,\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}+\frac{\cos\mu_2\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\mu_2 m\,\sin\frac{\mu_2}{2}}\right] \quad \ldots\ldots \quad 20b)$$

$$a_1 = \frac{\left(1+\frac{4M}{L}\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}} = \frac{1+\frac{C}{2K}-\cos\mu_2}{\mathfrak{Cos}\,\mu_1-\cos\mu_2} \quad \ldots\ldots \quad 20c)$$

$$a_2 = \frac{\left(1-\frac{4M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right)\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}} = \frac{\mathfrak{Cos}\,\mu_1-1-\frac{C}{2K}}{\mathfrak{Cos}\,\mu_1-\cos\mu_2} \quad \ldots\ldots \quad 20d)$$

$$b = \frac{2}{j\omega L}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}+\sin^2\frac{\mu_2}{2}} = \frac{1}{j\omega M}\cdot\frac{C}{4K}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\mu_1-\cos\mu_2} \quad \ldots\ldots \quad 20e)$$

In diesen Ausdrücken sind für eine gegebene Frequenz (ω) die a_1, a_2 und b konstante Größen. Von der Ordnungszahl n, d. h. von der Lage der betrachteten Windung

hängen nur die Funktionen $\mathfrak{Sin}\,\mu_1\,(m - n)$ und $\sin \mu_2\,(m - n)$ sowie $\mathfrak{Cof}\,\mu_1\,(m - n + \frac{1}{2})$ und $\cos \mu_2\,(m - n + \frac{1}{2})$ ab. Es bedeutet also in den Gl. 20a) und 20b) jeweils das erste Glied eine hyperbolische Verteilung, das zweite Glied eine sinusförmige Verteilung von Spannung und Strom. Bei der hyperbolischen Verteilung nimmt die Spannung vom Ende der Wicklung nach dem Anfang hin beständig zu, während sich bei der sinusförmigen Verteilung im allgemeinen[1]) Wellen ausbilden. Die genauere Form dieser beiden Verteilungen, ebenso ihr Stärkeverhältnis hängt von der Frequenz ab, die gemäß den Gl. 9a), 9b), 10a) und 10b) in μ_1 und μ_2 eingeht. Um uns einen Überblick über die hier obwaltenden Verhältnisse zu verschaffen, betrachten wir ein Zahlenbeispiel. Des späteren Vergleichs wegen legen wir dieselben Konstanten wie in dem Böhmschen Zahlenbeispiel zugrunde.

7. Zahlenbeispiel.

Die elektrischen Konstanten einer Windung der betrachteten Wicklung haben die folgenden Werte:

$$L = 0{,}002 \text{ Henry,}$$
$$M = 0{,}00032 \text{ Henry,}$$
$$C = 0{,}04\ \mu\mu F,$$
$$K = 160\ \mu\mu F.$$

Hiermit sind auf Grund der vorher entwickelten Beziehungen die Schwingungskonstanten $\sin\frac{\mu_2}{2}$ und $\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}$, sowie die Amplituden a_1 und a_2 des hyperbolischen und des sinusförmigen Gliedes in der Spannungsverteilung zu berechnen. Für eine Reihe von Frequenzen zwischen 8000 und 1,6 Millionen Hertz[2]), entsprechend den Kreisfrequenzen $\omega = 0{,}5 \cdot 10^5$ bis $100 \cdot 10^5$, sind die berechneten Werte in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt. Die letzten vier Spalten enthalten die mit $M = 0$ berechneten Werte. Auf diese werden wir noch zurückkommen. Die letzte Zeile der Zusammenstellung gibt die Grenzwerte für sehr hohe Frequenzen ($\omega = \infty$).

Tafel 1.

Schwingungskonstanten und Schwingungsamplituden bei verschiedenen Frequenzen.

Kreisfrequenz ω s^{-1}	Wellenlänge in Luft λ km	M = 0,00032 Henry				M = 0			
		$\sin\frac{\mu_2}{2}$	$\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}$	a_1	a_2	$\sin\frac{\mu_2}{2}$	$\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}$	a_1	a_2
$0{,}5 \cdot 10^5$	37,500	0,000224	42,8	0	1	0,000224	∞	0	1
2	9,400	0,000904	10,64	0	1	0,00090	„	0	1
6	3,150	0,00286	3,36	0	1	0,00285	„	0	1
10	1,880	0,00540	1,775	0	1	0,00542	„	0	1
13	1,440	0,00857	1,120	0	1	0,00854	„	0	1
16	1,170	0,01664	0,576	0	1	0,01687	„	0	1
17	1,100	0,02705	0,356	0,0062	0,994	0,0277	„	0	1
17,5	1,075	0,0428	0,220	0,0378	0,962	0,0553	„	0	1
17,65	1,060	0,0977	0,0977	0,503	0,497	∞	∞	—	—
18	1,040	0,224	0,0429	0,966	0,034	„	0,0420	1	0
19	0,990	0,440	0,0219	0,998	0,0022	„	0,0216	1	0
22	0,855	0,720	0,01336	1	0	„	0,0133	1	0
30	0,628	0,977	0,00984	1	0	„	0,00977	1	0
40	0,470	1,087	0,00880	1	0	„	0,00880	1	0
60	0,313	1,160	0,00828	1	0	„	0,00826	1	0
80	0,235	1,184	0,00808	1	0	„	0,00808	1	0
100	0,188	1,192	0,00804	1	0	„	0,00803	1	0
∞	0	1,250	0,00790	1	0	„	0,00790	1	0

[1]) Vgl. die Bemerkungen zu dem folgenden Zahlenbeispiel.

[2]) Für die bisher fehlende Bezeichnung der Einheit der Frequenz (= 1 Periode in der Sekunde) schlage ich den Namen „Hertz" vor.



Die Werte in der Zahlentafel hängen lediglich von den Konstanten der Windung ab, nicht aber von der Windungszahl m der Spule. Dagegen beeinflußt die Windungszahl natürlich die Spannungs- und Stromverteilung längs der Spule. Diese Verteilungen sind gemäß den Gl. 20a) und 20b) für jede gegebene Windungszahl m leicht zu berechnen. Hierzu hat man vorerst zu den Werten von $\sin\frac{\mu_2}{2}$ und $\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}$ die zu gehörigen Größen μ_2 und μ_1 zu ermitteln. Das geschieht mittels der bekannten trigonometrischen und hyperbolischen Tafeln[1]). Allerdings versagen die trigonometrischen Tafeln, wenn $\sin\frac{\mu_2}{2}$ größer als 1 ist, wie es hier für die Kreisfrequenzen $\omega = 40 \cdot 10^6$ und mehr eintritt. In diesem Falle wird μ_2 komplex. Setzen wir

$$\mu_2 = \varrho + j\sigma, \qquad \text{21a)}$$

so wird

$$\sin\frac{\mu_2}{2} = \sin\frac{\varrho}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\sigma}{2} + j\cos\frac{\varrho}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\sigma}{2}.$$

Nun ist $\sin\frac{\mu_2}{2}$ eine reelle Zahl; daher muß das imaginäre Glied rechts verschwinden. Da aber σ nach der Voraussetzung nicht verschwinden soll, müssen wir

$$\cos\frac{\varrho}{2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varrho = \pi \qquad \text{21b)}$$

setzen. Hiermit ergibt sich weiter

$$\sin\frac{\mu_2}{2} = \mathfrak{Cof}\,\frac{\sigma}{2}, \qquad \text{21c)}$$

oder

$$\sigma = 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\sin\frac{\mu_2}{2}\right) \qquad \text{21d)}$$

Hiermit ist μ_2 vollständig bestimmt. Da $\sin\frac{\mu_2}{2}$ eine reelle Zahl, größer als 1 ist, läßt sich $\frac{\sigma}{2}$ gemäß 21c) den hyperbolischen Tafeln entnehmen.

Was bedeutet es physikalisch, wenn μ_2 komplex wird? Die Gleichungen 20a) und 20b) sind, wie aus der Herleitung hervorgeht, Vektorgleichungen. Solange μ_2 reell bleibt, sind die beiden Glieder auf den rechten Seiten dieser Gleichungen reell. Das bedeutet, daß das sinusförmige und das hyperbolische Glied entweder in der gleichen oder in der entgegengesetzten Phase schwingen, wie die aufgedrückte elektromotorische Kraft **E**. Das Hyperbelglied ist beständig positiv, d. h. phasengleich mit **E**. Das Sinusglied wechselt das Vorzeichen mit $\sin\mu_2(m-n)$; an denjenigen Stellen der Wicklung, wo $\frac{\sin\mu_2(m-n)}{\sin\mu_2 m}$ negativ ist, schwingt das Sinusglied in Phasenopposition zu **E**.

Wird μ_2 in der hier festgestellten Weise komplex, so verwandelt sich die Sinusverteilung ebenfalls in eine Hyperbelverteilung. Es wird nämlich

$$\frac{\sin\mu_2(m-n)}{\sin\mu_2 m} = \frac{\sin(\varrho+j\sigma)(m-n)}{\sin(\varrho+j\sigma)m} = \frac{\cos\pi(m-n)\,\mathfrak{Sin}\,\sigma(m-n)}{\cos\pi m\,\mathfrak{Sin}\,\sigma m}$$

$$= (-1)^n\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma(m-n)}{\mathfrak{Sin}\,\sigma m},$$

---

[1]) Von diesen sind die von der Smithsonian Institution herausgegebenen „Smithsonian Mathematical Tables. Hyperbolic functions. Prepared by G. F. Becker and C. E. van Orstrand." Washington 1909, besonders empfehlenswert.

$$\frac{\cos \mu_2 (m - n + \frac{1}{2})}{\sin \mu_2 m} = \frac{\cos(\varrho + j\sigma)(m - n + \frac{1}{2})}{\sin(\varrho + j\sigma) m} = -\frac{\sin \pi (m - n + \frac{1}{2}) \mathfrak{Sin}\, \sigma (m - n + \frac{1}{2})}{\cos \pi m \,\mathfrak{Sin}\, \sigma m}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{\mathfrak{Sin}\, \sigma (m - n + \frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\, \sigma m}.$$

Die zweite Hyperbelverteilung ist aber, im Gegensatz zur ersten, nicht mehr beständig positiv. Sie wechselt vielmehr von Windung zu Windung ihr Vorzeichen; schwingt sie also in einer bestimmten Windung in Phase mit der aufgedrückten elektromotorischen Kraft, so schwingt sie in der nächsten Windung in Phasenopposition zu ihr. Man kann sie auch als stark gedämpfte Schwingung auffassen, deren Wellenlänge gleich der Windungslänge ist.

8. Die kritische Frequenz.

Beim Betrachten der Zahlenwerte in der Tafel 1 fällt auf, daß die Amplitude a_2 der Sinusverteilung bis dicht an die Kreisfrequenz $\omega = 17{,}65 \cdot 10^5$ heran viel größer ist als die Amplitude a_1 der Hyperbelverteilung. Für die Kreisfrequenz $17{,}65 \cdot 10^5$ sind beide Verteilungen ungefähr gleich stark, bei höheren Frequenzen überwiegt die Hyperbelverteilung.

Die Kreisfrequenz $17{,}65 \cdot 10^5$ ist zugleich diejenige, für welche

$$\sin \frac{\mu_2}{2} = \mathfrak{Sin} \frac{\mu_1}{2}$$

ist, was nach Abschnitt 3 dann eintritt, wenn $\xi_1 = -\xi_2$ oder

$$\frac{L}{M} - \frac{C}{K} - \frac{1}{MK\omega^2} = 0 \quad \text{22)}$$

ist. Die Frequenz, für die diese Bedingung erfüllt ist, nennen wir mit R. Rüdenberg[1]) die kritische Frequenz. Die zugehörige Kreisfrequenz ergibt sich aus 22) zu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LK - MC}}. \quad \text{22a)}$$

Nun ist für die vorher betrachtete Spule

$$LK = 0{,}32 \cdot 10^{-12},$$
$$MC = 0{,}0000128 \cdot 10^{-12}.$$

Mit ähnlichen Verhältnissen hat man stets zu rechnen, da immer K viel größer als C und M kleiner als L ist. Daher gilt mit guter Annäherung:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LK}} \quad \text{22b)}$$

In unserem Beispiel ergibt sich hieraus: $\omega_0 = 17{,}66 \cdot 10^5$. Den zugehörigen kritischen Wert μ_0 von μ_1 erhält man aus den Gl. 9a) und 10a):

$$2\,\mathfrak{Sin} \frac{\mu_0}{2} = \sqrt[4]{\frac{LC}{MK}} \quad \text{22c)}$$

Der Ausdruck 22b) für die kritische Frequenz lehrt, daß sie gleich der Eigenfrequenz des aus L und K gebildeten Kreises, d. h. gleich der Eigenfrequenz einer Windung ist. Bei der kritischen Frequenz ist der Scheinwiderstand des Spulendrahtes genau so groß wie der Scheinwiderstand der parallel geschalteten Windungskapazität; wir haben den Fall der Stromresonanz[2]), bei dem im Spulendraht und in der Windungs-

---

[1]) „Entstehung und Verlauf elektrischer Sprungwellen", Elektrot. u. Maschinenbau (Wien) 1914, S. 731.

[2]) Böhm, a. a. O.

kapazität starke in Phasenopposition stehende Ströme fließen, während der Gesamtstrom sehr klein ist.

9. Der Querstrom.

Den durch die Windungskapazität K fließenden Strom wollen wir kurz den Querstrom nennen, weil er quer durch die Isolation von Windung zu Windung fließt. Seine Stärke $\mathbf{J}_n$ ist

$$\mathbf{J}_n = j\omega K(\mathbf{V}_{n-1} - \mathbf{V}_n),$$

wofür sich nach Gl. 20a) der Ausdruck

$$\mathbf{J}_n = 2\,j\omega K\mathbf{E}\left[a_1 \frac{\mathfrak{Cof}\,\mu_1(m-n+\frac{1}{2})\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m} + a_2 \frac{\cos\mu_2(m-n+\frac{1}{2})\sin\frac{\mu_2}{2}}{\sin\mu_2 m}\right]$$

ergibt. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke 20c) bis 20e) können wir hierfür auch schreiben:

$$\mathbf{J}_n = -\omega^2 LK\mathbf{E}b\left[\left(1+\frac{4M}{L}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)\frac{\mathfrak{Cof}\,\mu_1(m-n+\frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2}} + \left(1-\frac{4M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right)\frac{\cos\mu_2(m-n+\frac{1}{2})}{\sin\mu_2 m\sin\frac{\mu_2}{2}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Wir wollen jetzt den Querstrom mit dem Windungsstrom $\mathbf{I}_n$ vergleichen. Für diesen gilt der Ausdruck 20b). Schreiben wir ihn in der Form

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{E}b\left[\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2}}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,\mu_1(m-n+\frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m} + \frac{1}{\sin\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{\cos\mu_2(m-n+\frac{1}{2})}{\sin\mu_2 m}\right],$$

so gibt der erste Faktor eines jeden Gliedes in der Klammer die relative Stärke, der zweite die räumliche Verteilung des Gliedes an. Wir richten unser Augenmerk jetzt nur auf die Stärke der beiden Glieder und entnehmen der Tafel 2, daß im Windungsstrom unterhalb der kritischen Frequenz ($\omega_0 = 17{,}65\cdot 10^5$) das Sinusglied, oberhalb derselben das hyperbolische Glied durchaus überwiegt.

Gleiches gilt vom Querstrom, bei dem gemäß der Gl. 23) die Stärke des Sinusgliedes durch den Ausdruck

$$c_2 = \omega^2 LK\,\frac{1-\frac{4M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\sin\frac{\mu_2}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23a)$$

die Stärke des Hyperbelgliedes durch den Ausdruck

$$c_1 = \omega^2 LK\,\frac{1+\frac{4M}{L}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23b)$$

gegeben ist.

Will man endlich erfahren, in welchem Verhältnis der Querstrom zum Windungsstrom steht, so hat man nach Gl. 20b) und 23) die Ausdrücke

$$d_1 = \omega^2 LK\left(1+\frac{4M}{L}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\right)$$

und

$$d_2 = \omega^2 LK\left(1-\frac{4M}{L}\sin^2\frac{\mu_2}{2}\right)$$

zu berechnen. Der erste gibt das gesuchte Verhältnis für die hyperbolische Verteilung, der zweite für die Sinusverteilung an. Man sieht aus den Zahlen der Tafel 2, daß das Hyperbelglied sich für die Frequenzen bis oberhalb der kritischen fast zu gleichen Teilen auf den Windungsstrom und den Querstrom verteilt, um dann mit weiter anwachsender Frequenz in steigendem Maße auf den Querstrom überzugehen. Da das Hyperbelglied dann den Löwenanteil des Gesamtstromes ausmacht, so bedeutet dies, daß der Strom bei hohen Frequenzen in der Hauptsache nicht durch den Spulendraht, sondern quer durch die Isolation von Windung zu Windung übergeht[1]).

Bei tiefen Frequenzen überwiegt das Sinusglied sowohl im Windungsstrom als auch im Querstrom; die Stärke des Querstromes beträgt alsdann aber nur einen geringen Bruchteil von der des Windungsstromes.

Man beachte, daß die Zahlen der Tafel 2 kein Bild von der Abhängigkeit der verschiedenen Stromglieder von der Frequenz ergeben, weil diese auch noch in dem gemeinsamen Faktor b steckt (Gl. 20e), den wir bei dem Vergleich der Glieder außer Betracht gelassen haben.

Tafel 2.

ω	Windungsstrom		Querstrom		Querstrom / Windungsstrom		d_1 bzw. d_2 für $M = 0$
	$\frac{1}{\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}$	$\frac{1}{\sin\frac{\mu_2}{2}}$	c_1	c_2	d_1	d_2	$\omega^2 L K$
$0{,}5 \cdot 10^6$	0,0233	4465	0,0219	3,57	0,940	0,0008	0,0008
2	0,094	1106	0,0833	14,16	0,940	0,0128	0,0128
6	0,297	350	0,282	40,3	0,948	0,1152	0,1152
10	0,563	185	0,544	59,3	0,965	0,320	0,320
13	0,893	117	0,872	63,3	0,977	0,542	0,542
16	1,736	60	1,736	49,3	1,00	0,820	0,820
17	2,81	37	2,81	34,2	1,00	0,924	0,925
17,5	4,54	23,3	4,54	22,9	1,00	0,979	0,980
17,65	10,23	10,23	10,23	10,2	1,006	0,994	1
18	23,3	4,47	24,2	4,48	1,038	1,003	1,037
19	45,6	2,27	52,7	2,30	1,155	1,012	1,155
22	74,8	1,39	116	1,44	1,55	1,037	1,55
30	101,6	1,023	293	1,15	2,88	1,120	2,88
40	113,6	0,920	581	1,14	5,12	1,24	5,12
60	120,7	0,862	1389	1,36	11,52	1,58	11,52
80	123,6	0,844	2535	1,75	20,5	2,07	20,5
100	124,3	0,839	3980	2,49	32	2,94	32

10. Resonanzfrequenzen.

Bei bestimmten Frequenzen wird der Nenner $\sin \mu_2 m$ in dem Ausdruck für das Sinusglied der Spannungs- bzw. Stromverteilung [Gl. 20a), 20b), 23)] gleich null. Es ist dies der Fall innerer Resonanz in der Spule. Wir erhalten unendlich starke Spannungen und Ströme, da wir jede Dämpfung vernachlässigt haben. Die Resonanzfrequenzen sind zugleich die Eigenfrequenzen der Spule. Man berechnet sie aus der Resonanzbedingung

$$\sin \mu_2 m = 0 .$$

Daraus folgt zunächst, daß $\mu_2 m$ ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von π sein muß:

$$\mu_2 m = k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Die zugehörigen Eigenwerte μ_2 wollen wir der Unterscheidung wegen mit $\bar{\mu}_k$ bezeichnen.

[1]) Auf diese Erscheinung ist meines Wissens zuerst von C. P. Steinmetz hingewiesen (Proc. of Amer. Inst. of El. Eng. 26 (1907), S. 196; ETZ 1908, S. 693.

Da man die ganze Zahl k beliebig wählen kann, sieht es zunächst so aus, als ob es unendlich viele Eigenwerte gäbe. Tatsächlich kommen aber nur m verschiedene in Frage, d. h. genau so viele, wie die Spule Windungen besitzt. Denn die Spannungs- und Stromverteilung ist nicht durch $\overline{\mu}$, sondern durch $\sin^2\frac{\overline{\mu}}{2}$ und durch das letzte Glied auf den rechten Seiten der Gl. 20a), 20b) und 23) bestimmt, und man überzeugt sich leicht, daß nur die ersten m Werte der Reihe

$$\overline{\mu}_k = \frac{k\pi}{m}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

zu verschiedenen Werten der genannten Ausdrücke führen.

Die zugehörigen Eigenfrequenzen $\overline{\omega}_k$ erhält man aus Gl. 6), worin man, da es sich um Sinusglieder handelt,

$$\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu}{2} \text{ durch } -\sin^2\frac{\overline{\mu}_k}{2} = -\sin^2\frac{k\pi}{2m}$$

zu ersetzen hat. Es ergibt sich

$$\overline{\omega}_k = \frac{2\sin\frac{k\pi}{2m}}{\sqrt{\left(L - 4M\sin^2\frac{k\pi}{2m}\right)\left(C + 4K\sin^2\frac{k\pi}{2m}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

Da für den größten Wert $\overline{\mu}_m$ die Größe $\sin\frac{\overline{\mu}_m}{2}$ ihren Maximalwert 1 erreicht, verteilen sich die Eigenfrequenzen auf das ganze Gebiet, in dem eine reelle Sinusverteilung möglich ist. Das ist für die im Abschnitt 7 betrachtete Spule gemäß der Tafel 1 der Frequenzenbereich von null bis etwa $\omega = 30 \cdot 10^5$. Er erstreckt sich noch über die kritische Frequenz ω_0 hinaus. Die Resonanzfrequenzen verteilen sich aber nicht gleichmäßig auf dieses Gebiet, sondern sie drängen sich in dem oberen Teil zusammen, und zwar ähnlich, wie sich die Werte

$$\sin\frac{k\pi}{2m}$$

in der Nähe ihrer oberen Grenze häufen (Abb. 3)[1]. Die größte Eigenfrequenz hat den Wert

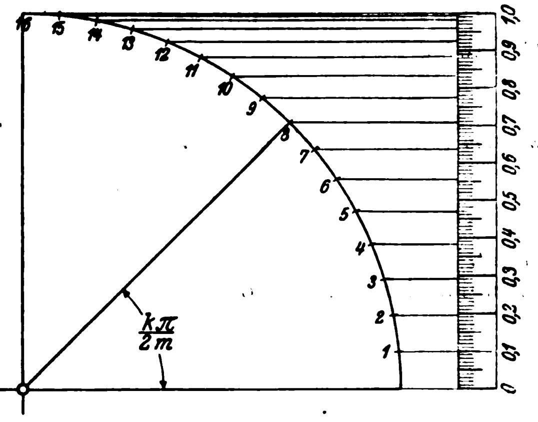


Abb. 3. Werte von $\sin\frac{k\pi}{2m}$ für $m = 16$.

$$\overline{\omega}_m = \frac{2}{\sqrt{(L - 4M)(C + 4K)}} = 29{,}4 \cdot 10^5.$$

In dem Frequenzgebiet unterhalb $\overline{\omega}_m$ liegen die Resonanzpunkte dicht nebeneinander; die Resonanzgefahr wird jedoch durch die bei diesen hohen Frequenzen in unseren Transformatorwicklungen stets sehr starke Dämpfung sehr gemildert.

Betrachten wir z. B. die im Abschnitt 7 näher bezeichnete Spule und nehmen wir

[1]) Die Darstellung nach Abb. 3 gilt streng genommen nur für den Fall $M = 0$, $K = 0$. Die Größe M, die stets viel kleiner als L ist, hat wenig Einfluß, wohl aber die Größe K. Je größer das Verhältnis K/C ist, um so dichter häufen sich die Eigenfrequenzen in der Nähe ihres größten Wertes. Im Grenzfall $K/C = \infty$ werden für $M = 0$ alle Eigenfrequenzen gleich der kritischen Frequenz.

ihre Windungszahl zu $m = 1800$ an, so liefert die folgende Zahlentafel 3 ein Bild von der Verteilung der Resonanzfrequenzen.

Zahlentafel 3.

Resonanzfrequenzen.

k	$\bar{\omega}_k$	k	$\bar{\omega}_k$
1	$1{,}94 \cdot 10^5$	100	$17{,}63 \cdot 10^5$
2	3,81	200	17,83
5	8,54	500	18,77
10	13,08	1000	22,40
20	16,08	1800	29,4
50	17,37		

11. Der Grenzfall $M = 0$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die vorstehenden Ergebnisse in allen wesentlichen Punkten bestehen bleiben, wenn man $M = 0$ setzt, d. h. bei der Berechnung der Gegeninduktion die Stromunterschiede in benachbarten Windungen außer Ansatz läßt.

a) Die betrachtete Frequenz liege unterhalb der kritischen.

Wenn man M mehr und mehr verkleinert, so wächst nach Gl. 9a ξ_1 ins Unendliche. Daher wird auch

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2} = \infty \qquad \text{26a)}$$

Dagegen stellt sich ξ_2 in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ dar. Durch Entwicklung der Quadratwurzel in 9b) nach dem binomischen Satze erhält man den endlichen Grenzwert

$$\xi_2 = \frac{LC\omega^2}{LK\omega^2 - 1},$$

woraus sich dann mit Gl. 10b)

$$\sin\frac{\mu_2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\,\omega\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - LK\omega^2}} \qquad \text{26b)}$$

ergibt. Führt man jetzt die Werte 26a) und 26b) in die Ausdrücke 20c) bis 20e) ein, so ergibt sich mit $M = 0$

$$a_1 = 0; \qquad a_2 = 1 \qquad \text{26c)}$$

$$b = \frac{2\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{j\omega L} \qquad \text{26d)}$$

Hiermit folgt aus 20a), 20b) und 23):

die Spannung

$$V_n = E\,\frac{\sin\mu_2(m-n)}{\sin\mu_2 m}, \qquad \text{26e)}$$

der Windungsstrom

$$I_n = \frac{2E}{j\omega L}\,\frac{\sin\frac{\mu_2}{2}\cos\mu_2\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\mu_2 m}, \qquad \text{26f)}$$

der Querstrom

$$J_n = 2\,j\omega K E\,\frac{\sin\frac{\mu_2}{2}\cos\mu_2\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\mu_2 m}, \qquad \text{26g)}$$

das Verhältnis beider

$$\left|\frac{J_n}{I_n}\right| = d_2 = \omega^2 LK \quad \ldots \quad 26h)$$

b) Die betrachtete Frequenz liege oberhalb der kritischen.

Dann wird

$$\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\omega\sqrt{LC}}{\sqrt{LK\omega^2 - 1}}, \quad \ldots \quad 27a)$$

$$\sin\frac{\mu_2}{2} = \infty \quad \ldots \quad 27b)$$

Ferner ergeben sich auf demselben Wege wie vorher die Formeln:

$$a_1 = 1; \qquad a_2 = 0, \quad \ldots \quad 27c)$$

$$b = \frac{2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}}{j\omega L}, \quad \ldots \quad 27d)$$

$$V_n = E\frac{\mathfrak{Sin}\,\mu_1(m-n)}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}, \quad \ldots \quad 27e)$$

$$I_n = \frac{2E}{j\omega L}\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\mu_1(m-n+\frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}, \quad \ldots \quad 27f)$$

$$J_n = 2j\omega KE\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\mu_1(m-n+\frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\,\mu_1 m}, \quad \ldots \quad 27g)$$

$$\left|\frac{J_n}{I_n}\right| = d_1 = \omega^2 LK \quad \ldots \quad 27h)$$

Die hiernach für unser Zahlenbeispiel berechneten Werte sind in den vier letzten Spalten der Tafel 1 und in der letzten Spalte der Tafel 2 eingetragen. Man sieht, daß kein wesentlicher Unterschied gegen den Fall $M > 0$ besteht. Der Unterschied ist mehr theoretischer Natur, indem für $M = 0$ die Hyperbelverteilung unterhalb der kritischen Frequenz und die Sinusverteilung oberhalb derselben streng verschwindet, während für $M > 0$ die entsprechenden Verteilungen in den genannten Gebieten zwar theoretisch vorhanden sind, aber praktisch keine Rolle spielen.

Die Annahme Böhms, daß die Berücksichtigung von M von wesentlichem Einfluß sei, ist daher nicht richtig, wobei noch zu beachten ist, daß in dem Böhmschen Zahlenbeispiel für M ungefähr der theoretische Höchstwert eingesetzt ist, den diese Größe bei dem gegebenen L überhaupt erreichen kann.

12. Übergang zur homogenen Wicklung.

Durch folgenden Grenzübergang gelangt man zu dem Idealfall der homogenen Wicklung. Man denke sich die Windungen immer dichter aneinandergerückt und zugleich ihre Anzahl mehr und mehr erhöht. Bezeichnet man nun mit L_1 die Induktivität und mit C_1 die Kapazität (nach Erde) der Längeneinheit der Spule, ferner mit l_w die (im Grenzfall unendlich klein gedachte) Länge der Windung [1]), so bedeutet

$$L = L_1 l_w \quad \ldots \quad 28a)$$

[1]) Genauer ausgedrückt: die auf eine Windung entfallende Spulenlänge. Bei einer einlagigen Spule ist dies einfach der Abstand zweier Windungen. In der Arbeit von Böhm hat das Zeichen l_w eine andere Bedeutung.

die Windungsinduktivität und

$$C = C_1 l_w \quad \text{28b)}$$

die Erdkapazität der Windung.

Nun müssen wir aber weiter verlangen, daß beim Übergang zur homogenen Wicklung das wesentliche Kennzeichen der Wicklung, nämlich ihre kritische Frequenz, erhalten bleibe. Nach Gl. 22a) bedingt dies, daß die Produkte LK und MC unverändert bleiben. Man muß also

$$K = \frac{K_1}{l_w} \quad \text{28c)}$$

und

$$M = \frac{M_1}{l_w} \quad \text{28d)}$$

setzen, wenn man die Begriffe „Windungskapazität K_1 der Längeneinheit" und „Gegeninduktivität M_1 der Längeneinheit" einführen will.

Mit der Gl. 28c) kann man die physikalische Vorstellung verbinden, daß K_1 durch Reihenschaltung von so vielen Kondensatoren K entstanden ist, als Windungen auf die Längeneinheit gehen; diese Anzahl ist gleich $\frac{1}{l_w}$ (vgl. Abb. 1).

Eine ähnliche, wenn auch nicht ganz so einfache physikalische Deutung läßt sich der Beziehung 28d) geben.

Nach Abschnitt 3 bestimmen die Größen μ_1 und μ_2 die Änderung von Spannung und Strom beim Übergang von einer Windung zur nächsten. Bei der homogenen Wicklung setzen wir

$$\mu_1 = p l_w, \qquad \mu_2 = q l_w. \quad \text{29a)}$$

p und q sind dann die auf die Längeneinheit bezogenen Konstanten der Hyperbel- bzw. Sinusverteilung.

Bezeichnen wir mit $x = n l_w$ den Abstand der n-ten Windung vom Anfang der Wicklung, mit $l = m l_w$ die gesamte Wicklungslänge, so wird

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_1 n = p x & \mu_2 n = q x, \\ \mu_1 m = p l & \mu_2 m = q l. \end{array}\right\} \quad \text{29b)}$$

Für eine unendlich kleine Windungslänge l_w kann man

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{Sin}\,\frac{\mu_1}{2} = \frac{\mu_1}{2} = \frac{1}{2} p l_w, \\ \sin\frac{\mu_2}{2} = \frac{\mu_2}{2} = \frac{1}{2} q l_w \end{array}\right\} \quad \text{29c)}$$

setzen. Hiermit ergibt sich aus 12)

$$(p l_w)^2 \cdot (q l_w)^2 = \frac{LC}{MK} = \frac{L_1 C_1}{M_1 K_1} l_w^4, \quad \text{29d)}$$

sowie ferner aus 20c), d), e):

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{q^2 + \dfrac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}, \\ a_2 = \dfrac{p^2 - \dfrac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}, \\ b = \dfrac{l_w}{2 j \omega L_1} \cdot \dfrac{p^2 q^2}{p^2 + q^2}. \end{array}\right\} \quad \text{30)}$$

Nun können wir mit Hilfe der Gleichungen 20a), 20b) und 23) die Spannungs- und Stromverteilung längs der homogenen Wicklung angeben:

$$\mathsf{V}_x = \mathsf{E}\left[\frac{q^2 + \frac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,p(l-x)}{\mathfrak{Sin}\,pl} + \frac{p^2 - \frac{C_1}{K_1}}{p^2+q^2}\,\frac{\sin q(l-x)}{\sin ql}\right], \quad \ldots \ldots \quad 31\text{a)}$$

$$\mathsf{I}_x = \frac{\mathsf{E}}{j\omega L_1}\cdot\frac{pq}{p^2+q^2}\left[q\frac{\mathfrak{Cof}\,p(l-x)}{\mathfrak{Sin}\,pl} + p\frac{\cos q(l-x)}{\sin ql}\right], \quad \ldots \ldots \quad 31\text{b)}$$

$$\mathsf{J}_x = j\omega K_1 \mathsf{E}\left[\frac{q^2 + \frac{C_1}{K_1}}{p^2+q^2}\,p\,\frac{\mathfrak{Cof}\,p(l-x)}{\mathfrak{Sin}\,pl} + \frac{p^2 - \frac{C_1}{K_1}}{p^2+q^2}\,q\,\frac{\cos q(l-x)}{\sin ql}\right] \ldots \quad 31\text{c)}$$

An Stelle der Gl. 31a) findet **Böhm** den folgenden Ausdruck für die Spannungsverteilung[1]):

$$\mathsf{V}_x = \mathsf{E}\left[\frac{q^2 - \omega^2 L_1 C_1}{p^2+q^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,p(l-x)}{\mathfrak{Sin}\,pl} + \frac{p^2 + \omega^2 L_1 C_1}{p^2+q^2}\,\frac{\sin q(l-x)}{\sin ql}\right] \ldots \quad 31\text{d)}$$

Da für keine einzige Frequenz $-\omega^2 L_1 C_1$ gleich C_1/K_1 sein kann, liefert der **Böhm**sche Ausdruck andere Spannungen als unsere Gleichung 31a). Glücklicherweise sind die Zahlenwerte, wie ein Vergleich der **Böhm**schen Tabelle 2 mit unserer Tafel 1 lehrt, in dem angenommenen Zahlenbeispiel nicht sehr verschieden; die Unterschiede machen sich nur in der Umgebung der kritischen Frequenz bemerkbar. Für diese Frequenz selbst erscheinen a_1 und a_2 miteinander vertauscht; der Grund ist, daß hier $+\omega^2 L_1 C_1 = C_1/K_1$ ist. Diese Gleichung ist nämlich gerade die Bedingung für die kritische Frequenz [Gl. 22b)].

Die grundsätzliche Abweichung der **Böhm**schen Gl. 31d) von unserem Ergebnis [Gl. 31a)] ist durch das Einsetzen einer unrichtigen Grenzbedingung bei **Böhm** entstanden.

Böhm schreibt folgendes[2]):

„Eine weitere Grenzbedingung, die uns die noch fehlenden Beziehungen verschafft, müssen wir in den Verhältnissen an den Enden der Spule suchen. Unsere Differentialgleichungen galten für eine Windung, die innerhalb der Wicklung liegt und von den Nachbarwindungen zu beiden Seiten beeinflußt wird. In Wirklichkeit löst sich nach beiden Seiten hin die Leitung allmählich aus der Verkettung. Auf das Spannungsgesetz innerhalb der ganzen Wicklung wird diese Unstetigkeit an den Wicklungsenden keinen bestimmten Einfluß ausüben können, wohl aber auf die Integrationskonstanten. Für die rechnungsmäßige Erfassung des Einflusses der Wicklungsenden wollen wir annehmen, daß das Drahtende zwar noch in der Spulenfläche liegt, so daß der Einfluß des Eisens und des Dielektrikums der gleiche ist wie für die Wicklung selbst, daß es aber von den nächstliegenden Wicklungsteilen entfernt genug ist, um statisch und magnetisch nicht merkbar beeinflußt zu werden. Für die Wicklungsenden gilt dann die Spannungsgleichung der freien Leitung:"

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Der hierin ausgesprochenen Annahme über das Verhalten der Wicklungsenden kann ich nicht beistimmen. Tatsächlich erfährt auch die allerletzte Windung noch

[1]) Die Stromverteilung ist bei **Böhm** nicht berechnet.

[2]) Archiv f. Elektrot. **5**, S. 406.

eine Beeinflussung durch die Nachbarwindung. Sie ist jedoch insofern vor den übrigen Windungen bevorzugt, als sie nur einen Nachbarn besitzt, während die übrigen deren zwei haben. Wir haben diesen Umstand im Abschnitt 4 durch die Gleichungen 16a) und 16b) zum Ausdruck gebracht. Für die homogene Wicklung hat man

$$V_0 - V_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} l_w,$$

$$I_2 - I_1 = \frac{\partial I}{\partial x} l_w,$$

$$L_1' = L_1 l_w, \qquad M = \frac{M_1}{l_w}$$

zu setzen. Die Gl. 16a) geht dann über in

$$-\frac{\partial V}{\partial x} l_w = j\omega L_1 l_w I + j\omega M_1 \frac{\partial I}{\partial x}.$$

Eine entsprechende Beziehung ergibt sich aus Gl. 16b) für das andere Wicklungsende. Im Grenzfall $l_w = 0$ verschwinden die beiden ersten Glieder. Damit die Beziehung trotzdem erfüllt bleibe, müssen wir

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad 32)$$

setzen. Das ist die richtige Grenzbedingung. Mit ihr gelangt man auch auf dem von Böhm beschrittenen Weg zu der Gleichung 31a) für die Spannungsverteilung.

13. Die einseitig unbegrenzte Wicklung.

Wenn man mittels der vorstehenden Beziehungen verfolgen will, wie sich die Windungsspannungen mit der Frequenz ändern, so wirken die im Abschnitt 10 behandelten Resonanzpunkte störend. Ihre Lage hängt außer von den Konstanten der Wicklung auch noch von der Wicklungslänge ab und steht daher in keiner Beziehung zur kritischen Frequenz.

Die Resonanzerscheinung hängt mit den Wellenreflexionen an den Spulenenden zusammen. Der Vorgang ist der folgende. Vom Anfang der Spule, wo die elektromotorische Kraft wirkt, treten Wellen in die Spule ein. Sie durchlaufen den Spulendraht, werden am anderen Ende reflektiert, laufen dann zum Spulenanfang zurück, werden dort abermals reflektiert, und so fort. Es entsteht so im Laufe der Zeit eine unendliche Kette von Wellen; durch Überlagerung aller ergibt sich der endgültige Schwingungszustand. Nun kann es vorkommen, daß alle Teilwellen in der gleichen Phase schwingen; dann summieren sich ihre Wirkungen, man hat den Fall der Resonanz. Für eine gegebene Spule tritt dieser Fall bei bestimmten Wellenlängen, d. h. bei bestimmten Frequenzen, und bei bestimmten Reflexionsverhältnissen an den Enden ein.

Die vorangehende Betrachtung lehrt, daß es auf einer einseitig unbegrenzten Spule ($l = \infty$) keine Resonanzpunkte gibt; denn auf einer solchen Spule verliert sich die am Spulenanfang eintretende Welle ins Unendliche, ohne jemals (z. B. durch Reflexion) zurückzukehren.

Die wirklichen Spulen sind allerdings begrenzt. Bei höheren Frequenzen wird aber die eindringende Welle infolge von Energieverlusten verschiedener Art stets stark gedämpft; sie kommt deshalb am anderen Spulenende bereits so geschwächt an, daß

die reflektierte Welle keine merkliche Rolle mehr spielt. Es bilden sich also auch keine nennenswerten Resonanzen aus. Daher erscheint es gerechtfertigt, beim Studium der Spannungsverteilung von den Resonanzpunkten abzusehen und die Spule als einseitig unbegrenzt zu betrachten.

Der Wellenverlauf wird ebenso wie auf der begrenzten Spule durch die in den Abschnitten 2 und 3 aufgestellten allgemeinen Beziehungen beherrscht. Von den vier Werten von μ, die die Gl. 6) liefert, kommen für den vorliegenden Fall aber nur die beiden Werte $-\mu_1$ und $-j\mu_2$ in Betracht. Denn sie allein bedeuten Wellen, die vom Spulenanfang, d. h. von dem Sitz der elektromotorischen Kraft ausgehen, während $+\mu_1$ und $+j\mu_2$ Wellen ergeben würden, die, aus dem Unendlichen herkommend, dem Spulenanfang zuwandern. Wellen der letzteren Art können hier nicht auftreten. Daher sind in den Gleichungen 13a) und 13b) die Konstanten $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_3$ gleich null zu setzen, so daß die Ansätze für die Spannungs- und Stromverteilung hier lauten:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= \mathbf{A}_2 e^{-\mu_1 n} + \mathbf{A}_4 e^{-j\mu_2 n}, \\ \mathbf{I}_n &= \mathbf{B}_2 e^{-\mu_1 n} + \mathbf{B}_4 e^{-j\mu_2 n}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

Die Beziehungen 14) zwischen den Konstanten $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{B}_2$ bzw. $\mathbf{A}_4$ und $\mathbf{B}_4$ bleiben bestehen.

Grenzbedingungen sind nur durch den Spulenanfang vorgeschrieben. Die Bedingung

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34a)$$

drückt aus, daß die Spannung am Anfang der ersten Windung gleich der aufgedrückten elektromotorischen Kraft ist. Die zweite Bedingung [Gl. 16a)] enthält das Induktionsgesetz für die erste Windung:

$$\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1 = j\omega L \mathbf{I}_1 + j\omega M (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34b)$$

Durch diese Gleichung ist berücksichtigt, daß die erste Windung, im Gegensatz zu allen übrigen, nur einseitig induktiv beeinflußt wird.

Führt man die Bedingungen 34a), 34b) und die Beziehungen 14) in den Ansatz 33) ein, so erhält man Gleichungen, aus denen man die Konstanten $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{B}_2$ und $\mathbf{B}_4$ berechnen kann. Das Ergebnis der Rechnung ist [vgl. auch 20c), d), e)]:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{E}\,\frac{\sin^2\frac{\mu_2}{2} + \frac{C}{4K}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}} = a_1 \mathbf{E}, \\ \mathbf{A}_4 &= \mathbf{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} - \frac{C}{4K}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}} = a_2 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{2\mathbf{E}}{j\omega L}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{\frac{\mu_1}{2}}}{\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}} = \mathbf{E}\,b\,\frac{e^{\frac{\mu_1}{2}}}{\mathfrak{Sin}\frac{\mu_1}{2}}, \\ \mathbf{B}_4 &= \frac{2\mathbf{E}}{\omega L}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2}\sin^2\frac{\mu_2}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\mu_1}{2} + \sin^2\frac{\mu_2}{2}}\cdot\frac{e^{j\frac{\mu_2}{2}}}{\sin\frac{\mu_2}{2}} = j\mathbf{E}\,b\,\frac{e^{j\frac{\mu_2}{2}}}{\sin\frac{\mu_2}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

14. Das Spannungsgefälle in der Wicklung.

An Hand der Gleichungen 33) und 35) bietet es keine Schwierigkeit, zu berechnen, wie sich die Spannung in einer Wicklung von gegebenen Eigenschaften beim Eindringen einer periodischen Welle verteilt. Betrachtungen von allgemeiner Art lassen sich aber bequemer durchführen, wenn man zuvor auf den Idealfall der homogenen Spule übergeht. Dies geschieht auf dem im Abschnitt 12 erörterten Wege. Mittels der dort entwickelten Beziehungen erhält man die folgenden Ausdrücke für die Spannungs- und Stromverteilung:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{E}\,\frac{q^2 + \frac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}\,e^{-px} + \mathbf{E}\,\frac{p^2 - \frac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}\,e^{-jqx}, \quad \ldots \ldots \quad 36a)$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{E}}{j\omega L_1}\,\frac{pq}{p^2 + q^2}\left[q e^{-px} + j p e^{-jqx}\right] \quad \ldots \ldots \quad 36b)$$

Aus 36a) berechnen wir nunmehr das Spannungsgefälle in der Wicklung:

$$\mathfrak{g} = -\frac{d\mathbf{V}_x}{dx} = p\,\mathbf{E}_1 e^{-px} + j q\,\mathbf{E}_2 e^{-jqx} \quad \ldots \ldots \quad 37)$$

mit

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}\,\frac{q^2 + \frac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2}; \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}\,\frac{p^2 - \frac{C_1}{K_1}}{p^2 + q^2} \quad \ldots \ldots \quad 37a)$$

Das Gefälle am Anfang der Wicklung $(x = 0)$ ergibt sich aus 37) zu

$$\mathfrak{g}_0 = p\,\mathbf{E}_1 + j q\,\mathbf{E}_2 \quad \ldots \ldots \quad 37b)$$

Dies ist eine Gleichung zwischen Vektoren; der Betrag des Spannungsgefälles ist

$$g_0 = |\mathfrak{g}_0| = \sqrt{p^2 E_1^2 + q^2 E_2^2} = E\sqrt{\frac{p^2 q^2 + \left(\frac{C_1}{K_1}\right)^2}{p^2 + q^2}}$$

oder, mit Rücksicht auf die Beziehungen in Abschnitt 3 und 12,

$$g_0 = \frac{E\omega\sqrt{\frac{C_1}{K_1}(C_1 M_1 + L_1 K_1)}}{\sqrt[4]{[(L_1 K_1 - C_1 M_1)\,\omega^2 - 1]^2 + 4\,L_1 C_1 M_1 K_1\,\omega^4}} \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

Wie wir bereits im Abschnitt 8 gesehen haben, kann man $C_1 M_1 = CM$ neben $L_1 K_1 = LK$ vernachlässigen. Der Ausdruck für das Spannungsgefälle vereinfacht sich dann wie folgt:

$$g_0 = \frac{E\omega\sqrt{L_1 C_1}}{\sqrt[4]{(L_1 K_1\,\omega^2 - 1)^2 + 4\,L_1 C_1 M_1 K_1\,\omega^4}} \quad \ldots \ldots \quad 38a)$$

Denselben Ausdruck hat Böhm erhalten[1]). Er zieht daraus die sehr bemerkenswerte und für die Praxis wichtige Folgerung, daß das Spannungsgefälle g_0 am Anfang der Wicklung bei der kritischen Frequenz ein ausgesprochenes Resonanzmaximum hat. Für die kritische Frequenz verschwindet nämlich im Nenner von 38a) das erste Glied,

[1]) Der genaue Ausdruck 38) weicht von der entsprechenden, aus den Böhmschen Formeln zu ermittelnden Beziehung ab, und zwar aus den im Abschnitt 12 auseinandergesetzten Gründen.

das sonst das zweite Glied an Stärke erheblich übertrifft. Das höchste Spannungsgefälle beträgt

$$g_{0\,max} = E \sqrt[4]{\frac{L_1 C_1}{4 M_1 K_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 39)$$

Es wird um so höher, je kleiner M_1 ist. Es empfiehlt sich, in 39) an Stelle der Konstanten für die Längeneinheit der Wicklung die Konstanten für die einzelne Windung und die Windungslänge l_w einzuführen. Hierzu dienen die Gl. 28a) bis 28d). Man erhält

$$g_{0\,max} = \frac{E}{l_w} \sqrt[4]{\frac{LC}{4MK}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 39a)$$

Für die im Abschnitt 7 angegebene Wicklung ergibt sich der Zahlenwert

$$g_{0\,max} = \frac{E}{7{,}11\, l_w},$$

d. h. das Gefälle am Anfang der Wicklung ist so hoch, als ob sich die gesamte Spannung E auf die ersten 7 Windungen verteilte.

Für die Frequenzen, die erheblich über der kritischen liegen, kann man in Gl. 37b) das zweite Glied rechts vernachlässigen; ferner ist $E_1 = E$, daher

$$g_0 = pE = \frac{p l_w}{l_w} E = \frac{2\, \mathfrak{Sin}\, \frac{\mu_1}{2}}{l_w} \cdot E.$$

Der Tafel 1 entnimmt man $\mathfrak{Sin}\, \frac{\mu_1}{2} \approx 0{,}008$, womit sich

$$g_0 = \frac{E}{62{,}5\, l_w}$$

ergibt. Diese Beanspruchung beträgt nur den 9-ten Teil von derjenigen bei der kritischen Frequenz.

Mit dem Eindringen der Welle in die Wicklung verändert sich die Beanspruchung gemäß der Gl. 37). An einer Transformatorwicklung hat Böhm das Eindringen von periodischen Wellen experimentell untersucht und eine Reihe von Kurven mitgeteilt, an denen sich der Vorgang sehr hübsch verfolgen läßt. In Abb. 4 bis 7 sind einige Kurven aus der Arbeit Böhms wiedergegeben[1]).

An den Kurven a (Spannung der Wicklungspunkte gegen den Wicklungsanfang) erkennt man die Überlagerung des hyperbolischen und des sinusförmigen Gliedes in der Spannungsverteilung[2]). Man sieht weiter, wie die Wellenlänge λ_w und auch die Amplitude des Sinusgliedes mit abnehmender Frequenz wächst.

Die Kurve c des Spannungsgefälles g zeichnet sich dadurch aus, daß sie ihren Höchstwert nicht am Anfang der Wicklung erreicht, sondern daß sie ein Maximum besitzt, das um so weiter ins Innere rückt, je kleiner die Frequenz ist. Böhm meint,

---

[1]) Böhm, a. a. O. Abb. 51, 53, 54, 55. In der Böhmschen Arbeit sind die Abb. 51 und 52 offenbar miteinander vertauscht.

[2]) Bei diesen Versuchen machten sich das hyperbolische und das sinusförmige Spannungsglied in dem ganzen Frequenzbereich $1{,}85 \cdot 10^5$ bis $5{,}50 \cdot 10^5$ Hertz nebeneinander bemerkbar, während sie nach dem Böhmschen Zahlenbeispiel (s. Tafel 1) nur in der unmittelbaren Umgebung der kritischen Frequenz in vergleichbarer Stärke auftreten. Es liegt vermutlich daran, daß die Erdkapazität C im Vergleich zu K beträchtlich unterschätzt ist. In dem gleichen Sinne wirkt die Gegeninduktion der zweiten, dritten usw. Nachbarwindung.

daß diese Erscheinung durch das Rechnungsergebnis nicht geklärt sei. Ich will zeigen, daß eine Erklärung doch gegeben werden kann.

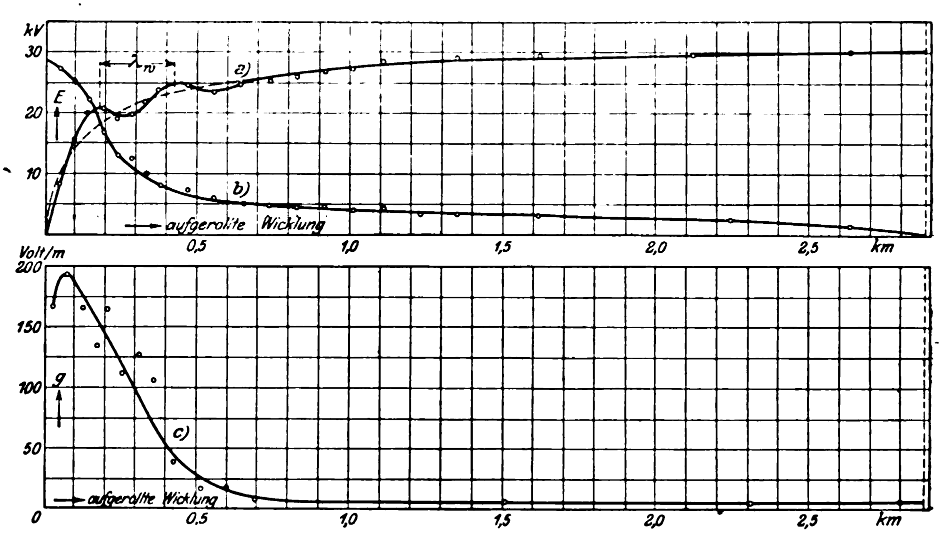


Abb. 4. Frequenz: $4{,}46 \cdot 10^5$ Hertz. Innere Wellenlänge: $\lambda_w = 0{,}240$ km.

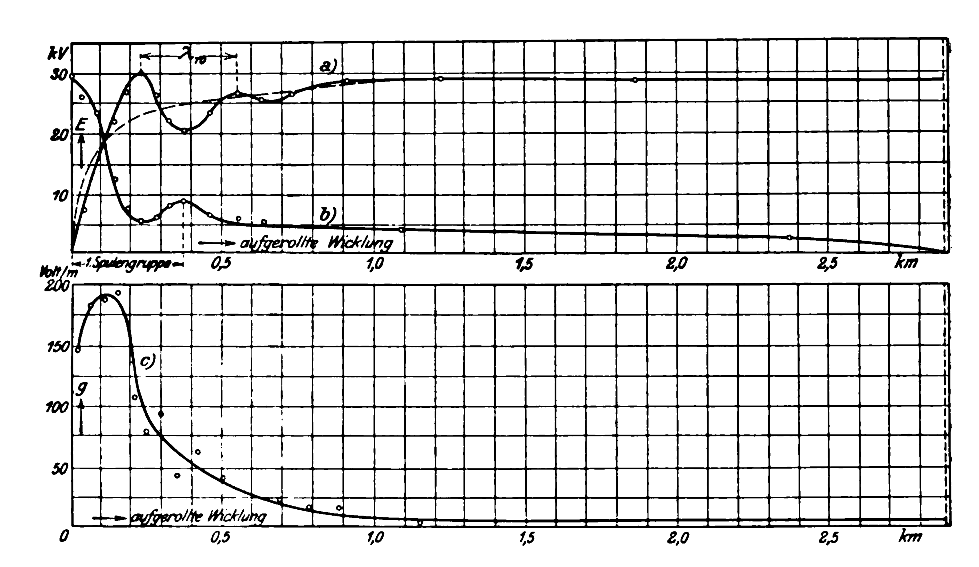


Abb. 5. Frequenz: $3{,}56 \cdot 10^5$ Hertz. Innere Wellenlänge: $\lambda_w = 0{,}320$ km.

Abb. 4 und 5. Spannungsverteilung in der Wicklung eines Lufttransformators beim Eindringen von Sinuswellen.

Kurve a: Spannung der Wicklungspunkte gegen den Wicklungsanfang.
Kurve b: Spannung der Wicklungspunkte gegen das Wicklungsende.
Kurve c: Spannungsgefälle.

Wir wollen zu dem Zwecke die beiden Glieder, aus denen sich gemäß der Gl. 37) das Spannungsgefälle zusammensetzt, durch ein Vektordiagramm veranschaulichen (Abb. 8). Das erste Glied

$$p E_1 e^{-px}$$

ist stets reell und wird daher durch einen Vektor in Richtung OB dargestellt, dessen Stärke mit der zunehmenden Eindringtiefe nach der Funktion e^{-px} abnimmt.

Das zweite Glied

$$j q \mathbf{E}_2 e^{-j q x}$$

bedeutet einen Vektor mit der konstanten Stärke $q E_2$, der aber seine Richtung (seine Phase) nach der Funktion $e^{-j q x}$ ändert. Sein Endpunkt bewegt sich auf einem Kreise

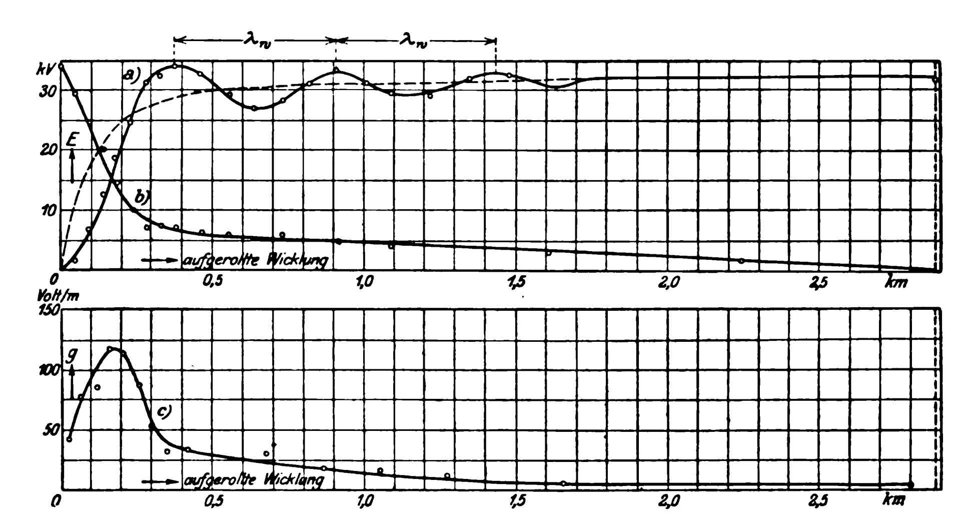


Abb. 6. Frequenz: $2{,}36 \cdot 10^5$ Hertz. Innere Wellenlänge: $\lambda_w = 0{,}530$ km.

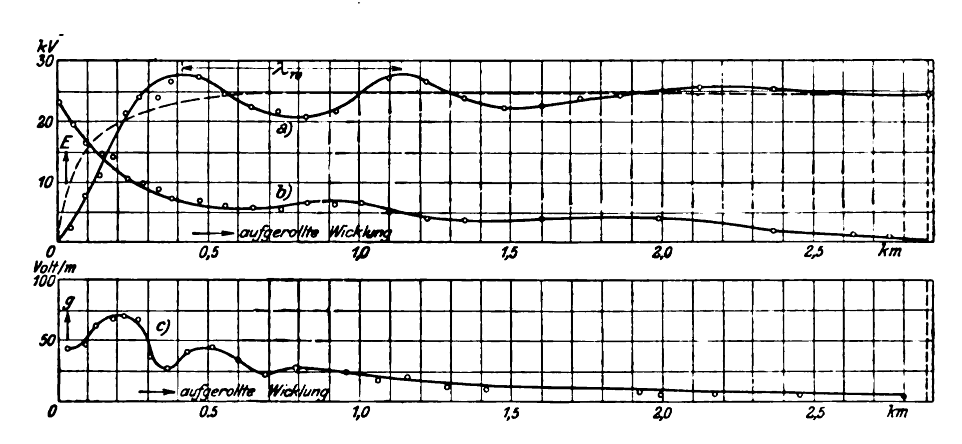


Abb. 7. Frequenz: $1{,}85 \cdot 10^5$ Hertz. Innere Wellenlänge: $\lambda_w = 0{,}720$ km.

Abb. 6 und 7. Spannungsverteilung in der Wicklung eines Lufttransformators beim Eindringen von Sinuswellen.

Kurve a: Spannung der Wicklungspunkte gegen den Wicklungsanfang.
Kurve b: Spannung der Wicklungspunkte gegen das Wicklungsende.
Kurve c: Spannungsgefälle.

vom Radius $r = q E_2$. Im Anfangspunkt der Wicklung $x = 0$ ist der Vektor gleich $j q \mathbf{E}_2$, d. h. er eilt dem Vektor

$$OB = p \mathbf{E}_1$$

in der Phase um 90^0 voraus und ist in der Zeichnung durch den Vektor

$$OA = j q \mathbf{E}_2$$

darzustellen. Der resultierende Vektor OC bedeutet dann das Spannungsgefälle g_0 am Anfang der Wicklung.

Je weiter die Welle in die Wicklung eindringt, um so mehr bleibt das zweite Glied des Spannungsgefälles in der Phase hinter seinem Anfangswert OA zurück. Im Abstand einer Viertelwellenlänge $\left(\frac{1}{4}\lambda_w = \frac{\pi}{2q}\right)$ vom Wicklungsanfang ist der Vektor des zweiten Gliedes in die Lage OA_1 gelangt, liegt also nunmehr in Phase mit dem ersten Glied. Dieses hat von OB auf den kleineren Wert $OB_1 = OBe^{-px} = OBe^{-\frac{1}{4}p\lambda_w}$ abgenommen. Das Spannungsgefälle hat den Wert

$$\mathfrak{g} = OA_1 + OB_1 = OC_1,$$

der den Anfangswert $\mathfrak{g}_0 = OC$ übersteigen kann. Wenn die Funktion e^{-px} langsam abnimmt, so können beim weiteren Eindringen der Welle in die Wicklung noch mehrere Maxima und Minima des Spannungsgefälles erscheinen, was in dem Fall der Abb. 7 tatsächlich beobachtet worden ist. Eine weitere Stütze für die vorgetragene

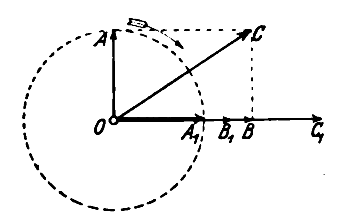


Abb. 8. Vektoren des Spannungsgefälles in der Wicklung.

Auffassung ist der Umstand, daß die in den Versuchen nach Abb. 4 bis 7 beobachteten ersten Maxima des Spannungsgefälles ziemlich genau im Abstand von einer Viertelwellenlänge vom Wicklungsanfang auftreten, wie man es nach dem vorstehenden Erklärungsversuch zu erwarten hat.

15. Zusammenfassung.

Um die Beanspruchung einer Spule, z. B. einer Transformatorwicklung, durch eindringende elektrische Wellen beurteilen zu können, muß man wissen, wie sich die Wellen in der Spule ausbreiten. Die Wellenausbreitung ist eine andere als in einem gerade ausgestreckten Draht, weil in der Wicklung noch eine gegenseitige kapazitive und induktive Einwirkung benachbarter Elemente aufeinander stattfindet. In den früheren Arbeiten des Verfassers wurde die kapazitive Beeinflussung exakt, die induktive Beeinflussung näherungsweise berücksichtigt. Vernachlässigt war derjenige Anteil der Gegeninduktion, der von dem Unterschied der Ströme in benachbarten Elementen herrührt.

Kürzlich ist eine Arbeit von O. Böhm erschienen, in der auch die Gegeninduktion zwischen benachbarten Windungen genau berücksichtigt wird. Da Böhm die Ansicht vertritt, daß durch diese Korrektur der Ausbreitungsvorgang unter Umständen wesentlich verändert wird, erschien es nützlich, einen Vergleich mit den früheren Rechnungsergebnissen zu machen. Leider ist der Vergleich an Hand der Böhmschen Arbeit nicht durchführbar, da die Endformeln bei Böhm infolge eines Versehens im Ansatz teilweise entstellt sind.



In der vorliegenden Arbeit ist deshalb das Problem nochmals aufgenommen worden. Es werden zuerst die Vorgänge beim Eindringen einer periodischen Welle in eine Spule mit endlicher Windungszahl klargestellt. Dann wird an einem aus der Böhmschen Arbeit entnommenen Zahlenbeispiel gezeigt, daß man praktisch denselben Ausbreitungsvorgang erhält, einerlei, ob man die Gegeninduktivität nach Böhm exakt oder nach dem früheren summarischen Verfahren angenähert in Rechnung setzt.

Um den Vergleich mit den Böhmschen Berechnungen zu erleichtern, wird der Übergang zu dem Idealfall der homogenen Spule (mit stetig verteilten elektrischen Konstanten und unendlich vielen Windungen) vollzogen. Es ergibt sich dann, daß bei Böhm ein Irrtum im Ansatz der Grenzbedingungen vorliegt.

Ein besonderer Abschnitt der vorliegenden Arbeit handelt von der Berechnung der Resonanzfrequenzen bzw. Eigenfrequenzen der Spule.

Zum Schluß wird die Ausbreitung von Wellen in einer einseitig begrenzten Spule untersucht und das Spannungsgefälle beim Eindringen periodischer Wellen berechnet. Die Rechnungsergebnisse werden mit den Beobachtungen Böhms verglichen, wobei es gelingt, gewisse, bisher unerklärte Beobachtungen physikalisch zu begründen.

Nach der bereits geschilderten Vorgeschichte des hier behandelten Problems wird man nicht erwarten, daß die vorliegende Arbeit wesentlich neue physikalische Tatsachen bringt. Sie dient mehr der eingehenderen theoretischen Begründung von Erscheinungen, die zum größten Teil bereits bekannt waren. Die Mehrzahl der mitgeteilten Formeln ist neu; mit ihrer Hilfe kann man die Vorgänge beim Eindringen von Wellen in Spulen genauer als bisher rechnerisch verfolgen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier noch einmal kurz die eigenartigen physikalischen Eigenschaften von Spulen gegenüber periodischen Wellen zusammenzustellen. In Klammern ist der Autor beigefügt, der die betreffende Tatsache zuerst erkannt oder erklärt hat.

1. Das wichtigste Kennzeichen einer Spule ist das Vorhandensein einer sogenannten kritischen Frequenz. Wellen von niedrigerer Frequenz läßt die Spule im wesentlichen ungeschwächt durch, während sie Wellen, deren Frequenz oberhalb der kritischen liegt, kaum eindringen läßt (Rüdenberg). Die kritische Frequenz ist sehr angenähert gleich der Eigenfrequenz einer Windung (Wagner).

2. Unterhalb der kritischen Frequenz findet die Stromleitung fast ausschließlich durch den Leitungsdraht, oberhalb der kritischen Frequenz dagegen hauptsächlich quer durch die Isolation von Windung zu Windung statt (Steinmetz, Böhm).

3. Die eindringende Welle spaltet sich in zwei Teile, von denen nur einer als wirkliche Welle in die Wicklung einläuft, während der zweite eine hyperbolische (aperiodisch fallende) Spannungs- und Stromverteilung hervorbringt. Unterhalb der kritischen Frequenz überwiegt das erste, oberhalb das zweite Glied (Böhm). Oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz verwandelt sich auch das Wellenglied in ein hyperbolisches Glied. Die Grenzfrequenz liegt meist über der kritischen Frequenz; sie rückt um so dichter an sie heran, je kleiner die Wicklungskonstante M (d. i. die von den Stromunterschieden in den Nachbarwindungen herrührende Gegeninduktivität) ist (Wagner).

4. Resonanz tritt ein, wenn die aufgedrückte Frequenz gleich einer der Eigenfrequenzen der Wicklung ist. Ihre Anzahl ist gleich der Windungszahl. Die Eigenfrequenzen liegen zwischen Null und der Grenzfrequenz; sie verteilen sich aber nicht gleichmäßig über diesen Bereich, sondern häufen sich in der Umgebung der Grenzfrequenz (Wagner).



5. Das Spannungsgefälle am Anfang der Wicklung erreicht ein ausgesprochenes Maximum, wenn die Schwingungsfrequenz der eindringenden Welle mit der kritischen Frequenz der Wicklung übereinstimmt (Böhm).

6. Für eindringende periodische Wellen tritt die höchste Windungsspannung nicht am Anfang der Wicklung, sondern in einem Punkt im Innern ein, der vom Anfang um etwa eine Viertelwellenlänge entfernt liegt (Böhm, Wagner).



Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 10. Heft. 1918.

Wirbelstromverluste in massiven Ankerleitern bei Leerlauf.

Von

Ludwig Dreyfus, Berlin.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Ein beträchtlicher Teil der Verluste, die gewöhnlich unter dem Sammelbegriff der Eisenverluste passieren, hat in Wirklichkeit seinen Sitz in den Nutenleitern. Schon bei Leerlauf ist das Nutenquerfeld hochgesättigter Anker stark entwickelt und seine Verteilung längs des Ankerumfanges ist reich an höheren Harmonischen. Beides ist der Erzeugung starker Wirbelstromverluste in den Ankerleitern günstig. So ist es denn auch oft geradezu die Rücksicht auf diese Wirbelstromverluste, nicht etwa auf den Magnetisierungsstrom oder die Magnetisierungsleistung, welche die obere wirtschaftliche Grenze der Zahnsättigung bestimmt.

Die Theorie des Nutenquerfeldes in unbelasteten Ankern habe ich in einer früheren Arbeit[1]) entwickelt. Der vorliegende Aufsatz befaßt sich mit einer Berechnung der Wirbelstromleistung. Allerdings kann ich dabei ebensowenig wie in dem zitierten Aufsatze die Rückwirkung der Wirbelströmung auf die Zahnsättigung exakt berücksichtigen. Dessen bedarf es aber auch nicht, solange man sich nicht zu unvernünftig hohen Leiterquerschnitten verirrt, wie sie für die Praxis heute ein überwundener Standpunkt sind. Man weiß, daß sie bei Leerlauf und Belastung zu starken Wirbelströmen führen, und man hat gelernt, sie durch Unterteilung und Verschränkung der Leiter zu vermeiden.

I. Das Nutenquerfeld bei Stillstand.

Ich spreche im folgenden stets schlechtweg von einem „Nutenquerfeld". Was ich damit meine, ist der Mittelwert, den die Tangentialkomponente des Nutenfeldes in irgendeiner Nuttiefe y über die Nutweite n besitzt. Die radiale Komponente ist zwar bei großen Zahnsättigungen gleichfalls nicht unerheblich. Doch bringt sie bei

[1]) Dreyfus, Die Berechnung des Nutenquerfeldes in unbelasteten Dynamoankern. Archiv f. Elektrot. Bd. 6, S. 165.



vernünftig dimensionierten Maschinen keine nennenswerten Wirbelstromverluste hervor und hat daher für die vorliegende Untersuchung wenig Interesse. Ich beschränke mich also auf das Nutenquerfeld und will zuerst über seine Eigentümlichkeiten so viel mitteilen, daß man wenigstens für die gebräuchlichsten Fälle des Maschinenbaues[1]) die Verlustrechnung ohne Heranziehung der ausführlicheren Arbeit durchführen kann. Ich werde mich auch an diese gar nicht in allen Punkten anlehnen, vielmehr ein gut Teil der wissenschaftlichen Strenge zugunsten der Kürze und Handlichkeit aufgeben. So kommt es, daß viele der dort schon beschriebenen Resultate in ganz neuem Gewande erscheinen, was ihnen — so hoffe ich — ihren Weg in die Praxis erleichtern wird.

Die ganze Ausbildung des Nutenquerfeldes wird durch zwei Einflüsse geregelt:

1. Die Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke längs des Ankerumfanges.
2. Die Veränderlichkeit der Zahnfeldstärke zwischen Krone und Wurzel.

Daher müssen wir zunächst diese beiden Punkte klarstellen, und ich beginne mit der Bestimmung der maximalen Zahnsättigung ($B_{z\,max}$, $H_{z\,max}$) längs einer halben Polteilung. Ich rechne dabei die totale Nuttiefe h_{tot} vom Nutboden bis zum Abstande $\frac{n}{2}$ vom Luftspalt (Abb. 2). Denn weiter oberhalb stört bei halbgeschlossenen Nuten die Verschmälerung der Nut, bei offenen Nuten die Konzentration der Kraftlinien an der Zahnkrone den gleichmäßigen Verlauf des Feldes. Auch reichen die Nutleiter ja nur in ganz seltenen Fällen höher hinauf.

A. Bestimmung des Trapezes der Zahnfeldstärke $H_{z\,max}$.

Um die Verteilung von $B_{z\,max}$ und $H_{z\,max}$ unter Vernachlässigung des Nutenquerfeldes bestimmen zu können, muß neben der magnetischen Charakteristik des Anker-

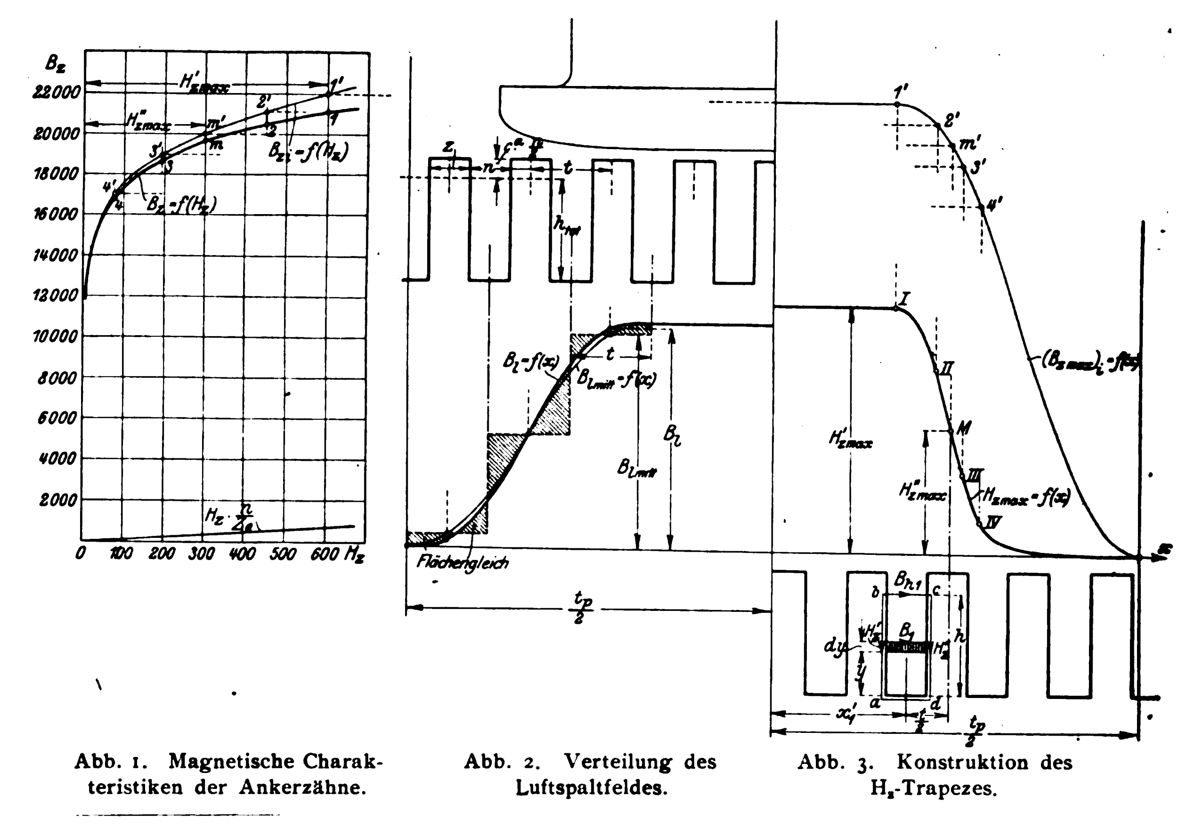


Abb. 1. Magnetische Charakteristiken der Ankerzähne.

Abb. 2. Verteilung des Luftspaltfeldes.

Abb. 3. Konstruktion des H_z-Trapezes.

[1]) Vgl. Fußnote Seite 331.

eisens (Abb. 1) auch die Verteilung des Hauptfeldes über dem Ankerumfang (Abb. 2) gegeben sein. Dann läßt sich folgendes Verfahren anwenden:

a) Besitzt ein Zahn im engsten Querschnitt die Feldstärke $H_{z\,max}$, so führt die entsprechende Zahnteilung t (d. h. der Zahn mit den beiden angrenzenden Nuthälften) pro cm Ankerlänge einen Flux:

$$\frac{N_t}{cm} = B_{z\,max}\, z_{e\,min} + H_{z\,max}\, n_l = (B_{z\,max})_l\, z_{e\,min}\,^{1)} \quad \text{1)}$$

Daraus folgt die ideelle Zahninduktion:

$$(B_{z\,max})_l = B_{z\,max} + H_{z\,max} \frac{n_l}{z_{e\,min}}, \quad \text{1a)}$$

welche, wie in Abb. 1, ebenfalls als Funktion der Zahnfeldstärke aufzutragen ist.

b) Andererseits ist die ideelle Zahninduktion aber auch durch die Kurve der Luftfeldverteilung über dem Ankerumfang gegeben. Denn dieser Kurve entnimmt man zuerst den Mittelwert des Luftfeldes über einer Zahnteilung $B_{l\,mitt}$ und berechnet daraus:

$$(B_{z\,max})_l = B_{l\,mitt} \cdot \frac{t}{z_{e\,min}} \quad \text{1b)}$$

Auf diese Weise findet man die Kurve $(B_{z\,max})_l = f(x)$ der Abb. 3 und erhält mit Hilfe der Kurve $B_{z\,l} = f(H_z)$ des Diagrammes 1 auch die Verteilung der maximalen Zahnfeldstärke längs des Ankerumfanges: $H_{z\,max} = f(x)$ (Abb. 3). Man sieht, auch die letzte Kurve gleicht wie die Luftfeldverteilung einem Trapez; aber seine parallelen Seiten sind kürzer und der Abfall seiner Schenkel wesentlich schroffer.

Die Erfahrung zeigt, daß auch für die minimale Zahnfeldstärke $H_{z\,min}$ ein Trapez mit gleichen parallelen Seiten erhalten wird. Hier genügt daher schon die Bestimmung eines Punktes unter der Polmitte.

B. Interpolation der Sättigungskurve durch eine Gerade.

Wenn wir die jetzt gefundenen Werte von $B_{z\,max}$ und $B_{z\,min}$ auf die Magnetisierungskurve übertragen, so sind drei Fälle möglich:

1. Bei unveränderlichen Zahnquerschnitten ist überhaupt

$$B'_{z\,max} = B'_{z\,min} = B'_z.$$

Dann definieren wir eine wichtige Hilfsgröße — die „effektive Eisenpermeabilität" μ' — durch die Tangente an die Sättigungskurve in diesem Punkte

$$\mu' = \frac{dB'_z}{dH'_z} = \operatorname{tg} \delta' \text{ (siehe Abb. 4)}. \quad \text{2)}$$

2. Sind statt dessen die Zahnflansche nur ganz wenig gegeneinander geneigt, dann liegen $B_{z\,max}$ und $B_{z\,min}$ auf der Sättigungskurve immer noch so nahe zusammen, daß zwischen diesen Grenzen eine Interpolationsgerade die Sättigungskurve vertreten kann. Wir bilden dann die effektive Eisenpermeabilität im Anschluß an Abb. 5 aus:

---

[1]) Bei isolierten Ankerblechen beträgt die effektive Zahnstärke z_e etwa 90 bis 95% der wirklichen Zahnstärke z. Außerdem ist die magnetische Entwertung der Randschichten infolge der Stanzarbeit durch einen konstanten Abzug von der geometrischen Zahnstärke zu berücksichtigen. — Die effektive Nutbreite ist für das Längsfeld streng genommen größer als für das Querfeld, da auch die Papierisolation zwischen den Zahnlamellen ein Längsfeld leitet. Man setzt daher genauer

$$n_l = n + \frac{p}{100} \cdot z_{mitt},$$

wobei $p = 5 \sim 10$ den prozentualen Raumverlust durch die Blechisolation und z_{mitt} die mittlere Zahnfeldstärke über der reduzierten Nuttiefe [siehe Gl. 4)] bezeichnet. Unter Umständen ist auch noch ein Zuschlag für Ventilationsschlitze anzubringen.



$$\mu' = \frac{B'_{z\,max} - B'_{z\,min}}{H'_{z\,max} - H'_{z\,min}} = \operatorname{tg} \delta' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

oder auch mit Einführung der neuen Hilfsgröße $\overline{H}'$

$$\mu' = \frac{B'_{z\,max}}{H'_{z\,max} + \overline{H}'} = \frac{B'_{z\,min}}{H'_{z\,min} + \overline{H}'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3a)$$

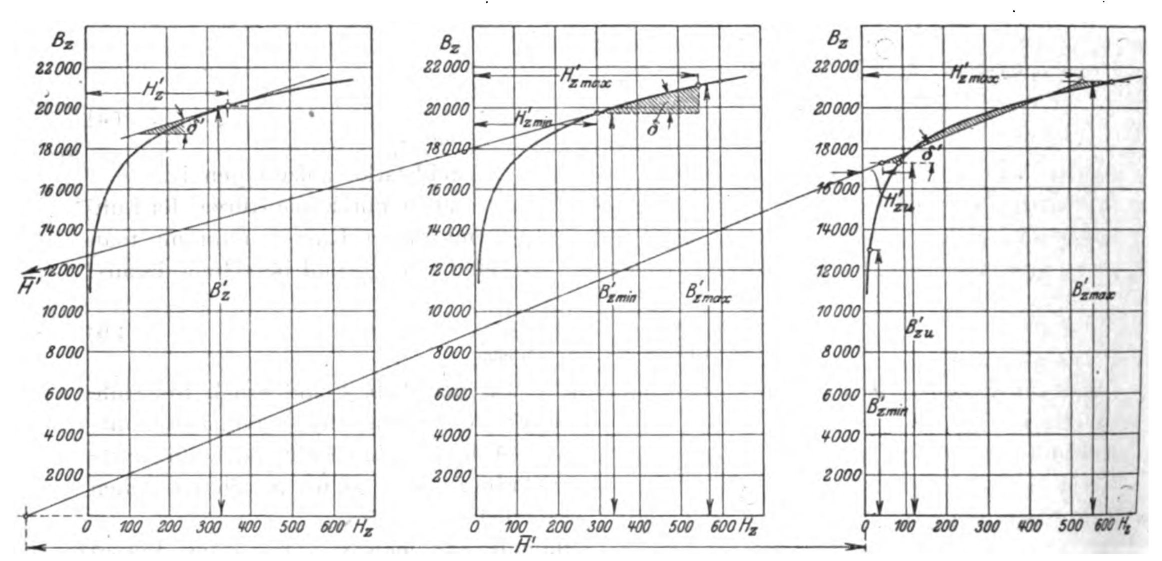


Abb. 4. Zahnbreite konstant. Abb. 5. Zahnbreite wenig veränderlich. Abb. 6. Zahnbreite stark veränderlich.

Interpolation der Sättigungskurve und „effektive Permeabilität“ $\mu' = \operatorname{tg} \delta'$.

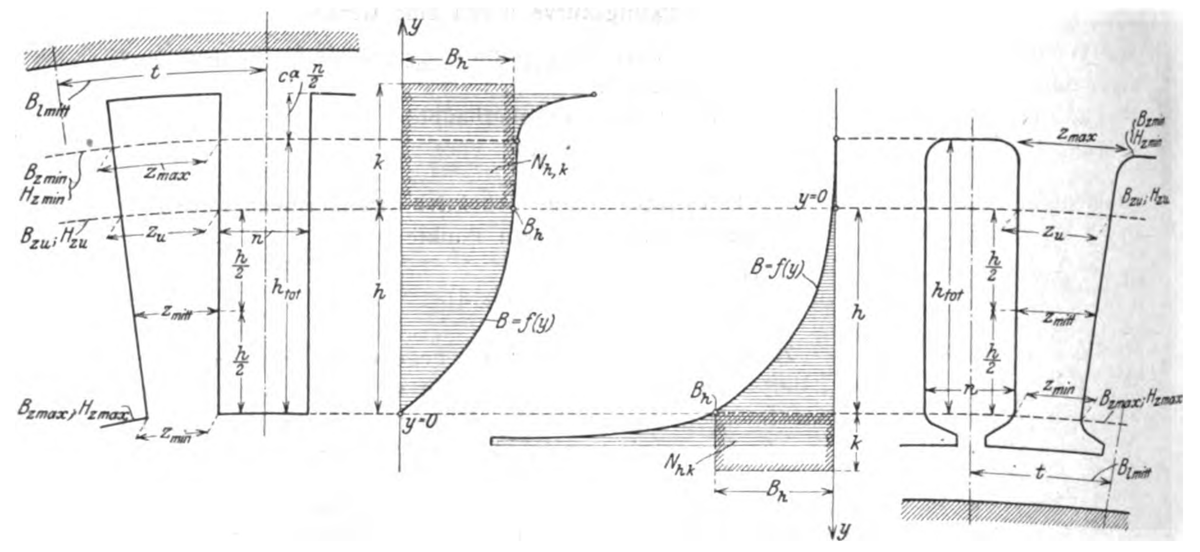


Abb. 7. Außenpolmaschine. Abb. 8. Innenpolmaschine.

Querfeldverteilung innerhalb der Nut. Berücksichtigung des Querflusses N_{hk} im oberen Nutraum durch die ideelle Nutverlängerung k....... $\frac{N_{hk}}{cm} = B_h \cdot k$.

3. In den meisten Fällen ist jedoch die Verjüngung der Zähne so stark, daß $B'_{z\,min}$ weit unter das Knie der magnetischen Charakteristik sinkt. Da man aber die Sättigungskurve höchstens bis zu einer unteren Grenze B'_{zu} bzw. H'_{zu} (Abb. 6) durch eine



Gerade interpolieren kann, so bleibt nichts übrig, als die Untersuchung des Nutenfeldes nur über die reduzierte Nuttiefe

$$h = h_{tot} \cdot \frac{\frac{B'_{z\,max}}{B'_{z\,u}} \cdot \frac{B'_{l\,mitt} - H'_{z\,u}\frac{n}{t}}{B'_{l\,mitt} - H'_{z\,max}\frac{n}{t}} - 1}{\frac{B'_{z\,max}}{B'_{z\,min}} \cdot \frac{B'_{l\,mitt} - H'_{z\,min}\frac{n}{t}}{B'_{l\,mitt} - H'_{z\,max}\frac{n}{t}} - 1} = h_{tot} \cdot \frac{z_{eu} - z_{e\,min}}{z_{e\,max} - z_{e\,min}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

zu erstrecken. Abb. 7 und 8 illustrieren diese Verhältnisse für Außen- und Innenpolmaschinen. Wie man sieht, sind jenseits der reduzierten Nuttiefe die Zahnsättigungen schon so klein, daß sich die Induktion des Querfeldes gegenüber ihrem Endwert kaum mehr ändern kann.

C. Die Verteilung des Querfeldes innerhalb der Nut.

Die Interpolation der magnetischen Charakteristik durch eine Gerade wird zu einer zwingenden Notwendigkeit, sowie die Entlastung der Zähne durch das Nutenquerfeld berechnet werden soll. Soweit sind wir nun freilich noch nicht. Wir können aber von der Sättigungsgeraden auch jetzt schon mit Vorteil Gebrauch machen, um zunächst einmal ohne Berücksichtigung dieser Rückwirkung (Index 0) der Größe und Verteilung des Querfeldes innerhalb der Nut nachzugehen. Und wenn auch diese Untersuchung für die Größe des Nutenquerfeldes nur eine nie erreichbare obere Grenze $(B_h)_0$ liefert, so kann doch späterhin die errechnete Verteilung des Querfeldes zwischen Nutboden und Öffnung auch für die korrigierte Querfeldamplitude B_h beibehalten werden.

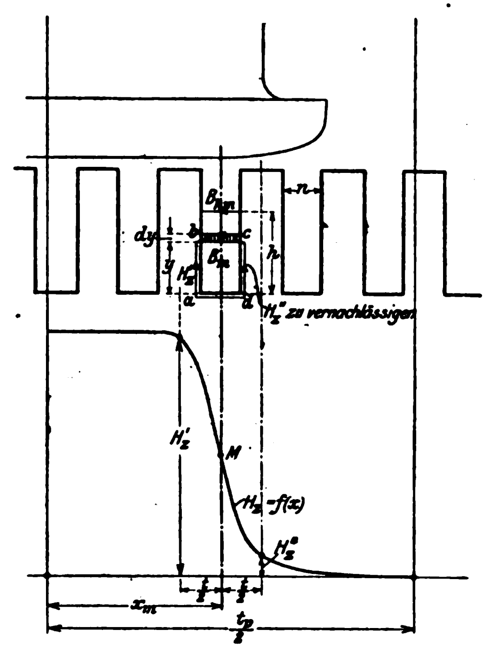


Abb. 9. Zur Ermittelung des maximalen Nutenquerfeldes.

Ferner genügt es, diese Verteilung für diejenige Lage der Nut unter den Polen zu bestimmen, für welche das Querfeld sein Maximum erreicht. Dies muß etwa unter der Schenkelmitte M der H_z-Kurve eintreten (Abb. 9), denn dann führt in den allermeisten Fällen[1]) der linke Zahn noch seinen vollen Fluß, während die Feldstärke im rechten Zahn bereits vernachlässigbar klein geworden ist. Wir brauchen also nur die magnetische Umlaufspannung für einen Schließungskreis a b c d gleich Null zu setzen; dann ergibt sich allein aus der Feldstärke H_z' des linken Zahnes

$$(B_m)_0 = \frac{1}{n}\int_0^y H_z' dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

[1]) Diese Bedingung kennzeichnete die frühere Arbeit durch die Gleichung

$$x_2 = 3\frac{t}{2}.$$

Ich beschränke mich hier auf diesen wichtigsten Fall.

Das führt für Außenpolmaschinen zu der Verteilungsformel

$$(B_m)_0 = \frac{y}{n}\left\{\frac{H'_{z\,max} + H'_{z\,u}}{2} + \frac{H'_{z\,max} - H'_{z\,u}}{2}\left[1 - \frac{y}{h}(1+\zeta') + \frac{y^2}{h^2}\cdot\frac{2}{3}\zeta'(1+\zeta')\right]\right\}, \quad 5a)$$

bei Innenpolmaschinen dagegen:

$$\left.\begin{aligned}(B_m)_0 = {} & \frac{h}{n}\left\{\frac{H'_{z\,max} + H'_{z\,u}}{2} - \frac{H'_{z\,max} - H'_{z\,u}}{6}\zeta'(1-2\zeta')\right\} \\ & - \frac{h-y}{n}\left\{\frac{H'_{z\,max} + H'_{z\,u}}{2} + \frac{H'_{z\,max} - H'_{z\,u}}{2}\left[1 - \frac{h-y}{h}(1+\zeta')\right.\right. \\ & \left.\left. + \left(\frac{h-y}{h}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\zeta'(1+\zeta')\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \quad 5b)$$

In beiden Fällen bedeutet ζ' eine gewisse Konstante der Zahnverjüngung, nämlich:

$$\zeta' = \frac{z_{eu} - z_{e\,min}}{z_{e\,min} + \frac{n_1}{\mu'}} = \frac{H'_{z\,max} - H'_{z\,u}}{H' + H'_{z\,u}}. \quad 6)$$

Zwischen Gleichstrom- und Synchronmaschinen besteht also eine gewisse Gegensätzlichkeit der Feldverteilung, wie sie schon die Abb. 7 und 8 zum Ausdruck brachten: Bei Außenpolmaschinen schnellt das Nutenquerfeld fast sogleich auf seinen Endwert B_h, während es ihn bei Innenpolmaschinen in schleichendem Anstieg erreicht. Daher liegt bei Gleichstrommaschinen schon die untere Stablage in einem kräftigen Felde, während bei Synchronmaschinen oft überhaupt nur die obere Stablage gefährdet ist. Es ist das neben den niedrigeren Zahnsättigungen einer der Gründe, weshalb sich bei Synchronmaschinen so viel tiefere Nuten bewährt haben als bei Gleichstrommaschinen. Der Maximalwert des Querfeldes erreicht natürlich bei beiden Maschinen unter sonst gleichen Verhältnissen dieselbe Höhe. Bei Vernachlässigung der Zahnentlastung kann er zu

$$(B_{h\,m})_0 = \frac{h}{n}\left\{\frac{H'_{z\,max} + H'_{z\,u}}{2} - \frac{H'_{z\,max} - H'_{z\,u}}{6}\zeta'\right\} \quad 7)$$

angenommen werden.

D. Die „Umfangskurve" des Nutenquerfeldes.

Um die Verteilung des Nutenquerfeldes nicht nur innerhalb einer einzelnen Nut, sondern auch längs des ganzen Ankerumfanges angeben zu können, muß man sich zu dem schon berechneten Maximalwert $B_{h\,m}$ noch wenigstens eine weitere Querfeldamplitude B_{h1} verschaffen. Am einfachsten ist es, wenn man die Nut um eine halbe Teilung nach links zurückdreht, so daß nun der rechts benachbarte Zahn unter die Mitte des Trapezschenkels im H_z-Diagramm tritt (Abb. 3). Da hierbei die Krone des linken Zahnes noch immer denselben Fluß wie bisher empfängt, so liefert nun der Satz vom Linienintegral der magnetischen Feldstärke für das Rechteck abcd

$$(B_{h1})_0 = \frac{h}{n}\int_0^h H'_z dy - \frac{h}{n}\int_0^h H''_z dy = (B_{h\,m})_0 - \frac{h}{n}\int_0^h H''_z dy \quad 8)$$

Ohne weiteres läßt sich zwar das letzte Integral noch nicht auswerten, denn es bestreicht auf der Sättigungskurve ein neues Gebiet zwischen:

$$H''_{z\,max} = \frac{1}{2} H'_{z\,max}$$



und

$$H''_{zu} = \frac{1}{2} H'_{zu}$$

und zwischen diesen Grenzen trifft die frühere Interpolationsgerade natürlich nicht mehr das Richtige. Wenn wir aber jetzt auch den neuen Abschnitt durch eine Gerade von der Neigung

$$\operatorname{tg} \delta'' = \mu'' = \frac{B''_{z\,max} - B''_{zu}}{H''_{z\,max} - H''_{zu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3b)$$

ersetzen, dann brauchen wir in der alten Integrationsformel 5) nur den Index zu ändern und erhalten sogleich:

$$(B_{h1})_0 = (B_{hm})_0 - \Delta(B_{h1})_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

mit:

$$\Delta(B_{h1})_0 = \frac{h}{n}\left\{\frac{H''_{z\,max} + H''_{zu}}{2} - \frac{H''_{z\,max} - H''_{zu}}{6}\zeta''\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7a)$$

und

$$\zeta'' = \frac{z_{eu} - z_{emin}}{z_{emim} + \frac{n_1}{\mu''}} \div \frac{H''_{z\,max} - H''_{zu}}{H'' + H''_{zu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6a)$$

Würde man jetzt $(B_{hm})_0$ nach Gl. 7) ausdrücken, so könnte man das Resultat noch erheblich vereinfachen. Davon mag jedoch mit gutem Grunde abgesehen werden, denn wir können nunmehr auch die Beeinflussung der Zahnsättigung durch den abzweigenden Querfluß nicht länger vernachlässigen. Der Grad dieser Beeinflussung ändert sich aber mit der Zahnstellung. Daher wird das Linienintegral der Feldstärke für den rechten und linken Zahn in ganz verschiedener Weise zu korrigieren sein und es hätte keinen Zweck, die beiden Glieder schon vor ihrer Korrektur zusammenzuziehen.

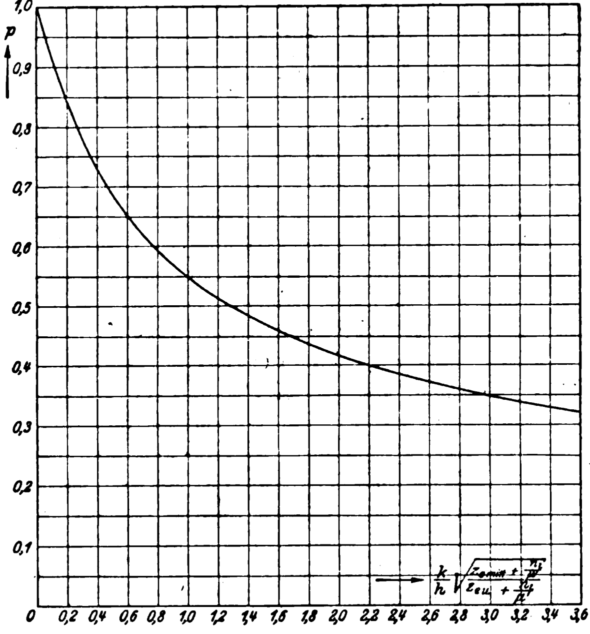


Abb. 10. Darstellung des Parameters p als Funktion von $\frac{k}{h} \cdot \sqrt{\frac{z_{emitt} + \frac{n_1}{\mu'}}{z_{eu} + \frac{n_1}{\mu'}}}$.

Für die Ausbreitung des Querfeldes ist gerade die jetzt zur Sprache kommende Erscheinung von höchster Wichtigkeit. Denn würde das Nutenfeld nicht auch die Zahnsättigung in Mitleidenschaft ziehen, so müßte es auf die enge Zone beschränkt bleiben, in welcher schon allein nach Maßgabe des H_z-Trapezes die Feldstärke benachbarter Zähne differiert. Das wäre nur ein kleiner Abschnitt zu beiden Seiten der Schenkelmitte. Indem aber der Querfluß einer Nut den benachbarten Zahn entlastet — wie in Abb. 3 das Feld B_1 den links gelegenen Zahn —, vermindert es dessen Feldstärke und zwingt daher auch der nächsten Nut ein Querfeld auf. Dieses wirkt abermals auf den links benachbarten Zahn zurück und so wird das Querfeld durch Wirkung und Gegenwirkung bis zur Polmitte vorgetragen. Man beobachtet denn auch gewöhnlich nicht eine lokale Querfeldbildung nach Abb. 22,

sondern eine von der Polmitte bis zur Schenkelmitte beschleunigt ansteigende Kurve (Abb. 11); erst jenseits dieser Grenze bringt der jähe Abfall der Zahnfeldstärke im H_z-Trapez auch das Nutenquerfeld rapide zum Erlöschen.

Fragen wir uns, welche Konstruktionen dieses Wechselspiel zwischen Zahn- und Nutenfluß besonders begünstigen, so müssen wir antworten: tiefe und schmale Nuten, schmale und hochgesättigte Zähne. Diese Faktoren nach Maßgabe ihrer Wertigkeit zu einfachen charakterisierenden Hilfsgrößen zu vereinigen und daraus Reduktionsfaktoren für die Querfeldamplitude herzuleiten, das war die Aufgabe, welche die strengere Theorie vor allem zu lösen hatte. Sie entledigte sich dieser Aufgabe, indem sie zwei Parameter α und β durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Sin}\,\alpha\frac{t}{2} = p\frac{\pi}{4h}\sqrt{(z_{e\,mitt}\,\mu' + n_1)\,n} \quad \text{[1] [2]} \qquad \text{10a)}$$

und

$$\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{t}{2} = p\frac{\pi}{4h}\sqrt{(z_{e\,mitt}\,\mu'' + n_1)\,n} \qquad \text{10b[1] [2])}$$

festlegte. Neu ist uns hierin nur die Ordnungszahl p, welche durch Diagramm 10 oder die Gleichung

$$p\frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{tg}\, p\frac{\pi}{2} = \frac{h}{k}\sqrt{\frac{z_{eu} + \frac{n_1}{\mu'}}{z_{e\,mitt} + \frac{n_1}{\mu'}}} \qquad \text{11)}$$

bestimmt wird. Ihre Bedeutung wird aber durch Abb. 7 und 8 sogleich klar. Wir müssen ja bedenken, daß die reduzierte Nuttiefe h unter Umständen viel kleiner als die effektive Nuttiefe (h + k) ausfallen kann, die auch den Querfluß

$$\frac{N_{hk}}{cm} = B_h\cdot k \qquad \text{12)}$$

des oberen Nutraumes einschließt. Daher tritt in beiden Gleichungen an Stelle von h der größere Wert $\frac{h}{p}$. Die ideelle Nutverlängerung k muß natürlich geschätzt werden, was aber auch keinerlei Schwierigkeiten macht.

Für die Reduktion der maximalen Querfeldamplitude B_{hm} benötigen wir nur die Hilfsgröße α. Wir bilden

$$B_{hm} = (B_{hm})_0 \cdot \frac{2}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1'\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\frac{t}{2} + 1} = \frac{(H_{z\,max}' + H_{z\,u}') - (H_{z\,max}' - H_{z\,u}')\cdot\frac{\zeta}{3}}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1'\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\frac{t}{2} + 1}\cdot\frac{h}{n}, \qquad \text{13[2])}$$

reduzieren aber nicht allein $(B_{hm})_0$, sondern die ganze Querfeldverteilung $(B_m)_0$ bis zum Nutengrunde im gleichen Verhältnis.

---

[1]) Man braucht mit Hyperbelfunktionen durchaus nicht vertraut zu sein, um die in der Hütte abgedruckten Tabellen für $\mathfrak{Sin}\,\varphi$, $\mathfrak{Cos}\,\varphi$, $\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Ctg}\,\varphi}$ benützen zu können. Da für $\varphi \geqq 2$

$$\mathfrak{Ctg}\,\varphi = 1$$

gesetzt werden kann, so ist fast durchweg

$$\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1' = 1.$$

[2]) t und x_1' sind natürlich für denjenigen Radius zu messen, für den man die Umfangskurve entwerfen will. Dagegen ist stets mit demselben Wert von

$$z_{e\,mitt} = \frac{z_{eu} + z_{e\,min}}{2} \quad \text{(siehe Abb. 7 und 8)}$$

zu rechnen.



Für B_{h1} ist die Korrektur ein wenig umständlicher. Man erhält:

$$B_{h1} = (B_{hm})_0 \cdot \frac{2}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1' \,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\,3\beta\frac{t}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\beta\frac{t}{2}} - \Delta(B_{h1})_0 \frac{3 - \mathfrak{Tg}\,3\beta\frac{t}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\beta\frac{t}{2}}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1' \,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\,3\beta\frac{t}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\beta\frac{t}{2}}$$

oder auch

$$B_{h1} = \frac{\left(\frac{H_{z\,max}' + H_{z\,u}'}{4} - \frac{H_{z\,max}' - H_{z\,u}'}{12}\cdot\zeta''\right)\left(1 + \mathfrak{Tg}\,3\beta\frac{t}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\beta\frac{t}{2}\right) + \frac{H_{z\,max}' + H_{z\,u}'}{3}(\zeta'' - \zeta')}{\mathfrak{Ctg}\,\alpha x_1' \,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\frac{t}{2} + \mathfrak{Tg}\,3\beta\frac{t}{2}\,\mathfrak{Ctg}\,\beta\frac{t}{2}} \cdot \frac{h}{n}. \quad 14)$$

Damit haben wir bereits genug Daten zur Hand, um die Verteilung der Querfeldamplitude längs des Ankerumfanges — die „Umfangskurve", wie wir uns kurz ausdrücken wollen — mit guter Annäherung festzulegen. Von der Polmitte bis $x = x_1'$ wächst das Querfeld nach einer hyperbolischen Sinusfunktion:

$$B = B_1 \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha x_1'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 15)$$

Ich nannte dieses Gebiet früher die „erste Zone".

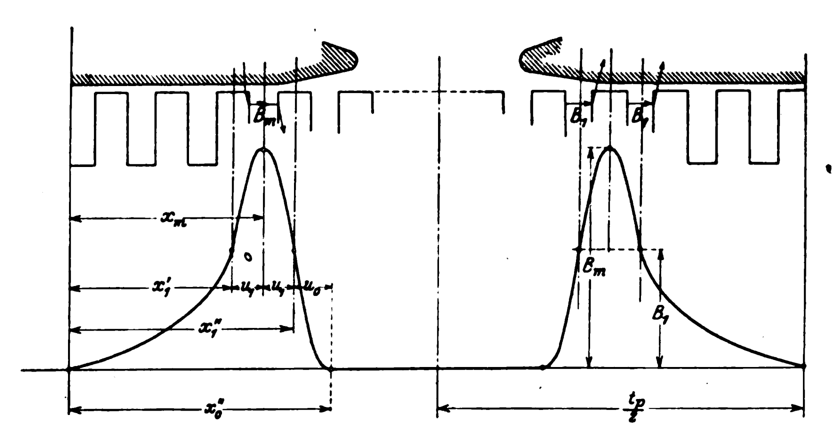


Abb. 11. Umfangskurve des Nutenquerfeldes.

In der daraufolgenden „zweiten Zone" erhebt sich die Kurve zunächst in einem parabelähnlichen Aste auf ihren Maximalwert B_{hm}, um ebenso wieder auf B_{h1} zurückzufallen. Hier ist also mit den Bezeichnungen der Abb. 11:

$$B = B_m - (B_m - B_1)\cdot\left(\frac{x_m - x}{x_m - x_1'}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16)$$

Endlich senkt sich die Kurve in einem zweiten parabelähnlichen Aste wieder zur Abszissenachse herab. Denn im Polzwischenraum verschwindet mit der Zahnsättigung auch jeder Anstoß zur Querfeldbildung. Wir setzen daher in diesem letzten Abschnitt

$$B = B_1 \left(\frac{x_0'' - x}{x_0'' - x_1''}\right)^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17)$$

wobei

$$\frac{x_m - x_1'}{x_0'' - x_1''} = \frac{u_1}{u_0} = \frac{B_m}{B_1} - 1.$$

E. Zahlenbeispiel.

Um gleichzeitig die Anwendung der Formeln und ihre gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der exakteren Theorie zu zeigen, möchte ich ein schon früher durchgerechnetes Zahlenbeispiel im neuen Gewande wiederholen. Ich behandelte in der mehrfach zitierten Arbeit einen Gleichstrommotor nach Abb. 12 und der folgenden Tabelle:

Ankerdurchmesser	D	$= 41$ cm
Polzahl	$2p$	$= 4$
Polbedeckungsfaktor	α	$= {}^2/_3$
Polteilung	t_p	$= 32{,}2$ cm
Nuten pro Pol		$= 12^1/_4$
Nutteilung[1])	t	$= 2{,}63$ cm
Nutbreite	n	$= 1{,}0$ „
Zahnbreite maximal	z_{max}	$= 1{,}63$ „
„ „ effektiv . .	$z_{e\,max}$	$= 0{,}92 \cdot 1{,}63 = 1{,}5$ cm
„ minimal	z_{min}	$= 1{,}1$ cm
„ „ effektiv . .	$z_{e\,min}$	$= 0{,}92 \cdot 1{,}1 = 1{,}01$ cm
Nuttiefe		$= 4{,}1$ cm

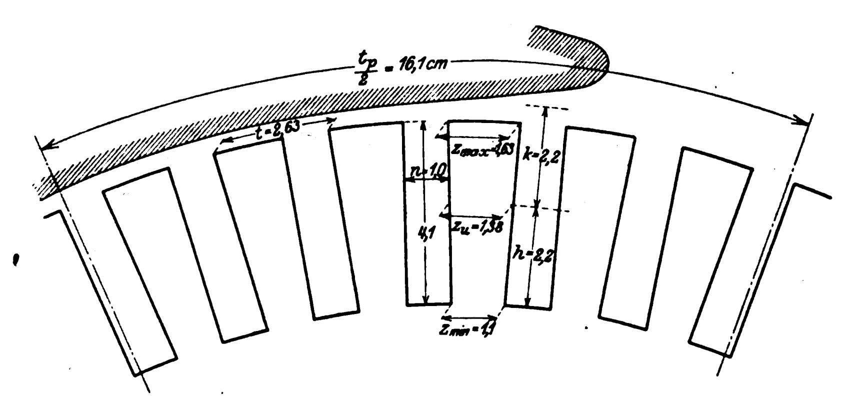


Abb. 12. Blechschnitt eines Gleichstromankers. — 49 Nuten.

Unter dem Polbogen herrschte ein mittleres Luftspaltfeld von

$$B_{l\,mitt} = 8750,$$

so daß jede Zahnteilung pro cm Ankerlänge einen

$$\frac{N_t}{cm} = 23000$$

empfing. Dafür berechneten sich unter Vernachlässigung des Nutenquerfeldes die folgenden Sättigungswerte unter dem Polbogen (a) und der Schenkelmitte des H_z-Trapezes (b).

		a (Index ′)	b (Index ″)
Maximale Induktion an der Zahnwurzel	$B_{z\,max}$	22000	20500
Minimale Induktion an der Zahnkrone	$B_{z\,min}$	15300	14100
Danach Interpolationsgerade zwischen	$B_{z\,max}$	22000	20500
	$H_{z\,max}$	750	375
und	B_{zu}	18000	16600
	H_{zu}	100	50
Schnitt der Interpolationsgeraden mit der H_z-Achse bei . .	$\overline{H}$	2830	1335
Effektive Permeabilität	μ	6,15	12

[1]) In diesem Zahlenbeispiel ist die Unterscheidung von n_1 und n nicht durchgeführt.

Legen wir jetzt dieselben Sättigungsverhältnisse zugrunde, so berechnet sich zunächst [Gl. 4)]:

$$h = 4{,}1 \cdot \frac{\dfrac{22000}{18000} \cdot \dfrac{8750 - 100 \cdot \dfrac{1}{2{,}63}}{8750 - 750 \cdot \dfrac{1}{2{,}63}} - 1}{\dfrac{22000}{15300} \cdot \dfrac{8750 - 0}{8750 - 750 \cdot \dfrac{1}{2{,}63}} - 1} = 4{,}1 \cdot \frac{0{,}26}{0{,}485} = 2{,}2 \text{ cm},$$

ferner [Gl. 6)]:

$$\zeta' = \frac{750 - 100}{2830 + 100} = 0{,}222$$

und [Gl. 6a)]:

$$\zeta'' = \frac{375 - 50}{1335 + 50} = 0{,}234.$$

Dazu schätzen wir:

$$k = 2{,}2 \text{ cm},$$

entnehmen Abb. 10 sodann

$$p = 0{,}557$$

und finden nach Gl. 10)

$$\alpha \frac{t}{2} = 0{,}54,$$

$$\beta \frac{t}{2} = 0{,}70.$$

Ohne Berücksichtigung des Nutenquerfeldes wäre somit nach Gl. 7):

$$(B_{hm})_0 = \frac{2{,}2}{1{,}0} \left\{ \frac{750 + 100}{2} - \frac{750 - 100}{6} \cdot 0{,}222 \right\} = 2{,}2 \{425 - 24\} = 880$$

und nach Gl. 9):

$$(B_{h1})_0 = 880 - \frac{2{,}2}{1{,}0} \left\{ \frac{375 + 50}{2} - \frac{375 - 50}{6} \cdot 0{,}234 \right\} = 880 - 2{,}2 \{212{,}5 - 12{,}7\} = 440.$$

Korrigiert man jedoch diese Werte nach Gl. 13) und 14), so wird:

$$B_{hm} = 880 \cdot \frac{2}{1{,}0 \cdot 2{,}03 + 1} = 880 \cdot 0{,}66 = 580$$

bzw.

$$B_{h1} = 880 \cdot \frac{2}{1{,}0 \cdot 2{,}03 + 0{,}97 \cdot 1{,}65} - 440 \cdot \frac{3 - 0{,}97 \cdot 1{,}65}{1{,}0 \cdot 2{,}03 + 0{,}97 \cdot 1{,}65} = 880 \cdot 0{,}55 - 440 \cdot 0{,}396$$
$$= 310.$$

Die exaktere Theorie — die das Querfeld der Nut in seine Harmonischen auflöste — hatte seinerzeit für die Grundwelle

$$B_{hm} = 540$$

und

$$B_{h1} = 290$$

ergeben. Das sind etwa 7% weniger als die zuletzt errechneten Werte. Man kann also mit der erreichten Annäherung wohl zufrieden sein.

II. Harmonische Analyse der Umfangskurve.

Während der Anker rotiert, durchläuft jede Nut die ganze Umfangskurve der Querinduktion. Diese Kurve kann also zugleich als Zeitkurve der Feldschwankung in einer beliebigen Nut gelesen werden und charakterisiert alsdann ein Wechselfeld. Nun ist

ein sinusförmig pulsierendes Wechselfeld den massiven Nutleitern um so gefährlicher, je höher seine Frequenz ist. Es ist daher das Gegebene, unser unregelmäßiges Wechselfeld in Grund- und Oberwellen aufzulösen und für jede Harmonische die Verluste getrennt zu berechnen.

Zuerst bestimme ich den Beitrag, welchen das Feld der ersten Zone zur Amplitude irgendeiner (q-ten) Harmonischen liefert. Hierfür gilt die bekannte Formel für Fouriersche Reihen:

$$\varDelta \widehat{B}_q' = \frac{4}{t_p} \int_0^{x_1'} B \sin q \frac{\pi}{t_p} x \, dx \text{ [1]}$$

oder da wir für die Ordinate B das Gesetz 15 in Erfahrung gebracht haben:

$$\varDelta \widehat{B}_q' = B_1 \cdot \frac{4}{q\pi} \cdot \frac{\frac{\alpha t_p}{q\pi} \mathfrak{Ctg}\, \alpha x_1' \sin q \frac{\pi}{t_p} x_1' - \cos q \frac{\pi}{t_p} x_1'}{1 + \left(\frac{\alpha t_p}{q\pi}\right)^2}$$

$$\doteq B_1 \cdot \frac{4}{q\pi} \cdot \frac{\frac{\alpha t_p}{q\pi} \cdot \sin q \frac{\pi}{t_p} x_1' - \cos q \frac{\pi}{t_p} x_1'}{1 + \left(\frac{\alpha t_p}{q\pi}\right)^2}.$$

Gewöhnlich ist nämlich

$$\alpha x_1' \geqq 2,$$

so daß man genau genug

$$\mathfrak{Ctg}\, \alpha x_1' = 1$$

annehmen kann.

Zu $\varDelta \widehat{B}_q'$ gesellt sich dann noch der Beitrag der zweiten Zone

$$\varDelta \widehat{B}_q'' = \frac{4}{t_p} \int_{x_1'}^{x_0''} B \sin q \frac{\pi}{t_p} x \, dx.$$

Mit den Näherungsgleichungen 16) und 17) wird daraus

$$\varDelta \widehat{B}_q'' = B_1 \frac{4}{q\pi} \cdot \cos q \frac{\pi}{t_p} x_1'$$

$$- (B_m - B_1) \cdot \frac{8}{q^2\pi^2} \cdot \frac{t_p}{u_1} \left[\sin q \frac{\pi}{t_p} x_1' - 2 \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} u_1}{q \frac{\pi}{t_p} u_1} \sin q \frac{\pi}{t_p} x_m + \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} \frac{u_0}{2}}{q \frac{\pi}{t_p} \frac{u_0}{2}} \sin q \frac{\pi}{t_p} \left(x_1'' + \frac{u_0}{2} \right) \right].$$

Insgesamt erhält man somit für die Amplitude der q-ten Harmonischen

$$\left.\begin{aligned} \widehat{B}_q = B_1 \cdot \frac{8}{q^2\pi^2} \cdot \alpha t_p \cdot \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} x_1' + \frac{\alpha t_p}{q\pi} \cos q \frac{\pi}{t_p} x_1'}{1 + \left(\frac{\alpha t_p}{q\pi}\right)^2} \\ - (B_m - B_1) \cdot \frac{8}{q^2\pi^2} \cdot \frac{t_p}{u_1} \left[\sin q \frac{\pi}{t_p} x_1' - 2 \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} u_1}{q \frac{\pi}{t_p} u_1} \sin q \frac{\pi}{t_p} x_m + \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} \frac{u_0}{2}}{q \frac{\pi}{t_p} \frac{u_0}{2}} \sin q \frac{\pi}{t_p} \left(x_1'' + \frac{u_0}{2} \right) \right] \end{aligned}\right\} 18)$$

[1]) **Mit $\widehat{B}$ bezeichne ich den örtlichen, mit $\widetilde{B}$ den zeitlichen Maximalwert einer sinusförmigen Induktionswelle.**

Den Inhalt dieser Formel erkläre ich am besten gleich an dem Beispiel des Gleichstrommotors, für den ich im letzten Abschnitt die Amplituden B_{hm} und B_{h1} der Umfangskurve ermittelt habe. Ich verwende dabei jedoch die Resultate der exakteren Theorie, welche u_1 ein wenig größer als eine halbe Nutteilung, nämlich

$$u_1 = 1{,}09 \frac{t}{2} = 1{,}44 \text{ cm}$$

ergab. Die übrigen Größen, deren man zur Auswertung der Formel bedarf, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Gleichstrommotor nach Abb. 12 $B_{hm} = 540$, $B_{h1} = 300$.

Polteilung	$t_p = 32{,}4$ cm	entsprechend	180^0
Abszissen der ersten Zone . .	$x_1' = 7{,}2$ „	„	40^0
„ „ zweiten „ . .	$u_1 = 1{,}44$ „	„	8^0
	$x_m = 8{,}64$ „	„	48^0
	$x_1'' = 10{,}08$ „	„	56^0
	$u_1 = 1{,}8$ „	„	10^0

Auf Grund dieser Daten berechnet man für die einzelnen Harmonischen:

Ordnungszahl	Gesamtamplitude	Verhältnis zum Maximalwert	Verhältnis zur Grundwelle
1	180	0,333	1,000
3	169	0,313	0,940
5	— 124	— 0,230	— 0,690
7	— 72	— 0,133	— 0,400
9	93	0,172	0,517
11	10	0,018	0,055
13	— 56	— 0,104	— 0,311
15	14	0,026	0,078
17	23	0,043	0,128
19	— 12	— 0,022	— 0,067

Danach ist die Querfeldkurve so reich an höheren Harmonischen, daß man die Entwicklung nicht gut vor der 13. Harmonischen abbrechen kann. Immerhin ist es auch nicht nötig, die Genauigkeit so weit zu treiben, wie es die Übereinanderlagerung der berechneten 10 Harmonischen in Abb. 13 zeigt. Denn man muß stets im Gedächtnis behalten, daß auch die zugrunde gelegte strichlierte Kurve, die wir durch die harmonische Analyse in Teilwellen aufzulösen suchten, nur eine Näherungskurve darstellt.

III. Wirbelstromverluste in einer beliebigen Stablage, verursacht durch ein harmonisches Wechselfeld.

Wir kommen nun zum Kernpunkt des ganzen Problems, der Bestimmung der Wirbelstromverluste, welche ein sinusförmig pulsierendes Nutenfeld in einer beliebigen Stablage verursacht. Da stößt uns sofort eine Schwierigkeit auf: die Rückwirkung der Wirbelströme schwächt das Nutenquerfeld. Sie stört also den Anstieg innerhalb der Nut, den ich im ersten Abschnitt in großen Zügen geschildert habe. Der Zahn wird weniger entlastet, als man nach der Theorie der ruhenden Maschine erwarten würde; die Zahnsättigung nimmt zu. — Müssen wir dies in Betracht ziehen, und wenn, wie können wir darauf Rücksicht nehmen, ohne eine ganz neue Theorie von Grund auf entwickeln zu müssen?

Am leichtesten und sichersten könnte uns natürlich eine experimentelle Untersuchung diese Frage beantworten, und ich bin in der Lage, wenigstens einen Teil dieser Antwort mitteilen zu können: Bei allen Stabhöhen, wie sie für Gleichstrom-



maschinen und Einankerumformer gebräuchlich sind, fällt die Erhöhung der Zahnsättigung durch die Rückwirkung der Wirbelströme praktisch nicht ins Gewicht. Diesen Fall werde ich daher zuerst für sich allein behandeln. Es kann aber auch Synchronmaschinen geben — namentlich große Typen mit nur einem Stab pro Nut — bei

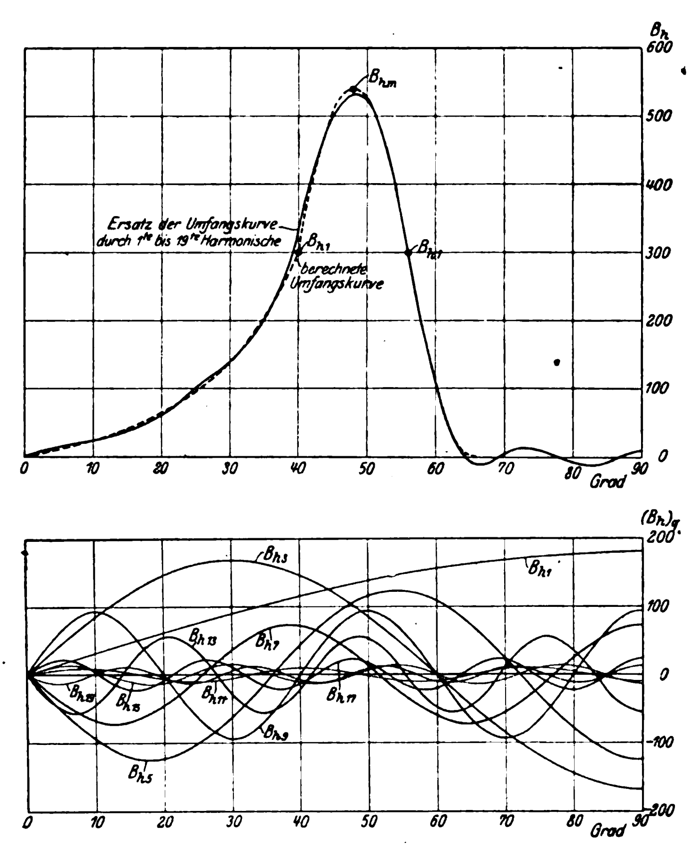


Abb. 13. Harmonische Analyse der Umfangskurve.

denen dieselbe Vernachlässigung zu erheblichen Fehlern führen würde. Diese Fehler wären um so unangenehmer, als sie in einer Unterschätzung der tatsächlichen Wirbelstromverluste bestehen würden. Experimentell ließe sich leicht eine Reihe von Erfahrungskoeffizienten bestimmen, mit denen man auch solche Ausnahmefälle auf die einfachere Theorie zurückführen könnte. Wie jedoch die Dinge zur Zeit liegen, steht mir nur der schwierigere Weg einer Näherungstheorie offen.

A. Wirbelstromverluste bei nicht zu großen reduzierten Stabhöhen: $\xi < 1$.

Auch bei kleinen Stabhöhen muß man das Gegenfeld der Wirbelströme berücksichtigen. Aber man darf trotzdem mit denjenigen Zahnsättigungen operieren, die man zuvor unter Vernachlässigung des Gegenfeldes der Wirbelströme, oder, wenn man so will, für einen unbewickelten Anker berechnet hat. Das ist ein ganz gewaltiger Vorteil; denn nur durch eine Veränderung der Zahnsättigung vermöchte die Wirbelströmung einer Stablage die einer anderen Lage zu beeinflussen. Vernachlässigt man dieses Detail, dann kann man jede Stablage ohne Rücksicht auf die übrigen Leiter für sich allein behandeln.

Wen diese Behauptung in ihrer unbewiesenen Form noch befremdet, braucht nur für den Schließungskreis a b c d in Abb. 14 das Linienintegral der magnetomotori-

schen Kraft zu bilden. Da hierbei die Stablage nur Wirbelströme führt, umfaßt man mit dem ganzen Querschnitt keine resultierenden Ampereleiter. Wenn also das Gegenfeld der Wirbelströme die Zahnsättigung nicht merklich erhöht, so kann sich auch an der Differenz $\Delta \underline{B}$ der Querinduktion unter und über der Stablage gegenüber der leeren Nut nichts Wesentliches geändert haben.

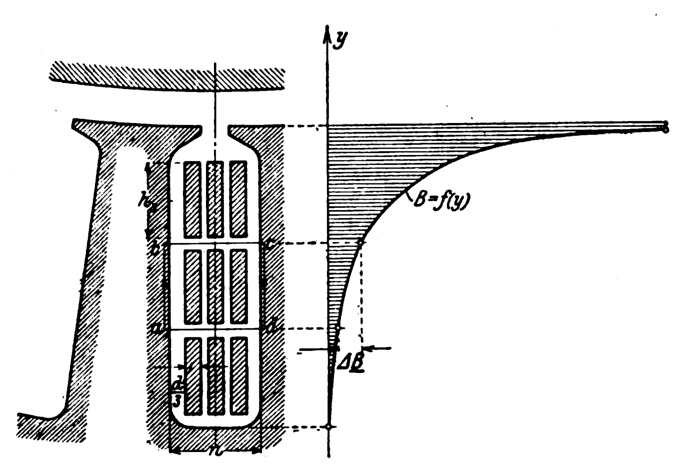


Abb. 14. Zur Berücksichtigung der Wirbelstromrückwirkung.

Abb. 15, welche für eine Außenpolmaschine mit stark verjüngten Zähnen entworfen ist, führt diesen Gedanken für zwei Stablagen weiter aus. Nur über den Stabhöhen ist das Querfeld mit und ohne Armatur verschieden. Dazwischen und darüber hinaus kommt die ursprüngliche Feldkurve wieder zur Geltung.

Unter solchen Voraussetzungen ist auch die Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen keineswegs schwierig: Setzt man in Abb. 15 die magnetomotorische Umlaufspannung für das kleine Rechteck a b c d proportional den eingeschlossenen Ampereleitern, so ergibt sich:

$$0{,}4\pi \cdot \dot{\tilde{\varrho}} \cdot \mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\dot{\tilde{B}}}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{n} + \dot{\tilde{H}}_z\left(x+\frac{t}{2}\right) - \dot{\tilde{H}}_z\left(x-\frac{t}{2}\right)^{1)};$$

bei unbewickeltem Anker ($\dot{\tilde{\varrho}} = 0$) war aber:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\tilde{B}}}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{n} \doteq \frac{\Delta\dot{\tilde{B}}}{h_s} = \dot{\tilde{H}}_z\left(x-\frac{t}{2}\right) - \dot{\tilde{H}}_z\left(x+\frac{t}{2}\right),$$

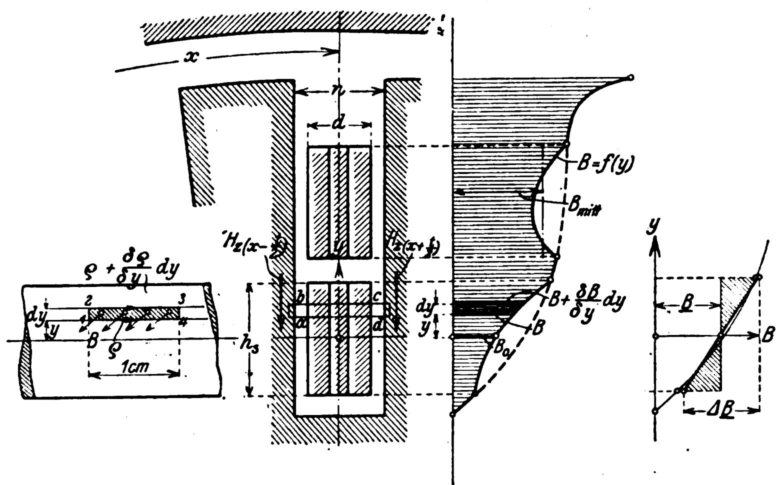


Abb. 15. Rückwirkung der Wirbelströme auf das Nutenquerfeld.

Abb. 15a. Äquivalente Feldverteilung.

1) Pulsiert eine Wechselstromgröße nach einem Sinusgesetz der Zeit, so bezeichne ich mit dem Zeichen ~ ihren Maximalwert. Die Hinzufügung eines Punktes ∸ charakterisiert die Größe zugleich als Zeitvektor. Unter $j\dot{\tilde{B}}$ ist ein Vektor gleicher Größe wie $\tilde{B}$ zu verstehen, der gegen $\dot{\tilde{B}}$ um 90° nacheilt. Es ist bekannt, daß man dem Symbol j die Bedeutung $\sqrt{-1}$ beilegen und die Rechenregeln für imaginäre und komplexe Größen anwenden darf.

somit ist jetzt:

$$0{,}4\pi \cdot \dot{\varrho} \cdot \frac{d}{n} = \frac{d\dot{\mathfrak{B}}}{dy} - \frac{\Delta \dot{\mathfrak{B}}}{h_s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

Eine weitere Differentialgleichung erhält man, indem man Faradays Induktionsgesetz für das kleine Rechteck 1 2 3 4 anschreibt. Längs seines Umfanges beträgt die Summe der Ohmschen Spannungsabfälle:

$$\Sigma \dot{\mathfrak{E}}_w = - d\dot{\varrho} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot 10^4},$$

während die induzierte EMK zu

$$\dot{\mathfrak{E}}_i = - j\omega \dot{\mathfrak{B}} dy \cdot 10^{-8} \quad {}^{1})$$

abgelesen wird. Das Gleichgewicht der Spannungen erfordert also:

$$\frac{d\dot{\varrho}}{dy} = - j\omega\lambda 10^{-4} \cdot \dot{\mathfrak{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

Schließlich wird man noch eine der Unbekannten $\dot{\mathfrak{B}}$ oder $\dot{\varrho}$ eliminieren, indem man beide Ansätze zu einer einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammenfaßt. Differenziert man zum Beispiel den Ansatz 20) und macht von Gl. 19 Gebrauch, so wird:

$$\frac{d^2\dot{\varrho}}{dy^2} = - j\dot{\varrho} \cdot 8\pi^2 \nu \lambda \frac{d}{n} 10^{-5} - j \frac{\Delta \dot{\mathfrak{B}}}{h_s} \cdot 2\pi\nu\lambda 10^{-4},$$

oder bei Verwendung der Substitution

$$\alpha = 2\pi \cdot \sqrt{\nu \frac{d}{n} \lambda \cdot 10^{-5}},$$

einfacher:

$$\frac{d^2\dot{\varrho}}{dy^2} = - j 2\alpha^2 \left(\dot{\varrho} + \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{\Delta \dot{\mathfrak{B}}}{h_s} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

Will man umgekehrt $\dot{\varrho}$ eliminieren, so muß man Gl. 19) differentiieren und alsdann mit 20) kombinieren. Dabei erhält man eine noch einfachere Beziehung:

$$\frac{d^2\dot{\mathfrak{B}}}{dy^2} = - j 2\alpha^2 \dot{\mathfrak{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22)$$

Diese beiden Gl. 21) und 22) sind die Endgleichungen unseres Problems. Können wir sie integrieren, so haben wir die Feld- und Wirbelstromverteilung in Händen. — Ähnliche Gleichungen sind in der technischen Literatur so oft behandelt worden, daß ich die Lösung wohl ohne Ableitung anschreiben darf. Da weder die Verteilung der Wirbelströme, noch des Nutenquerfeldes besondere Symmetrieeigenschaften erkennen läßt, so versuchen wir es für das in Abb. 15 eingetragene Koordinatensystem mit dem Ansatz:

$$\dot{\mathfrak{B}} = \dot{\mathfrak{C}} \frac{\mathfrak{Cos}\, \alpha (1-j) y}{\mathfrak{Cos}\, \alpha (1-j) \frac{h_s}{2}} + \dot{\mathfrak{S}} \frac{\mathfrak{Sin}\, \alpha (1-j) y}{\mathfrak{Sin}\, \alpha (1-j) \frac{h_s}{2}}.$$

Die noch unbestimmten Konstanten $\dot{\mathfrak{C}}$ und $\dot{\mathfrak{S}}$ vermitteln uns zugleich die Grenzbedingungen. Für die obere Stabkante $y = \frac{h_s}{2}$ wird nämlich:

$$\dot{\mathfrak{B}}_{\frac{h}{2}} = \dot{\mathfrak{C}} + \dot{\mathfrak{S}}.$$

[1]) Vgl. die Fußnote auf voriger Seite.

Dagegen für die untere Stabkante $y = \frac{h_s}{2}$

$$\dot{\underline{B}}_{-\frac{h}{2}} = \dot{\underline{C}} - \dot{\underline{S}}.$$

Somit ist klar, daß die Konstante $\dot{\underline{C}}$ dem Querfeld der leeren Nut im Koordinatenanfangspunkt $(\dot{\underline{B}})$ gleichkommt, die Konstante $\dot{\underline{S}}$ der Zunahme dieses Feldes bis zur oberen Stabkante $\left(\frac{\Delta\dot{\underline{B}}}{2}\right)$. Damit gewinnt der frühere Ansatz die endgültige Form:

$$\dot{\underline{B}} = \dot{\underline{B}} \frac{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}} + \frac{\Delta\dot{\underline{B}}}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

und auch für die Wirbelstromdichte folgt sogleich:

$$\dot{\varrho} = \frac{1}{0{,}4\,\pi}\,\frac{n}{d} \cdot \left(\frac{d\dot{\underline{B}}}{dy} - \frac{\Delta\dot{\underline{B}}}{h_s}\right)$$

$$= \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot \frac{n}{d} \left\{(1-j)\,\alpha \left[\dot{\underline{B}} \frac{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}} + \frac{\Delta\dot{\underline{B}}}{2} \frac{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}}\right] - \frac{\Delta\dot{\underline{B}}}{h_s}\right\} \ldots \quad 24)$$

Anstatt diese Gleichungen ausführlich zu besprechen, will ich sie auf ein verwandtes Problem zurückführen, das den meisten meiner Leser bekannt sein dürfte. Ich meine die Wirbelstromerscheinungen, die in massiven Leitern belasteter Wechselstrommaschinen als Folge des pulsierenden Nutenstreufeldes auftreten. Betrachten wir zuerst nur das Glied

$$\dot{\underline{B}}_1 = \dot{\underline{B}} \frac{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23\,a)$$

der Querfeldverteilung. Es entspricht vollkommen der Feldverteilung längs eines Oberstabes zwischen ungesättigten Zahnflanken, wenn dieser Oberstab, selbst stromlos, von dem Streufeld eines unteren Stromvolumens gleicher Periodenzahl

$$\dot{\underline{J}}_1 = \frac{n}{0{,}4\,\pi} \cdot \dot{\underline{B}}$$

durchsetzt wird. Hier wie dort kommt es weder auf die Stabhöhe, Periodenzahl, Leitfähigkeit oder den Füllfaktor $\frac{d}{n}$ der Nut im einzelnen an, sondern nur auf den Wert, zu dem sich alle diese Größen in dem Produkt

$$\alpha h_s = \xi$$

der „reduzierten Stabhöhe", wie man sie zu nennen pflegt, vereinigen. Hier wie dort wird die Feldschwingung durch die Wirbelströme verkleinert und zurückgehalten, am meisten in der Stabmitte, wo sie durch das Vektorverhältnis

$$\frac{\dot{\underline{B}}_0}{\dot{\underline{B}}} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\frac{\xi}{2}} \quad \text{(siehe Abb. 16, 17, 18)} \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

gekennzeichnet wird.

Die durchschnittliche Rückwirkung der Wirbelströme ist natürlich wesentlich

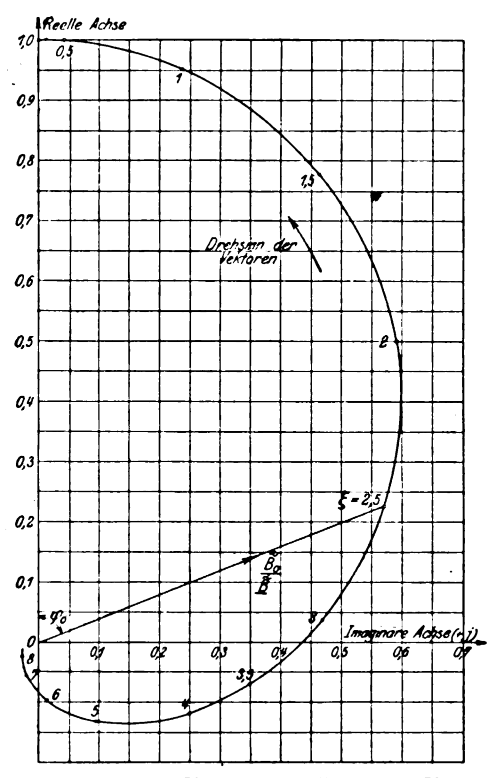


Abb. 16. Vektordarstellung des Verhältnisses $\frac{\dot{B}_0}{\dot{B}} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\frac{\xi}{2}}$.

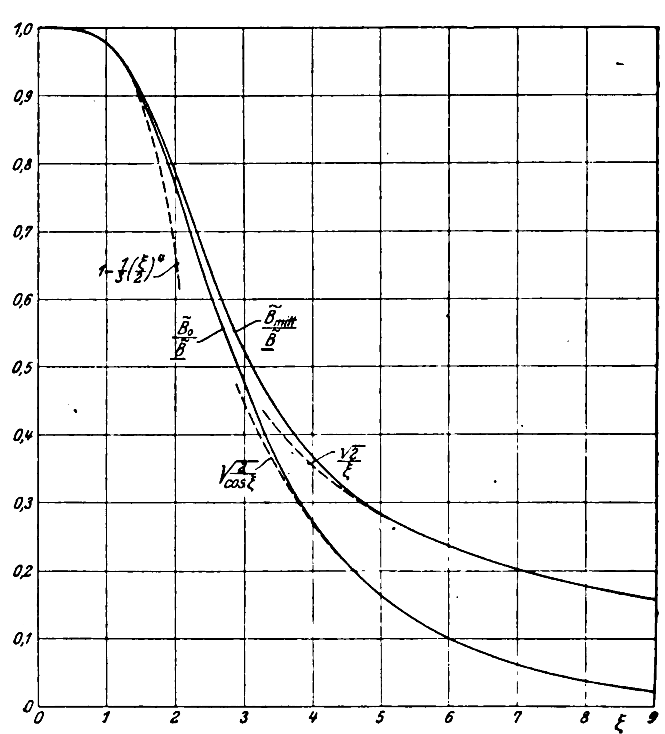


Abb. 17. Kurven zur Bestimmung der Induktion in der Leitermitte und des Mittelwertes der Induktion über der Leiterhöhe.

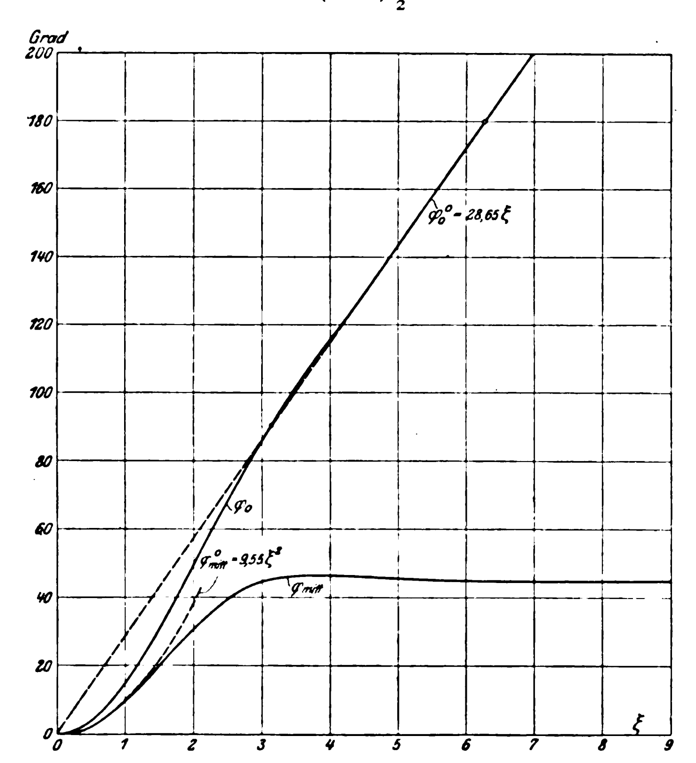


Abb. 18. Kurven zur Bestimmung der Phasenverschiebung des resultierenden Flusses über der Leiterhöhe (φ_{mitt}) und der Induktion in der Leitermitte (φ_0).

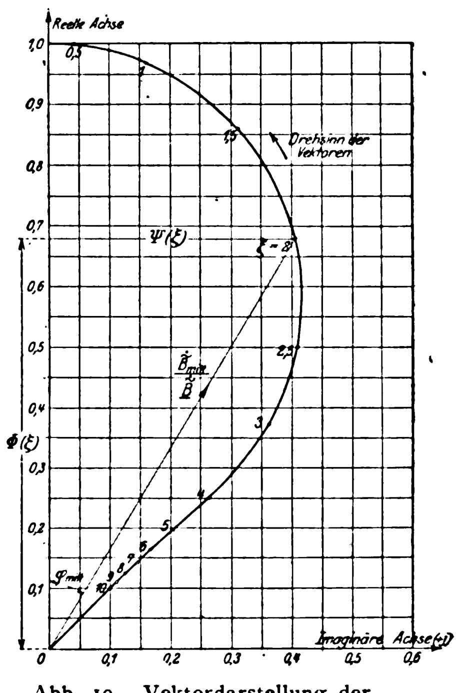


Abb. 19. Vektordarstellung der Funktion $\frac{\dot{B}_{mitt}}{\dot{B}} = \frac{\mathfrak{Tg}\,(1-j)\,\frac{\xi}{2}}{(1-j)\,\frac{\xi}{2}}$.

kleiner. Um auch hierfür einen geeigneten Ausdruck zu finden, müssen wir den Mittelwert des Querfeldes über der Stabhöhe

$$\dot{\underline{B}}_{mitt} = \frac{1}{h_s} \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} \dot{\underline{B}} \, dy$$

zu der Randinduktion $\dot{\underline{B}}$ längs der oberen und unteren Stabkante in Beziehung setzen. Das liefert:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{B}}_{mitt} &= \dot{\underline{B}} \frac{\mathfrak{Tg}\,(1-j)\frac{\xi}{2}}{(1-j)\frac{\xi}{2}} = \underline{B}\,[\Phi_1(\xi) + j\,\Psi_1(\xi)] \\ &= \dot{\underline{B}} \left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos\xi} + j\,\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos\xi}\right] \end{aligned}\right\} , \quad \ldots\ldots \quad 27)$$

ein Gesetz, das durch die Abb. 17, 18 und 19 graphisch interpretiert wird. Diese Diagramme lassen namentlich erkennen, daß die Verminderung der Amplitude erst für $\xi \geqq 1{,}5$ ins Gewicht fällt, daß dagegen die Verzögerung der Phase beinahe sofort beginnt. Und das ist sehr wichtig. Denn sowie der Querfluß über der Stabhöhe, das ist

$$\frac{\dot{\underline{N}}}{cm} = \dot{\underline{B}}_{mitt} \cdot h_s ,$$

in seiner Phase hinter der Randinduktion $\dot{\underline{B}}$ zurückbleibt, induziert er dem darunter liegenden ideellen oder wirklichen Leiter mit dem Stromvolumen $\dot{\underline{J}}_1$ eine um mehr als 90^0 nacheilende EMK

$$\frac{\dot{\underline{E}}_1}{cm} = j\omega \frac{\dot{\underline{N}}}{cm} 10^{-8} .$$

Nimmt man die Wattkomponente dieser EMK

$$\frac{\dot{\underline{E}}_w}{cm} = -\,\omega \underline{\dot{B}} \cdot h_s 10^{-8} \cdot \Psi_1(\xi)$$

mit dem Stromvolumen $\dot{\underline{J}}_1$ zusammen, so repräsentiert das Produkt

$$\frac{W_1}{cm} = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{E}_w}{cm} \tilde{J}_1 = \frac{\nu}{100} \cdot \left(\frac{\tilde{\underline{B}}}{1000}\right)^2 \cdot h_s \cdot n \cdot 2{,}5\, \Psi_1(\xi) \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

eine elektrische Leistung. Wo bleibt diese? Sie wird nicht in dem unteren Stromkreise in Wärme verwandelt, sie wird vielmehr von ihm wie von dem Primärkreis eines Transformators auf die obere Stablage übertragen und dort in Wirbelströmen verzehrt. So haben wir bereits einen Teil der Wirbelstromverluste in Erfahrung gebracht, ohne die Ausbreitung der Wirbelströmung selbst näher zu verfolgen.

Dieser Teil ist außerdem der Hauptposten der ganzen Verlustbilanz. Und wenn ich auch den zweiten Anteil, der von der Feldkomponente

$$\dot{\underline{B}}_2 = \frac{\varDelta \dot{\underline{B}}}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\,\alpha \frac{h_s}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23b)$$

herrührt, hier gleichfalls noch berechnen will, so geschieht es nur der Vollständigkeit der Theorie zuliebe, nicht etwa, weil ich empfehlen möchte, diesen Betrag in der



Praxis auch wirklich zu berücksichtigen. — Die zweite Feldkomponente können wir zwischen ungesättigten Zähnen dadurch künstlich hervorbringen, daß wir in einer geschlossenen Nut dieselbe Stablage von der Höhe h_s mit einem Wechselstromvolumen von der Größe

$$\dot{\bar{J}}_2 = \frac{n}{0{,}4\,\pi} \Delta \dot{\bar{B}}$$

und der Periodenzahl unseres Wechselfeldes beschicken. Dann bildet sich eine Wirbelströmung

$$\dot{\varrho}_2 = \frac{\Delta \dot{\bar{B}}}{h_s} \cdot \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot \frac{n}{d} \left((1-j) \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{Cos}\,(1-j)\,\alpha y}{\mathfrak{Sin}\,(1-j)\frac{\xi}{2}} - 1 \right),$$

welche in der oberen Stabfaser den Ohmschen Spannungsabfall

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{E}_{\frac{h_s}{2}}}{cm} &= -\frac{\Delta \dot{\bar{B}}}{h_s} \cdot \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{1}{\lambda\, 10^4} \left[\frac{(1-j)\frac{\xi}{2}}{\mathfrak{Tg}\,(1-j)\frac{\xi}{2}} - 1 \right] \\ &= -\frac{\Delta \dot{\bar{B}}}{h_s} \cdot \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot 10^4} \left[\Phi_2(\xi) - j\,\Psi_2(\xi) \right] \\ &= -\frac{\Delta \dot{\bar{B}}}{h_s} \cdot \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot \frac{n}{d} \cdot \frac{1}{\lambda\, 10^4} \left[\frac{\xi}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\xi} - 1 - j\,\frac{\xi}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\xi} \right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 29)$$

hervorruft. Dieser Spannungsabfall besitzt die Wattkomponente

$$\frac{\dot{\bar{E}}_w}{cm} = -\,\omega\,\frac{\Delta \dot{\bar{B}}}{2}\, h_s \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{\xi^2}\, \Phi_2(\xi)$$

und bildet so mit dem Stromvolumen $\dot{\bar{J}}_2$ eine elektrische Leistung

$$\frac{W_2}{cm} = -\frac{1}{2}\,\frac{\tilde{E}_w}{cm} \cdot \tilde{J}_2 = \frac{\nu}{100} \cdot \left(\frac{\Delta \tilde{B}}{1000} \right)^2 \cdot h_s \cdot n \cdot \frac{1{,}25}{\xi^2}\, \Phi_2(\xi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; 30)$$

Diese Leistung hätten wir also zu decken, würden wir das Feld auf die angegebene Weise erregen, und daß die Erregung in Wirklichkeit auf andere Ursachen zurückzuführen ist, kann an der Größe der Verlustleistung nichts ändern. Mit anderen Worten: Der eben berechnete Wert stimmt auch in unserem Falle mit dem zweiten Beitrag der Wirbelstromverluste überein.

Es sind indes noch einige Umformungen nötig, um die Fassung 28) und 30) auf die in der Praxis gebräuchlichen Formen zu bringen. Entweder bezieht man nämlich die Verluste mit Hilfe eines Wirbelstromkoeffizienten σ_w auf das erregende Feld, die Periodenzahl und Stabhöhe, oder man berechnet eine ideelle Wirbelstromdichte ϱ_w, die bei gleichmäßiger Verteilung über den ganzen Stabquerschnitt dieselben Verluste hervorbringen würde. Im ersten Falle benützt man das Gleichungsschema:

$$\frac{W_1^{\,Watt}}{V^{cdm}} = \sigma_{w1} \left[\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{B}}{1000} \cdot h_s^{\,mm} \right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 31\,a)$$

bzw.

$$\frac{W_2^{\,Watt}}{V^{cdm}} = \sigma_{w2} \left[\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{B}}{1000} \cdot h_s^{\,mm} \right]^2 . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 31\,b)$$

Kombiniert man diese mit den ursprünglichen Gl. 28) und 30), so findet man für die Wirbelstromkoeffizienten die Definition

$$\sigma_{w1} = \left(\frac{\pi^2}{10}\cdot\frac{\lambda}{6}\right) f_{\varrho_1} \quad \text{mit} \quad f_{\varrho_1} = \frac{6}{\xi^3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos\xi} \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

bzw.

$$\sigma_{w2} = \left(\frac{\pi^2}{10}\cdot\frac{\lambda}{360}\right)\cdot f_{\varrho_2} \quad \text{mit} \quad f_{\varrho_2} = \frac{180}{\xi^4}\left(\frac{\xi}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\xi} - 1\right), \quad \ldots \quad 33)$$

f_{ϱ_1} und f_{ϱ_2} charakterisieren dabei die feldschwächende Wirkung der Wirbelströme. Sie besitzen also bei kleinen Werten der reduzierten Stabhöhe den Wert 1, fallen dann aber schnell, wie es das Diagramm 20) anzeigt. Für f_{ϱ_1} kann man dabei die folgenden Näherungsgleichungen verwenden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Zwischen } \xi = 0 \quad \text{und } \xi = 2{,}2: \; f_{\varrho_1} = 1 - 0{,}05\,\xi^3 \\ \quad\text{„}\quad \xi = 2{,}2 \quad\text{„}\quad \xi = \infty: \; f_{\varrho_1} = \dfrac{6}{\xi^3} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 32a)$$

Diese Kurven sind gleichfalls in Abb. 20 strichliert eingetragen. — Für f_{ϱ_2} gebe ich keine Näherungsgleichung an, denn, wie schon einmal erwähnt, sind die von dem Anstieg des Nutenfeldes über der Stabhöhe herrührenden Wirbelstromverluste recht unerheblich. Nicht nur, daß $(\Delta\tilde{B})^2$ für die oberen Stabdichten sehr viel kleiner als $(\tilde{B})^2$ ausfällt, auch der Wirbelstromkoeffizient σ_{w2} ist so viel kleiner als σ_{w1}, daß sich eine nähere Diskussion erübrigt.

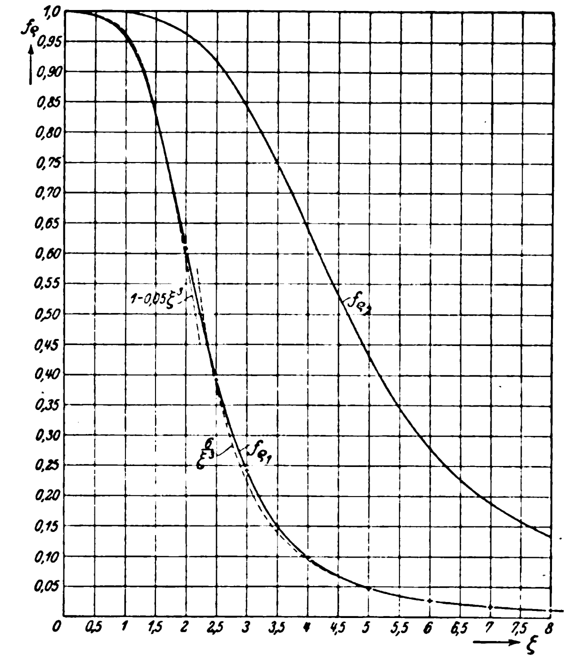


Abb. 20. **Zur Berücksichtigung der Querfeldschwächung durch die Korrektionsfaktoren f_{ϱ_1} und f_{ϱ_2}.**

Drückt man die Wirbelstromverluste auf die zweite Art, d. h. durch eine äquivalente Wechselstromdichte aus, so muß man die Gleichung

$$\frac{W^{\text{Watt}}}{V^{\text{cdm}}} = \frac{10^3}{\lambda}\cdot\left(\varrho_w \frac{\text{Amp}}{\text{qmm}}\right)^2$$

mit den früheren Gleichungen der Wirbelstromverluste identifizieren. Dann ergibt sich:

$$\varrho_w = \sqrt{\frac{W}{V}\cdot\frac{\lambda}{1000}},$$

d. h.:

$$\varrho_{w1} = 0{,}64\left[\frac{\nu}{100}\cdot\frac{\tilde{B}}{1000}\cdot h_s^{\text{mm}}\cdot\frac{\lambda}{50}\right]\cdot\sqrt{f_{\varrho_1}} \;\ldots \left(\text{Effektivwert in } \frac{\text{Amp}}{\text{qmm}}\right) \quad \ldots \quad 34)$$

und

$$\varrho_{w2} = 0{,}083\left[\frac{\nu}{100}\cdot\frac{\tilde{B}}{1000}\cdot h_s^{\text{mm}}\cdot\frac{\lambda}{50}\right]\cdot\sqrt{f_{\varrho_2}} \;\ldots \frac{\text{Amp}_{\text{eff.}}}{\text{qmm}} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

Setzt man z. B.

$$\nu = 50$$

$$\tilde{B} = 560$$

$$\lambda = 50$$

$$\frac{d}{n} = 0{,}64\,,$$

so würde bei einer Stabhöhe von 16 mm:

$$\varrho_{w1} = 0{,}09\, h_s^{mm} = 1{,}44 \frac{\text{Amp}_{\text{eff.}}}{\text{qmm}}.$$

Nun können in der oberen Stablage Induktionen von der angenommenen Höhe als Maximum der Umfangskurve sehr wohl auftreten. Mit Rücksicht auf die Zusammensetzung dieser Kurve aus Grund- und Oberwelle wäre schätzungsweise

$$(\varrho_w)_{\text{total}} = 1{,}4 \cdot \varrho_{w1} = 2 \frac{\text{Amp}_{\text{eff.}}}{\text{qmm}}.$$

Die Wirbelstromverluste bei Leerlauf würden also ca. $50\,^0/_0$ der normalen Kupferverluste betragen, und das ist sicherlich ein Wert, der schon bei der Vorausberechnung der Maschine in Betracht gezogen werden sollte.

B. Die Wirbelstromverluste bei großen reduzierten Stabhöhen: $\xi > 1$.

Im vorigen Abschnitt gingen wir von dem Nutenquerfeld und der Zahnsättigung der unbewickelten Maschine aus und behielten diese Zahnsättigung auch für den bewickelten Anker bei. Wir wußten zwar: Die Schwächung des Nutenquerfeldes durch die Wirbelströme muß zu einer Erhöhung der Zahnsättigung führen; aber wir sagten uns, daß diese neue, wirkliche Zahnsättigung doch nicht sehr weit von der angenommenen verschieden sein könne, solange die Stabhöhen sich innerhalb der bei Gleichstrommaschinen und Umformern gebräuchlichen Grenzen halten.

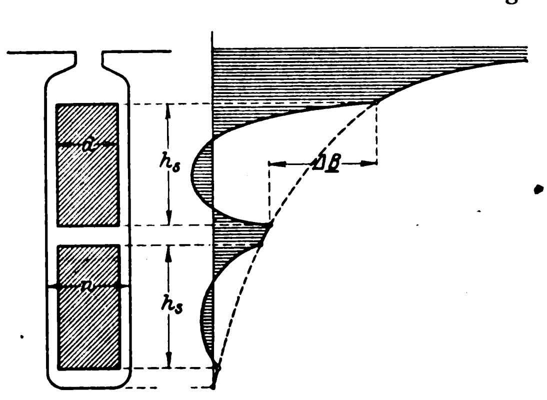


Abb. 21. Querfeldverteilung bei sehr großen reduzierten Stabhöhen.

Begegnen wir aber einmal im Großmaschinenbau Synchrongeneratoren mit sehr viel größeren Stabhöhen — sagen wir z. B. $\xi = 2{,}5$ und darüber —, dann wird die feldschwächende Wirkung der Wirbelströme doch zu erheblich und wir erhalten sicherlich bessere Resultate, wenn wir mit unserer Näherungstheorie gerade am umgekehrten Ende anknüpfen. Anstatt also bei der Bestimmung der Umfangskurve des Nutenquerfeldes von der unbewickelten Maschine auszugehen, denken wir uns zunächst eine ideelle Maschine mit so großen reduzierten Stabhöhen, daß die Entlastung der Zähne durch das Nutenquerfeld überhaupt keine Rolle mehr spielt (Abb. 21). Das hat schon den großen Vorteil, daß nun die Ermittelung der Umfangskurve

$$B_h = f(x)$$

gar keine Mühe mehr verursacht. Und es hat den weiteren Vorteil, daß die Ergebnisse nicht mehr optimistisch, sondern pessimistisch gefärbt sind, insofern man den Feldanstieg $\Delta \underline{B}$ längs der Stabhöhe etwas überschätzt.

Kennt man erst $\Delta \underline{B}$, dann lassen sich natürlich alle Resultate des vorigen Abschnittes wiederum anwenden: Man kann nach den dortigen Entwickelungen [27)] die Feldschwächung nachträglich kontrollieren, man kann ferner die Wirbelstromkoeffizienten σ_{w1} und σ_{w2} berechnen [32), 33)] oder auch [34), 35)] die reduzierte Stromdichte ϱ_w, die bei gleichmäßiger Verteilung über dem Querschnitt dieselben Kupferverluste erzeugen würde. Es kommt also einzig darauf an, die in Abb. 21 strichlierte Feldanstiegskurve abhängig von der Stellung der Nut unter den Polen so zu bestimmen, als wenn eine Entlastung der Zähne durch das Nutenquerfeld überhaupt nicht in Frage käme.

Um das auszuführen, bedarf es keiner neuen „Theorie". Innerhalb der Nut haben wir ja bereits die Feldverteilung auf derselben Basis ermittelt, und für die Veränderlichkeit längs des Ankerumfanges genügt jetzt die Bestimmung der beiden Werte

$$(B_{hm})_0 = \frac{h}{n}\left\{\frac{H'_{z\,max} + H'_{zu}}{2} - \frac{H'_{z\,max} - H'_{zu}}{6}\zeta'\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

und

$$(B_{h1})_0 = (B_{hm})_0 - \frac{h}{n}\left\{\frac{H''_{z\,max} + H''_{zu}}{2} - \frac{H''_{z\,max} - H''_{zu}}{6}\zeta''\right\}, \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

wobei wir den letzten Wert wieder den Abszissen

$$x_1' = x_m - u_1 \leqq x_m - \frac{t}{2}$$

und

$$x_1'' = x_m + u_1 \geqq x_m + \frac{t}{2}$$

zuordnen können.

Durch die so erhaltenen drei Punkte legen wir alsdann genau wie bisher eine parabolische Interpolationskurve (Abb. 22), nur lassen wir diese nun nicht allein gegen die neutrale Zone, sondern auch gegen die Polmitte mit je einem neuen parabolischen Ast ohne Knickstelle auf Null herabsinken. Wir geben also den früheren sanfteren Abfall von x_1' gegen die Polmitte auf. Er war ja seinerzeit auch nur der Verminderung der Zahnsättigung durch das Nutenquerfeld zu verdanken, auf die wir uns jetzt nicht mehr verlassen dürfen.

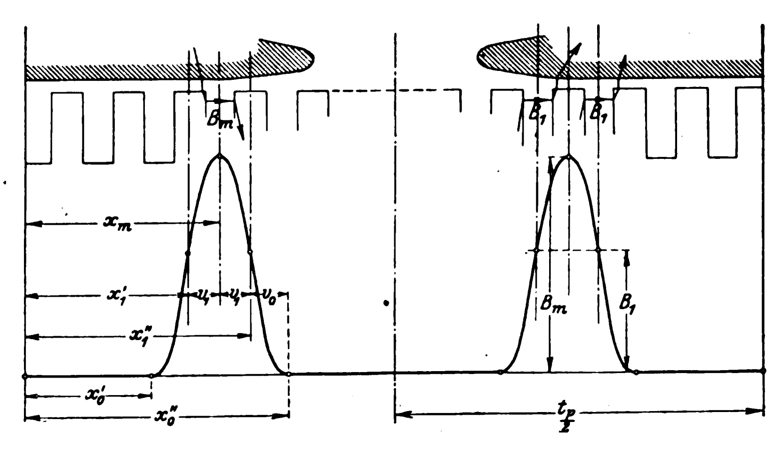


Abb. 22. Umfangskurve der Querfeldinduktion bei sehr großen reduzierten Stabhöhen.

Die harmonische Analyse der Umfangskurve ist wiederum leicht durchzuführen und liefert allgemein:

$$\hat{B}_q = B_m \cdot \frac{16}{q^2\pi^2} \cdot \frac{t_p}{u_0} \sin q \frac{\pi}{t_p} x_m \left\{\frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} u_1}{q \frac{\pi}{t_p} u_1} - \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p}(u_1 + u_0)}{q \frac{\pi}{t_p}(u_1 + u_0)}\right\} \quad \ldots \quad 36)$$

oder für den besonders häufigen Fall $u_1 = u_0$

$$\hat{B}_q = B_m \cdot \frac{16}{q^2\pi^2} \cdot \frac{t_p}{u_1} \sin q \frac{\pi}{t_p} x_m \frac{\sin q \frac{\pi}{t_p} u_1}{q \frac{\pi}{t_p} u_1}\left(1 - \cos q \frac{\pi}{t_p} u_1\right) \ldots \ldots \quad 36a)$$

Dieses Verhältnis, indem sich die Pulsation des Querfeldes für $y = h$ in ihre harmonischen Komponenten auflöst, kann auch für die Schwankung der mittleren Induktion $\underline{B}$ und des Feldanstieges $\Delta \underline{B}$ über einer Stablage als gültig angenommen werden. Wir haben uns also durch dieses einfache Verfahren so viele Unbekannte verschafft, daß wir nun für eine beliebige Harmonische die Berechnung der Wirbelstromverluste genau nach den früheren Anweisungen und Formeln durchführen können. Allerdings muß ich noch einmal wiederholen: Wir erhalten so die Wirbelstromverluste durch das Nutenquerfeld etwas zu groß. Doch schadet das praktisch um so weniger, als bei großen Synchronmaschinen mit hohen und breiten Stäben auch die Verluste durch das Nutenlängsfeld — auf die ich bisher nicht eingegangen bin — die Gesamtverluste erhöhen.

Liegt aber einmal ein besonderes Interesse an einer genauen Verlustermittelung für mittlere ($\xi = 1$ bis 2) und große Stabhöhen vor, kann man dann die entwickelte Näherungstheorie nicht noch etwas verfeinern? Gewiß. Man braucht nur die Entlastung der Zähne durch das Nutenquerfeld weder vollkommen zu vernachlässigen, noch auch so zu übertreiben, wie wir es bei kleinen Stabhöhen tun durften. Man wird zwar zunächst auch wieder nach dem Verfahren a die Umfangskurve zu ermitteln, jedoch von Anfang an mit einem größeren magnetischen Widerstand des Querfeldes, also

$$n_{corr} > n,$$

operieren[1]). Dem Anfänger mag das Diagramm 26) die mangelnde Erfahrung ersetzen. — Sodann wird man die Umfangskurve nicht allein harmonisch analysieren, sondern auch für jede Welle die Verringerung der Wattkomponente durch die Wirbelstromrückwirkung bestimmen [Gl. 27)]. Für die Entlastung der Zähne käme dann nur

$$(B_q)_{corr} = B_q \cdot \Phi_1(\xi)$$

in Betracht, und indem man alle diese reduzierten Wellen mindestens für $x = x_m$ noch einmal superponiert, erhielte man für die mittlere Wattkomponente des Nutenquerfeldes über den Stabhöhen einen neuen Scheitelwert $(B_m)_{corr}$ an Stelle des ursprünglichen Wertes B_m. Das bedeutet, daß sich die Erhöhung der Zahnsättigung infolge der Wirbelstromrückwirkung im Mittel durch eine Verbreiterung der Nut von n auf

$$n_{corr} = n \frac{B_m}{(B_m)_{corr}} \quad \text{. . . . . 37)}$$

berücksichtigen ließe. Ist dies zufällig schon der Wert, den man von Anfang an geschätzt hatte, so braucht man die Rechnung nicht zu wiederholen. Andernfalls wird man mit dem eben ermittelten Werte der korrigierten Nutbreite in den früheren Formeln die Koeffizienten α und β — und zwar nur diese Koeffizienten — berichtigen. D. h. man schreibt nunmehr

$$\mathfrak{Sin}\left(\alpha_{corr} \cdot \frac{t}{2}\right) = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{(z_{e\,mitt}\,\mu' + n_1) \cdot n_{corr}} \quad \text{. . . . . . . 10c)}$$

und

$$\mathfrak{Sin}\left(\beta_{corr} \cdot \frac{t}{2}\right) = p \frac{\pi}{4h} \sqrt{(z_{e\,mitt}\,\mu'' + n_1)\, n_{corr}} \quad \text{. . . . . 10d)}$$

Im übrigen aber bleiben sämtliche Formeln des ersten Abschnittes unverändert und die Berechnung der Umfangskurve nebst der Bestimmung der Verluste ist nunmehr endgültig nach diesen Formeln durchzuführen.

---

[1]) Man kann natürlich dieselbe Methode auch für kleinere Stabhöhen ($\xi < 1$) anwenden, indem man n_{corr} gemäß Abb. 26 wählt. Eine nochmalige Probe auf die Richtigkeit dieser Annahme ist hierbei nicht nötig.



IV. Die Summierung der Wirbelstromverluste.

Um die gesamten Wirbelstromverluste zu erhalten, muß man die Verluste der einzelnen Harmonischen summieren. Das ist so selbstverständlich, daß ich deshalb allein keinen besonderen Abschnitt einzurücken brauchte. Auch kann ich kein theoretisches Verfahren angeben, welches uns durch gewisse Kunstgriffe diese nicht unerhebliche Rechenarbeit erleichterte, denn ich müßte sonst für jede neue Form der Umfangskurve aufs neue Koeffizienten entwickeln. — Aber die Praxis kann diese Rechenarbeit durch das Experiment ersetzen. Hier ist es ein Leichtes, für die gebräuchlichsten Typen im Prüffeld Erfahrungskoeffizienten zu ermitteln. Es fehlte bisher nur eine gesunde Theorie, um ihr dazu den Weg zu weisen. Was daher dieser Abschnitt zu bringen hat, sind weniger theoretische Erörterungen, als theoretisch begründete Richtlinien für die Sammlung und Sichtung praktischer Erfahrungen.

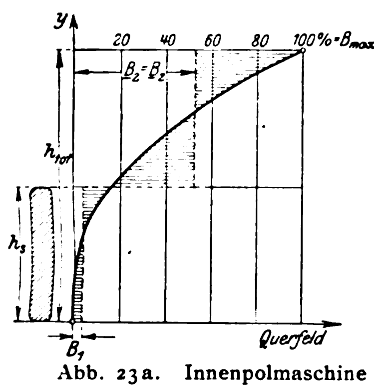


Abb. 23a. Innenpolmaschine z = 2.

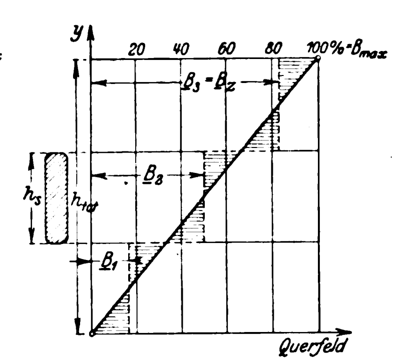


Fig. 23b. ∞-vielpolige Maschine z = 3

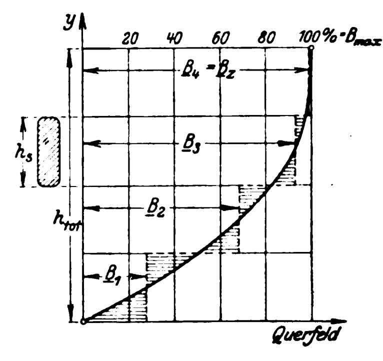


Fig. 23c. Außenpolmaschine z = 4.

Abb. 23a bis c. Zur Ableitung des quadratischen Feldmittelwertes $\mathrm{Mitt}(\underline{B}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=z} (B_i)}{z}}$.

Was dem praktischen Berechner not tut, ist eine einfache Formel und ein Kurvenblatt, mit deren Hilfe er die Wirbelstromverluste jeder Maschine genau genug schätzen kann. Die Formel soll alle diejenigen Größen enthalten, welche leicht und sicher zu berechnen sind. Alle komplizierteren Abhängigkeiten müssen aus dem Kurvenblatt als Funktion geeigneter Hilfsgrößen zu entnehmen sein. Dabei kann man sich im Prinzip an die beiden Formulierungen 31) und 34) anlehnen. Entweder berechnen wir also die Wirbelstromverluste direkt, indem wir sie auf einen gewissen Mittelwert des Nutenquerfeldes beziehen, oder wir berechnen die äquivalente Stromdichte ϱ_w, die bei gleichmäßiger Verteilung über alle Stablagen dieselben Verluste erzeugen würden. Im ersten Falle schreiben wir

$$\frac{W^{\mathrm{Watt}}}{V^{\mathrm{cdm}}} = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) \cdot \left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\mathrm{Mitt}(\underline{B}_m)}{1000} \cdot h_s\,\mathrm{mm}\right)^2 \cdot F_\varrho, \quad \ldots \quad 38)$$

im zweiten Falle

$$\varrho_w = 0{,}64\left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\mathrm{Mitt}(\underline{B}_m)}{1000} \cdot h_s\,\mathrm{mm} \cdot \frac{\lambda}{50}\right) \sqrt{F_\varrho}. \quad \ldots \quad 39)$$

Dabei bezeichnet

ν die synchrone Frequenz,

h_s die Höhe einer Stablage

und

$$\mathrm{Mitt}(\underline{B}_m) = \sqrt{\frac{\underline{B}_{m1}^2 + \underline{B}_{m2}^2 + \cdots + \underline{B}_{mz}^2}{z}} \quad \ldots \quad 40)$$

den quadratischen Mittelwert, welchen das Maximum B_m der Umfangskurve über den einzelnen (z) Stablagen besitzt (Abb. 23). Man hätte dann nichts zu tun, als nach den Regeln des ersten Abschnittes B_{mh} und die Verteilung des Nutenquerfeldes zwischen Boden und Öffnung aufzusuchen. Alles, was sonst noch in Betracht kommt, muß in dem Reduktionsfaktor F_ϱ seinen Ausdruck finden.

F_ϱ charakterisiert daher in erster Linie die Rückwirkung der Wirbelströme und ist in diesem Sinne eine Funktion der reduzierten Stabhöhe ξ. Je größer ξ, um so mehr unterdrücken die Wirbelströme das Nutenquerfeld, um so kleiner daher F_ϱ. F_ϱ ist aber auch weiterhin eine Funktion der Wellenform der Umfangskurve. Besitzt diese stark ausgeprägte höhere Harmonische, wie dies für schwach gesättigte Maschinen oder besonders große Stabhöhen zutrifft, so haben wir etwas andere Werte zu erwarten als bei hohen Zahnsättigungen und mäßigen Stabhöhen, bei denen das Nutenquerfeld zwischen Polmitte und -kante nur allmählich ansteigt.

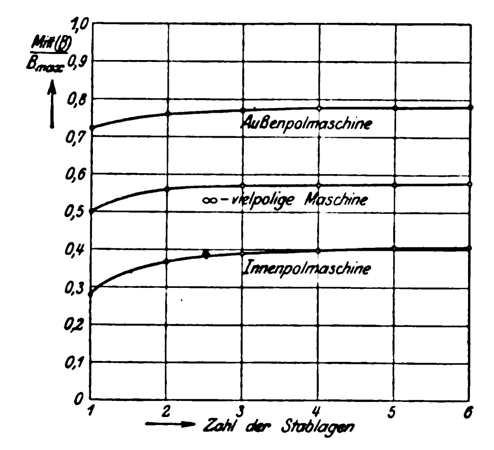


Abb. 24. Verhältnis des quadratischen Feldmittels zum maximalen Feld.

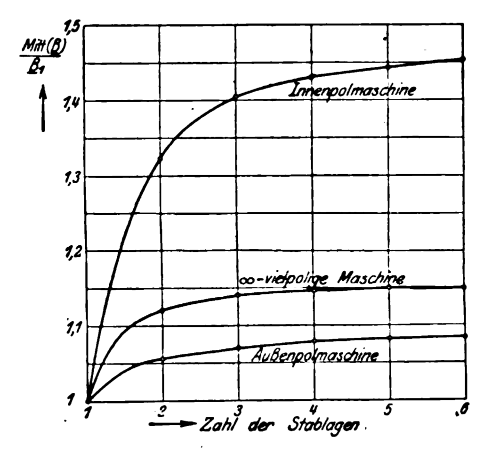


Abb. 25. Verhältnis des quadratischen Feldmittels zum arithmetischen Mittelwert.

Kennt man diese Umfangskurve, so läßt sich F_ϱ natürlich theoretisch berechnen. Man müßte dann nur die abgekürzte Formel 38) dem ausführlicheren theoretischen Ansatz

$$\frac{W^{\text{Watt}}}{V^{\text{cdm}}} = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) \cdot \sum_{q=1,3}^{\infty} \left(\frac{\nu_q}{100} \cdot \frac{\text{Mitt}(\widehat{B}_{mq})}{1000} \cdot h_s\,\text{mm}\right)^2 \cdot f_{\varrho q} \quad \ldots\ldots \quad 41)$$

gleichsetzen; dann würde sich ergeben

$$F_\varrho = \sum_{q\ 1,3}^{\infty} f_{\varrho q} \left(q \cdot \frac{\widehat{B}_q}{B_m}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

wobei $\frac{\widehat{B}_q}{B_m}$ das Verhältnis der Wellenamplitude der q-ten Harmonischen zum Maximalwert B_m der Umfangskurve darstellt. Aber eben diese Summierung ist es ja, welche das Kurvenblatt für F_ϱ dem praktischen Berechnungsingenieur ersparen soll.

Man wird also in der Praxis so vorzugehen haben, daß man für einige Typen von Innen- und Außenpolmaschinen das Nutenquerfeld bei Stillstand bestimmt und hierauf in einem möglichst weiten Tourenbereiche bei verschiedener Anzahl der Stablagen auch die Wirbelstromverluste aufnimmt. Auf diese Weise läßt sich ein großer Skalenabschnitt der reduzierten Stabhöhe bestreichen. Führt man die Versuche außerdem bei verschiedenen Erregungen durch, so geben sie auch über den Einfluß der Zahnsättigung auf die Wellenform Aufschluß. Wenn man dann die gewonnenen Resultate zu dem gewünschten Ansatz 38) in Beziehung setzt und rückwärts F_ϱ bei einigen konstanten Werten der maximalen Zahnsättigung als Funktion von ξ berechnet und

aufträgt, so beherrscht man bereits ein so großes Gebiet, daß man auf andere Typen und Ausführungen durch Interpolation schließen kann.

Ich muß es mir versagen, derartige Kurvenscharen hier mitzuteilen. Damit man aber doch sieht, was man im großen und ganzen zu erwarten hat, habe ich die theoretische Bestimmung von F_ϱ für unser Zahlenbeispiel des Gleichstrommotors durchgeführt (Abb. 26). Obwohl dieser Kurve die Querfeldverteilung der unbewickelten Maschine zugrunde liegt, darf sie doch auch für große reduzierte Stabhöhen verwendet werden, vorausgesetzt, daß man der Steigerung der Zahnsättigung durch eine entsprechende Erhöhung der Querinduktion Mitt (B_m) in Formel 38) bereits Rechnung getragen hat. Im übrigen enthält die beigefügte Tabelle das ganze Zahlenmaterial, so daß die Kontrolle beliebiger Werte leicht möglich ist. Ich kann mich daher auf die Diskussion der Resultate beschränken.

Wie nicht anders zu erwarten, gleicht die Funktion dem Rückwirkungsfaktor f_ϱ, den ich in Abb. 20 als Funktion der reduzierten Stabhöhe aufgetragen habe. Nur ist der Abszissenmaßstab in beiden Kurven verschieden. Man kann sich aber überlegen, wie man den Abszissenmaßstab der F-Kurve willkürlich verändern müßte, oder sagen wir gleich, mit welchem Faktor $\sqrt{q}$ man ihn multiplizieren müßte, um überall dasselbe konstante Verhältnis

$$\frac{F_\varrho}{f_\varrho} = 8{,}3$$

zu erhalten. Dann würde nämlich q die Ordnungszahl derjenigen Harmonischen bedeuten, die — wenn ich so sagen darf — den Schwerpunkt der ganzen Wellenschar bildet. In Abb. 26 habe ich denn auch den so definierten Faktor als Funktion von ξ aufgetragen. Man sieht, daß für kleine reduzierte Stabhöhen in der Gegend von $\xi = 0{,}5$ die Oberwellen in der neunten gravitieren; bei größeren Stabhöhen um $\xi = 1{,}0$ herum wird die siebente vorherführend, bis schließlich bei großen Stabhöhen die fünfte Harmonische den Schwerpunkt bildet.

Tabelle zur Berechnung der Faktoren F_ϱ, F_h, F_ν.

Ordnungszahl der Oberwelle	Amplitude der Oberwelle	$\left(\frac{\hat{B}_q}{B_m} \cdot q\right)$	$\left(\frac{\hat{B}_q}{B_m} q\right)^2 \cdot f_\varrho$						
q	$\hat{B}_q$		$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 0{,}5$	$\xi_1 = 1{,}0$	$\xi_1 = 1{,}5$	$\xi_1 = 2{,}0$	$\xi_1 = 2{,}5$	$\xi_1 = 3{,}0$
1	180	0,333	0,111	0,110	0,107	0,092	0,0676	0,0436	0,0269
3	169	0,939	0,880	0,856	0,647	0,312	0,1355	0,0669	0,0376
5	124	1.150	1,322	1,242	0,661	0,225	0,0899	0,0455	0,0263
7	72	0,931	0,872	0,780	0,296	0,087	0,0353	0,0182	0,0105
9	93	1,548	2,400	1,995	0,581	0,161	0,0667	0,0341	0,0198
11	10	0,198	0,042	0,032	0,007	0,002	0,0008	0,0004	0,0002
13	56	1,352	1,812	1,272	0,247	0,069	0,0293	0,0149	0,0087
15	14	0,390	0,151	0,096	0,016	0,005	0,0020	0,0010	0,0006
17	23	0,725	0,524	0,319	0,047	0,013	0,0056	0,0029	0,0017
19	12	0,422	0.178	0,093	0,013	0,004	0,0016	0,0008	0,0005
$F_\varrho = \Sigma \left(\frac{\hat{B}_q}{B_m} q\right)^2 \cdot f_\varrho$			8,292	6,795	2,622	0,970	0,4343	0,2283	0,1328
$F_h = \xi_1^2 F_\varrho$			0	1,70	2,622	2,18	1,741	1,43	1,195
$F_\nu = \xi_1^4 F_\varrho$			0	0,425	2.622	4,91	6,93	8,92	10,75

Will man die F_ϱ-Kurve durch Näherungsformeln darstellen, so kann man bei kleinen reduzierten Stabhöhen

$$\text{zwischen } \xi = 0 \qquad \text{und} \qquad \xi = 0{,}75$$

das Gesetz $F_\varrho = 8{,}3 - 16\,\xi^{2,5}$ annehmen, während bei größeren Stabhöhen

$$\text{zwischen } \xi = 0{,}75 \qquad \text{und} \qquad \xi = 3$$

das Gesetz $F_\varrho = \frac{2,6}{\xi^{2,5}}$ zu verwenden ist. Die Funktionen sind in Abb. 26 stricheliert eingetragen, und die Annäherung ist gewiß nicht schlecht. Doch ist der Verlauf der F_ϱ-Kurve zu sehr von der besonderen Form der Umfangskurve abhängig, als daß auf derartige Formeln ein besonders großes Gewicht zu legen wäre. Maschinen mit hoher Zahnsättigung besitzen z. B. ein weit weniger scharf hervortretendes Maximum B_m der Umfangskurve und daher weniger stark ausgeprägte Oberwellen. Bei solchen Maschinen liegt daher derjenige Teil der F_ϱ-Funktion, in dem die hohen Harmonischen dominieren, d. i. der Bereich zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ wesentlich tiefer (es sind mir Anfangswerte bis herunter zu $(F_\varrho)_{\xi=0} = 0{,}57$ begegnet). Wenn dann aber später bei größeren reduzierten Stabhöhen umgekehrt die tieferen Harmonischen die Vorherrschaft erlangt haben, so liegt die F_ϱ-Funktion naturgemäß etwas höher als wir sie für unser Beispiel berechnet haben. In jedem Falle besitzt sie so hohe Werte und zeigt dabei eine so starke Veränderlichkeit, daß man es wohl verstehen kann, weshalb sich die zweifellos vorhandenen praktischen Erfahrungen ohne eine leitende Theorie noch nicht zu etwas Festem verdichten konnten.

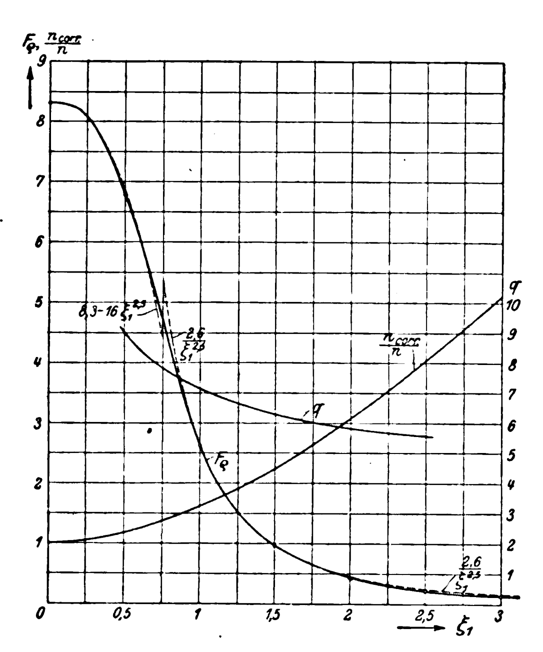


Abb. 26. Darstellung der Wirbelstromrückwirkung durch den Faktor F_ϱ.
(ξ_1 = reduzierte Leiterhöhe, bezogen auf die synchrone Periodenzahl.)

V. Beispiele und Folgerungen.

Von einer „Theorie“ der Wirbelstromverluste verlangt man nicht allein, daß sie die Vorausberechnung dieser Verluste für jeden speziellen Fall ermögliche, sondern auch, daß sie allgemeine Gesichtspunkte entwickele, nach denen man ohne weiteres ausgeführte Maschinen beurteilen und neue Maschinen günstig entwerfen kann. Dazu gehört, daß man über den Einfluß derjenigen Größen orientiert ist, die beim Entwurf der Maschine wenigstens innerhalb gewisser Grenzen wählbar sind; es sind dies Induktionen, Stabhöhe und Periodenzahl.

Nur bei Wechselstrommaschinen ist die Periodenzahl vorgeschrieben. Bei Gleichstrommaschinen ist sie ebensowenig eindeutig bestimmt wie Polzahl und Tourenzahl, und damit erhebt sich die Frage: in welchem Maße wachsen die Wirbelstromverluste mit der Periodenzahl?

Hierfür ist — ceteris paribus — das Produkt $\nu^2 \cdot F_\varrho$ oder auch

$$F_\nu = \xi^4 \cdot F_\varrho \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 43)$$

maßgebend. Denn, wie wir wissen, wächst die reduzierte Stabhöhe mit der Wurzel aus der Periodenzahl. Ich habe daher in Abb. 27 dieses Produkt als Funktion von ξ^2 aufgetragen und eine Kurve erhalten, die anfänglich mit ν^2 zunimmt, dann aber wendet und jenseits $\xi = 1$ nur noch proportional $\sqrt[4]{\nu^3}$ ansteigt. Am häufigsten bewegt man sich in dem Bereich $\xi = 0{,}8$ bis $1{,}2$, in dem Verluste und Periodenzahl nahezu in Proportion stehen. Setzen wir z. B. den Fall, unser Gleichstrommotor arbeite mit zwei



Stablagen zu je fünf Leitern und einem Querschnitt von $0{,}12 \times 1{,}6 \text{ cm}^2$, dann wäre bei 750 U. p. M. entsprechend 25 Perioden:

$$\xi \doteq h_s \sqrt{\frac{\nu}{50} \cdot \frac{d}{n} \cdot \frac{\lambda}{50}} = 1{,}6 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}6 \cdot 1} = 0{,}876$$

$$F_{25} = 3{,}55$$

und

$$\xi^4 \cdot F_{25} = 2{,}1.$$

Dagegen wäre bei 1500 U. p. M. entsprechend 50 Perioden

$$\xi = 1{,}24$$

$$F_{50} = 1{,}55$$

und

$$\xi^4 \cdot F_{50} = 3{,}7.$$

Die Verluste hätten sich also mit der Verdoppelung der Tourenzahl auf das $1^3/_4$fache erhöht. Es ergibt sich daraus von selbst die Forderung, schnellaufende Maschinen mit nicht zu großen Zahnsättigungen und Stabhöhen zu entwerfen.

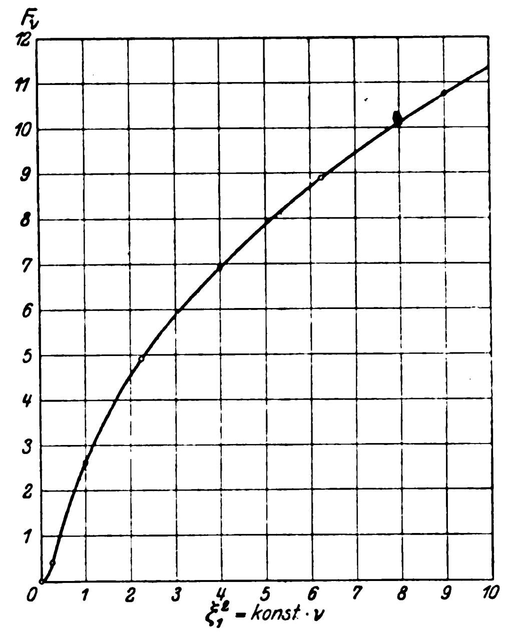


Abb. 27. Darstellung des Faktors F_ν.

Sehr oft ist freilich der aktive Kupferquerschnitt einer Nut schon durch die Rücksicht auf die Modellausnutzung vorgeschrieben. Aber auch in solchen Fällen hat man immer noch die Zahl der Stablagen in der Hand, und zwar nicht nur bei Wechselstrommaschinen, sondern auch bei Gleichstromankern. Ich will damit natürlich nicht einer Vierlagenwicklung das Wort reden; darauf würden sich mit Recht weder Konstrukteure noch Berechner einlassen. Aber man kann doch auch bei der Zweilagenwicklung die beiden übereinander angeordneten Stäbe in parallele Leiter unterteilen und durch passende Führung dieser Teilleiter ebenso geringe Verluste erzielen als mit einer Mehrlagenwicklung. Ich habe auf diesen Kunstgriff schon bei anderer Gelegenheit[1]) hingewiesen, jedoch absichtlich die Ausführungsmöglichkeiten verschwiegen. Richter hat dann auch diese in einem späteren Aufsatz[2]) mitgeteilt.

Die Anzahl der Stablagen beeinflußt alle drei Faktoren der Verlustformel 38): Vor allem die Stabhöhe h_s, mit welcher die Verluste quadratisch zu wachsen scheinen. Sodann aber auch den Rückwirkungsfaktor F_ϱ, der mit der Verminderung der Stabhöhe zunimmt und so insbesondere bei großen Stabhöhen das quadratische Gesetz sehr erheblich modifiziert. Und endlich auch den quadratischen Mittelwert $\text{Mitt}(B_m)$, welchen das Feld einer Nut über den Stablagen besitzt. Läßt man den letzten Punkt zunächst aus dem Spiele, so erscheint für die Verluste das Produkt

$$F_h = \xi^2 \cdot F_\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

[1]) „Die Theorie der zusätzlichen Kommutierungsverluste von Gleichstrommaschinen." Archiv f. Elektrot. **3**, 1915, 10/11. Heft.

[2]) „Über zusätzliche Stromwärme. III. Nutenwicklungen mit unterteilten Leitern." Archiv f. Elektrot. **5**, 1916, 1/2. Heft.

maßgebend. Diese Funktion, die in Abb. 28 über der reduzierten Stabhöhe aufgetragen ist, zeigt ein sehr überraschendes Verhalten: während man nämlich gewöhnlich mit einem quadratischen Anstieg der Verluste rechnet, zeigt sich hier, daß dieses Gesetz nur unterhalb der gebräuchlichen Stabhöhen erfüllt ist. Schon im normalen Arbeitsgebiet zwischen $\xi = 0{,}7$ und $1{,}2$ wächst der Verlustfaktor F_h praktisch überhaupt nicht mehr und darüber hinaus nimmt er sogar langsam aber stetig ab. Mit anderen Worten: Schon bei verhältnismäßig kleinen reduzierten Stabhöhen wird dem Anwachsen der Verluste dadurch ein Ziel gesetzt, daß die Wirbelströme das Nutenquerfeld einfach in die Zähne zurückdrängen. Auf diese Weise wird die Nut mehr und mehr feldfrei und die Verluste sinken, anstatt nach der gebräuchlichen Anschauung weiter zu steigen.

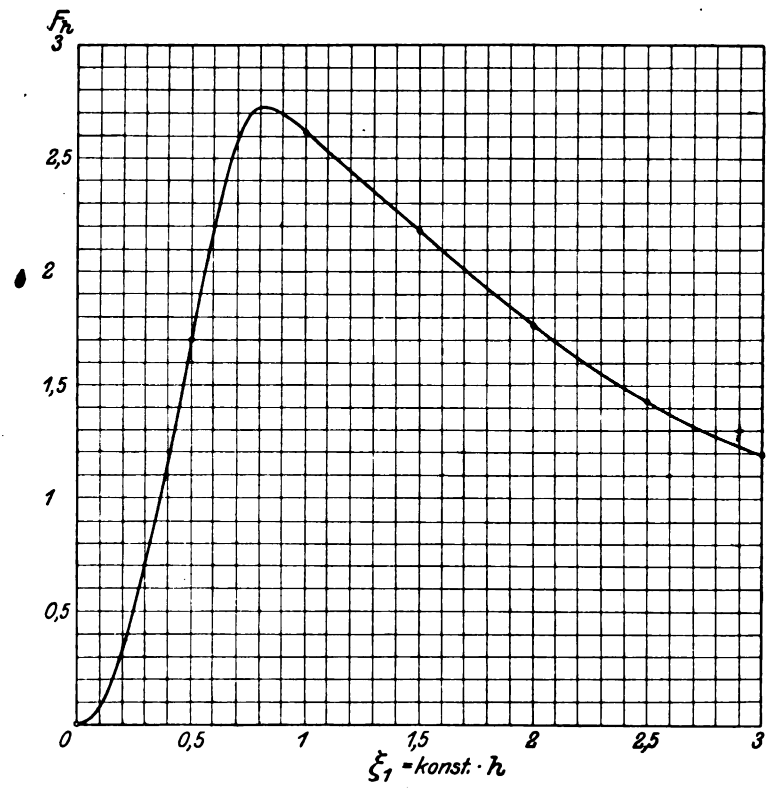


Abb. 28. Darstellung des Rückwirkungsfaktors F_h.

Dieses eigentümliche Verhalten klärt gar manchen scheinbaren Widerspruch auf. So wird zuweilen versichert, bei gewissen Maschinen seien trotz gleicher Sättigung höhere zusätzliche Verluste gemessen worden als bei Maschinen mit größeren Stabhöhen. Jetzt wissen wir, daß dies oberhalb $\xi = 1$ recht gut der Fall sein kann, ja, daß hier eine Unterteilung der Stäbe sogar unbedingt mit einem Mißerfolg enden müßte. Wenn man also überhaupt auf die Unterteilung zurückgreifen will — und bei hoch gesättigten Schnelläufern bleibt gar keine andere Wahl — so muß man schon die ungeteilte Stabhöhe unter $\xi = 1$ halten. Für unser Zahlenbeispiel trifft diese Voraussetzung wenigstens für die untere Tourenzahl zu und demgemäß ist auch der Erfolg hier ein durchgreifender. Lösen wir nämlich jeden Leiter in zwei übereinander angeordnete Teilstäbe von je

$$0{,}12 \times 0{,}8 = 0{,}096 \text{ cm}^2$$

Querschnitt auf, so ergibt sich



bei 750 U. p. M. entsprechend 25 Perioden

ohne Unterteilung	$\xi' = 0{,}876$	$F_\varrho' = 3{,}55$	$F_h' = 2{,}7$
mit „	$\xi'' = 0{,}438$	$F_\varrho'' = 7{,}2$	$F_h'' = 1{,}38$

und somit ein Güteverhältnis $\frac{F_h'}{F_h''} = 1{,}95.$

Dagegen bei 1500 U. p. M. entsprechend 50 Perioden

ohne Unterteilung	$\xi' = 1{,}24$	$F_\varrho' = 1{,}55$	$F_h' = 2{,}4$
mit „	$\xi'' = 0{,}62$	$F_\varrho'' = 5{,}85$	$F_h'' = 2{,}25$

und somit ein Güteverhältnis $\frac{F_h'}{F_h''} = 1{,}07.$

Das Güteverhältnis $\frac{F_h'}{F_h''}$ allein gibt allerdings noch nicht das wirkliche Verlustverhältnis wieder. Denn ich machte schon einmal darauf aufmerksam, dass die Wahl der Stablagenzahl zugleich den Mittelwert des Querfeldes über den Stablagen verändert. Dieser Einfluß äußert sich zudem in zwei Richtungen: Einmal ist an und für sich schon der quadratische Mittelwert des Querfeldes von der Lagenzahl abhängig, wenn auch die Querfeldverteilung selbst sich innerhalb der Nut nicht ändert. Ich habe z. B. in Abb. 23 bis 25 für drei typische Verteilungskurven den quadratischen Mittelwert gegen den Maximalwert und gegen den arithmetischen Mittelwert gemessen. Dabei zeigt sich stets eine Zunahme dieses Wertes mit der Lagenzahl, so daß schon bei zwei Stabschichten das quadratische dem arithmetischen Mittel um einen nicht zu vernachlässigenden Betrag überlegen ist.

Immerhin ist diese Erscheinung meist von untergeordneter Bedeutung gegenüber der mehrfach beschriebenen Tendenz der Wirbelströme, bei großen reduzierten Stabhöhen den Nutenquerfluß wieder in die Zähne zurückzutreiben. Denn wenn wir auch in unseren Verlustformeln durchweg mit dem *ideellen* Nutenquerfeld der unbewickelten Maschine arbeiten, so haben wir dieses doch aus der *wirklichen* Zahnsättigung herzuleiten. Diese aber kann durch die eben beschriebene Rückwirkung der Wirbelströme unter Umständen ganz gewaltig in die Höhe getrieben werden. Beobachtete ich doch an einer Maschine — wenn auch unter abnormen Verhältnissen — bei $\xi = 2{,}35$ eine Steigerung auf

$$(B_m)_{corr} = 1{,}4\, B_m.$$

In diesem Falle *mußte* daher die durch Gl. 10c und d) vorgeschlagene Korrektur zur Anwendung gebracht werden, wollte man nicht eine sehr große Ungenauigkeit in Kauf nehmen. Aber selbst unter diesen außergewöhnlichen Umständen war ein deutliches Maximum in der Verlustkurve zu beobachten. Es lag wohl höher als in der F_h-Kurve, war auch nicht so scharf ausgeprägt und hatte sich bis gegen $\xi = 1{,}25$ verschoben. Aber der Charakter der Kurve blieb erhalten, und so haben wir auch unseren daran geknüpften Folgerungen nichts hinzuzufügen.

Höchstens wird man noch fragen, welche *Querinduktion* man denn nun auf Grund der entwickelten Theorie noch gutheißen könnte. Die Beantwortung dieser Frage hängt natürlich in erster Linie davon ab, welche Wirbelstromverluste man eben noch erträglich findet. Ganz allgemein betrüge der zulässige quadratische Feldmittelwert der ganzen Nut

$$\text{Mitt}(\underline{B}_m) = 49 \sqrt{\frac{W^{Watt}}{V^{cdm}} \cdot \frac{100}{\nu} \cdot \frac{d}{n} \cdot \frac{1}{F_h}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

Arbeitet man nun mit reiner Zweilagenwicklung in dem Gebiete $\xi = 0{,}6$ bis $1{,}3$, so kann man

$$F_h = 2{,}5$$

als guten Mittelwert annehmen. Außerdem ist gewöhnlich bei Gleichstromwicklungen

$$\frac{d}{n} \sim 0{,}5.$$

Läßt man also bei Kupferstäben eine effektive Stromdichte von

$$\varrho_w = 1 \frac{\text{Amp}}{\text{qmm}}$$

entsprechend

$$\frac{W}{V} = 20 \frac{\text{Watt}}{\text{cdm}}$$

zu, so erhält man als zulässige Grenze

Für $\nu =$	10	20	30	40	50	60
Mitt $(\underline{B}_m) =$	310	219	179	155	138	126

Schlußbemerkung.

Die vorliegende Arbeit stellt die Berechnung der Wirbelstromverluste bei Leerlauf auf eine sichere Basis. Soweit nur die Wirkungsgradgarantien in Frage kommen, könnte man sich hiermit begnügen. Denn die Verbandsnormalien schreiben nur für die Leerlaufverluste die experimentelle Ermittlung vor. Aber als Unterlage für den tatsächlichen Wirkungsgrad und die Ankererwärmung beanspruchen die zusätzlichen Belastungsverluste mindestens das gleiche Interesse.

Weder Theorie noch Experiment vermochten bisher über diese verwickelten Verhältnisse Klarheit zu verbreiten. Man darf nämlich nicht glauben, mit der Bestimmung der Kurzschlußverluste sei die Sache abgetan. Bei Kurzschluß bleibt innerhalb der Nut fast nur das Ankerstreufeld übrig. Bei Belastung dagegen superponieren sich ihm die Ausläufer des Hauptfeldes, welche recht wohl von gleicher Größenordnung sein können oder es zuweilen wohl gar übertreffen. Aus diesem Grunde liefern alle Theorien, welche wie die Fields und seiner Nachfolger nur mit dem Ankerstreufeld operieren, für die Belastungsverluste höchstens eine untere Grenze. Ebensowenig darf man aber den Kurzschluß-Kupferverlusten die Leerlauf-Kupferverluste einfach zuzählen. Denn bei Belastung verzerrt die Ankerrückwirkung das Luftspaltfeld und führt so das ursprüngliche trapezförmige H_z-Diagramm in ein unsymmetrisches Dreieck über. Die Verhältnisse liegen somit in jeder Beziehung neuartig und es wäre eine verdienstvolle Arbeit, durch Verschmelzung der Theorien für Leerlauf und Kurzschluß dem Geheimnis der zusätzlichen Belastungsverluste auf die Spur zu kommen.



Ein neues Meßinstrument zur direkten Analyse von Wechselströmen.

Von

Arnold Roth, Baden (Schweiz).

(Mitteilung aus dem elektrotechnischen Laboratorium der Technischen Hochschule Berlin.)

Einleitung.

Die rechnerische Behandlung von Kurvenformen gründet sich auf ihre Zerlegung in Grund- und Oberwellen, nach dem Satze von Fourier. Dieser sagt aus, daß sich jede einwertige periodische Funktion und also die Kurve jedes stationären Wechselstromes in eine unendliche Reihe entwickeln läßt von der Form

$$i = \sum_{x=0}^{\infty} J_x \sin(x\omega_0 t + \varphi_x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

wobei J_x die Amplituden der zu den einzelnen Periodenzahlen $x\omega_0$ gehörenden x-ten Oberwellen darstellen. Bei reinem Wechselstrom verschwindet das Glied mit $x = 0$. Für Stromkurven, deren negative Hälfte das Spiegelbild der positiven darstellt, was bei technischen Wechselströmen fast immer der Fall ist, werden auch Glieder mit geradem x zu 0. Von Interesse ist hier die Berechnung des Effektivwertes des Stromes

$$J = \sqrt{\tfrac{1}{2} \sum_x J_x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Die den Formeln 1) und 2) entsprechenden Ausdrücke für die Spannung lauten

$$p = \sum_{x=0}^{\infty} P_x \sin(x\omega_0 t + \psi_x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

$$P = \sqrt{\tfrac{1}{2} \sum_x P_x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Zur Auswertung der Oberschwingungen kann man bekanntlich die Resonanz ausnutzen.

Dazu benutzt man im wesentlichen einen Schwingungskreis, von einer Eigenfrequenz gleich derjenigen der zu messenden m-ten Oberwelle, der an die zu analysierende Spannung angelegt wird. Da er allen übrigen Oberwellen einen sehr viel höheren Scheinwiderstand entgegensetzt, werden diese zum großen Teil unterdrückt. Ein in Reihe geschalteter Oszillograph läßt die m-te Oberwelle deutlich heraustreten. Eine Durchbildung der Methode, so daß die Amplitude ohne Photographie des Oszillogramms abgelesen werden könnte, wäre möglich; es bleiben aber die Nachteile des Oszillographen: schwierige Handhabung, kleine Transportfähigkeit, Verwendung von Hilfs-Gleichstrom. Es wurde deshalb versucht, statt des Oszillographen ein Strommeßinstrument einzuschalten. Die Messung der Oberwellen wurde aber durch die benachbarten Wellen und vor allem durch die Grundwelle, deren Amplitude ein Vielfaches derjenigen der Oberwellen ist, viel zu stark beeinflußt.

Ausgehend von der Resonanzmethode, machte es sich der Verfasser zur Aufgabe, ein Instrument zu konstruieren, das bei einfachster Handhabung die Amplituden der Oberwellen direkt anzeigt, unter Vermeidung rotierender Teile. Insbesondere sollte es an Strom- und Spannungswandler angeschlossen werden können, also auch die Messung an Hochspannungsnetzen erlauben. Die Grundlage dazu boten die Eigenschaften parallel geschalteter Schwingungskreise mit verschiedener Eigenfrequenz.

I. Theorie der Meßmethoden.

Zum Verständnis der nachherigen Ausführungen ist die Umformung einiger Formeln für Schwingungskreise sowie die Untersuchung der Eigenschaften parallel geschalteter Schwingungskreise notwendig.

A. Untersuchungen über Schwingungskreise.

1. Umformung der gebräuchlichen Formeln für den einfachen Schwingungskreis.

Für die folgenden Darlegungen wird die symbolische Methode angewandt. Deutsche Buchstaben bezeichnen die Diagrammvektoren, lateinische die zugehörigen Effektivwerte. Es ist $j = \sqrt{-1}$. ω_0 ist die Grundfrequenz, auf die alle anderen Frequenzen bezogen werden, bei zusammengesetzten Kurven die Frequenz der Grundschwingung.

Ein Schwingungskreis sei gegeben durch R, L, C (Abb. 1). Dann ist seine Eigenfrequenz $m\omega_0$ bestimmt durch die Gleichung

$$m^2 \omega_0^2 L C = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Abb. 1.

Für eine beliebige Frequenz $x\omega_0$ ist dann die Beziehung zwischen Spannung an den Enden und Strom

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{J}\left[R + j\left(x\omega_0 L - \frac{1}{x\omega_0 C}\right)\right].$$

$\mathfrak{z}$ ist der Widerstandsoperator des Kreises. Durch Einsetzen von Gl. 5) kann C oder L eliminiert und dafür m eingeführt werden.

$$\mathfrak{z} = R + j\omega_0 L \frac{x^2 - m^2}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

oder

$$\mathfrak{z} = R + \frac{1}{jx\omega_0 C} \frac{m^2 - x^2}{m^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6a)$$

Der absolute Betrag des Operators beträgt

$$z = \omega_0 L \frac{x^2 - m^2}{x} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega_0^2 L^2} \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6b)$$

Daraus für den Strom: $J = \frac{P}{z}$ oder in eine Reihe entwickelt:

$$J = \frac{P}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{\omega_0^2 L^2}\frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{\omega_0^4 L^4}\frac{x^4}{(x^2 - m^2)^4} - \ldots\right] \quad . \; . \quad 7)$$

Die Reihe ist für Gebiete, in denen $\frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}$ klein ist gegen 1, also Gebiete in einer gewissen Entfernung von der Resonanzfrequenz $m\omega_0$ sehr rasch konvergent. Für Fehlerrechnungen in jenen Gebieten kann schon das zweite Glied in der eckigen Klammer neben 1 vernachlässigt werden und es ist dann

$$J = \frac{P}{\omega_0 L} \frac{x}{(x^2 - m^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Sei $J_m = \frac{P}{R}$ der Strom für die Resonanzfrequenz $m\omega_0$.

Wenn einmal eine Spannung P_m von der Resonanzfrequenz $m\omega_0$, ein ander Mal eine gleichgroße Spannung P von der Frequenz $x\omega_0$ außerhalb des Resonanzgebietes auf den Kreis einwirkt, so ist das Verhältnis der entsprechenden Ströme



$$\frac{J}{J_m} = \frac{z_m}{z} = \frac{R}{\omega_0 L} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \right)^4 - \dots \right] \quad 9)$$

Mit wachsendem Abstand der Frequenz x von m nimmt dieses Verhältnis rasch sehr kleine Werte an, was der Ausdruck für die bekannte Tatsache ist, daß ein Schwingungskreis einem Strom einen um so größeren Widerstand entgegensetzt, je weiter seine Frequenz von der Resonanzfrequenz entfernt ist. Diese Erscheinung sei mit „Drosselung" bezeichnet. Für Fehlerrechnungen genügt wieder die Berücksichtigung des ersten Gliedes.

$$\frac{J}{J_m} = \frac{z_m}{z} = \frac{R}{\omega_0 L} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \quad \dots \dots \quad 9a)$$

Gl. 6) ergibt für den Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung an den Enden

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x} \quad \dots \dots \quad 10)$$

Der Verlauf von J und φ in Funktion der Frequenz $x\omega_0$ wird in den Abb. 2 und 3 gezeigt. Es ist dort $\frac{R}{L} = 126$. Diese Form der J- und φ-Kurve ist für Schwingungskreise charakteristisch.

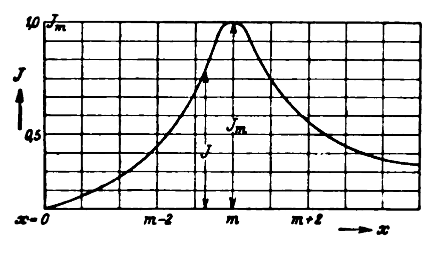


Abb. 2.

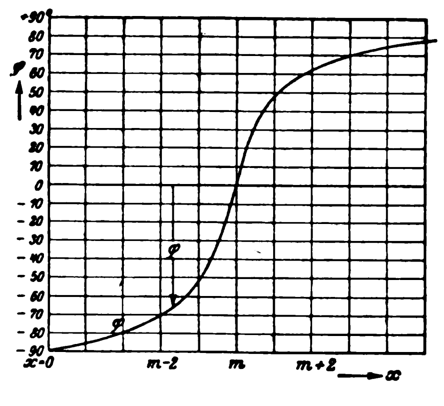


Abb. 3.

2. Theoretische Untersuchungen über Doppelkreise.

a) Allgemeiner Fall. Wir betrachten ein System von zwei parallel geschalteten Schwingungskreisen a und b (Abb. 4). Ihre Induktivitäten seien L_a, L_b, die Kapazitäten C_a, C_b. Die Widerstände R_a und R_b seien einander gleich, wodurch sich die Formeln vereinfachen. Im übrigen sind die Größen voneinander unabhängig. Der Gesamtstrom des Doppelkreises sei $\mathfrak{J}$, die Spannung an den Enden $\mathfrak{P}$. Zu untersuchen ist der Verlauf des Widerstandsoperators $\mathfrak{z}$. Die Resonanzfrequenzen der beiden Kreise liefern wieder die Gleichungen

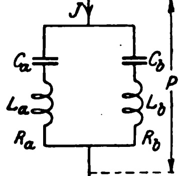


Abb. 4.

$$\omega_0^2 m_a^2 C_a L_a = 1 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 m_b^2 C_b L_b = 1 .$$

Für die einzelnen Kreise gilt Gl. 6)

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}_a \left[R_a + j\omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} \right] = \mathfrak{J}_b \left[R_a + j\omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x} \right],$$

oder wenn gesetzt wird:

$$\omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} = Y_a, \qquad \omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x} = Y_b,$$

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}_a [R_a + jY_a] = \mathfrak{J}_b [R_a + jY_b].$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_a + \mathfrak{J}_b = \mathfrak{P}\left[\frac{1}{R_a + jY_a} + \frac{1}{R_a + jY_b}\right].$$

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{z} = \mathfrak{J}\,\frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Folglich durch Beseitigen des imaginären Gliedes im Nenner:

$$\mathfrak{z} = \frac{R_a[2R_a^2 - 2Y_a Y_b + (Y_a + Y_b)^2] + j(Y_a + Y_b)(R_a^2 + Y_a Y_b)}{4R_a^2 + (Y_a + Y_b)^2}.$$

J ist mit P in Phase, wenn das imaginäre Glied des Widerstandsoperators zu 0 wird. Das ist der Fall, wenn $Y_a = -Y_b$, also

$$\omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} = -\omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x}.$$

Die Frequenz, bei der dieser Fall eintritt sei $m\omega_0$. Dann ist

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Da L_a und L_b immer positiv sind, muß nach Gl. 12) entweder $m_a < m < m_b$ oder $m_b < m < m_a$ sein. Zwischen den Resonanzfrequenzen der Teilkreise a) und b) liegt also immer eine Frequenz m, bei welcher der Gesamtstrom des Doppelkreises in Phase ist mit der Spannung an den Enden.

Für unsere Zwecke ist die Umkehrung des Satzes wichtiger: Gegeben die Resonanzfrequenzen m_a und m_b zweier parallel geschalteter Kreise mit gleichen Widerständen. Für eine dazwischen liegende Frequenz m soll der Phasenwinkel des Gesamtstromes 0 werden. Das ist der Fall, wenn die Einzelkreise nach Gl. 12) dimensioniert werden.

b) Sonderfall: Die Induktivitäten der beiden Teilkreise sind einander gleich: $L_a = L_b$.

Nach Gl. 12 ist dann:

$$m^2 - m_b^2 = m_a^2 - m^2 = s^2.$$

Dann sind

$$m_a^2 = m^2 + s^2 \quad \text{und} \quad m_b^2 = m^2 - s^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Diese Ausdrücke in die Gleichungen für Y_a und Y_b eingesetzt, ergibt nach einigen Umformungen für $\mathfrak{z}$ aus Gl. 11a):

$$\mathfrak{z} = \frac{R_a}{2}\left[\left\{1 + \frac{s^4}{\frac{x^2 R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2}\right\} + j\frac{\omega_0 L_a}{R_a}\frac{x^2 - m^2}{x}\left\{1 - \frac{s^4}{\frac{x^2 R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2}\right\}\right] \quad 14)$$

Eine Reihenentwicklung ist nur möglich für Frequenzen, die entfernt von den Resonanzfrequenzen liegen. Es soll deshalb eine graphische Lösung über den Verlauf des Operators Klarheit verschaffen. N bezeichne den Nenner der beiden zweiten Glieder

$$N = x^2 \cdot \frac{R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

$$N = \left[x^2 - m^2 + \frac{R_a^2}{2\omega_0^2 L_a^2}\right]^2 + \frac{R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2}\left[m^2 - \frac{R_a^2}{4\omega_0^2 L_a^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad 15a)$$

Es ist also

$$\mathfrak{z} = \frac{R_a}{2}\left[\left\{1 + \frac{s^4}{N}\right\} + j\frac{\omega_0 L_a}{R_a}\frac{x^2 - m^2}{x}\left\{1 - \frac{s^4}{N}\right\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14a)$$

Weiter werde bezeichnet

$$\frac{s^4}{N} = U \quad \text{und} \quad \frac{\omega_0 L_a}{R_a}\frac{x^2 - m^2}{x} = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Dann ist

$$\mathfrak{z} = \frac{R_a}{2}[(1 + U) + jV(1 - U)] \quad . \; . \quad 14b)$$

Zur Konstruktion der Funktion U führen folgende Überlegungen:

In Gl. 15a) ist N die Summe zweier Quadrate, kann also als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt werden: $\triangle$ ACP in Abb. 5.

Dabei ist entsprechend dem zweiten Glied in Gl. 15a):

$$\overline{AC} = \frac{R_a}{\omega_0 L_a}\sqrt{m^2 - \frac{R_a^2}{4\omega_0^2 L_a^2}} = \text{unabhängig von x}$$

Abb. 5.

und entsprechend dem ersten Glied:

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \frac{R_a}{2\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2) = \frac{R_a^2}{2\omega_0^2 L_a^2} + \Delta x^2.$$

Dabei ist

$$\overline{AB} = \frac{R_a^2}{2\omega_0^2 L_a^2} = \text{unabhängig von x},$$

$$\overline{BP} = (x^2 - m^2) = \Delta x^2 = \text{variabel.}$$

Zu verschiedenen x gehören also verschiedene Punkte P. Dann ist

$$\overline{CP} = \sqrt{N}.$$

Um daraus $\frac{1}{\sqrt{N}}$ zu erhalten, werde eine Inversion vorgenommen: Mit AC als Durchmesser wird ein Kreis durch C mit vorerst beliebigem Durchmesser gezogen. Dann ergibt sich aus Beziehungen ähnlicher Dreiecke:

$$\overline{P_1C} = \overline{AC} \cdot \overline{A_1C} / \sqrt{N}.$$

Zur Konstruktion von $1/N$ benutzt man die Beziehung:

$$\overline{P_1E} = \overline{P_1C}^2 \cdot \frac{1}{CA_1} = \frac{1}{N}\overline{AC}^2 \cdot \overline{A_1C}.$$

Dabei ist der Faktor $\overline{AC}^2 \cdot \overline{A_1C}$ konstant und kann durch geeignete Wahl des Maßstabes für den Kreisdurchmesser auf 1 gebracht werden. Den Ausdruck $\overline{P_1E} = U = \frac{s^4}{N}$ (Gl. 16) erhält man durch Änderung dieses Maßstabes. Letzteren legt man am einfachsten dadurch fest, daß man U für $x^2 - m^2 = 0$, also für $x = m$ berechnet [Gl. 16) und 15a)]:

$$U_{x=m} = \frac{s^4}{\dfrac{m^2 R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2}} \quad . \; . \; . \quad 17)$$

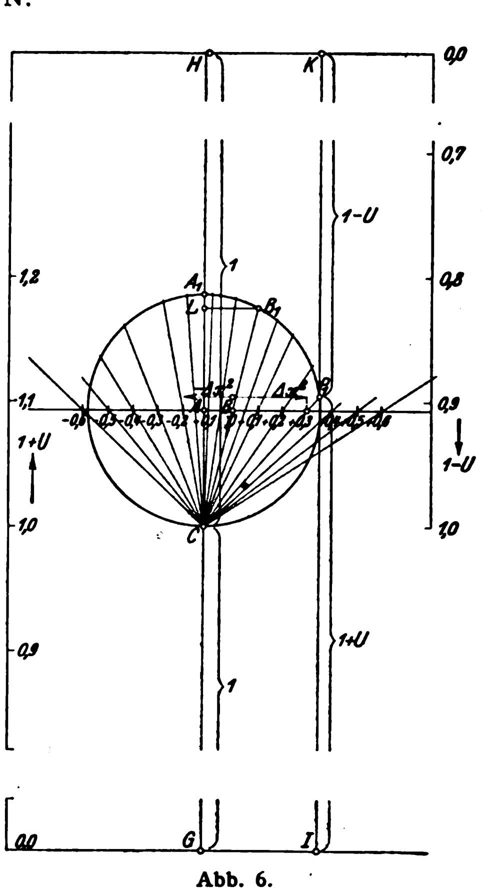


Abb. 6.

Konstruktiv wird dieses U für $x = m$ (also $\Delta x^2 = 0$) durch die Linie $\overline{B_1F}$ dargestellt



(Abb. 5). Umgekekrt kann also zuerst der Maßstab für diese Strecke nach Gl. 17) festgelegt und dann Abb. 5 konstruiert werden.

Beispiel:

Sei:
$$R_a/L_a = 150, \quad \omega_0 = 314{,}2,$$
$$m = 3, \quad s^2 = 0{,}6,$$

also:
$$m_a^2 = m^2 + s^2 = 9{,}6, \quad m_a = 3{,}10 \qquad \frac{R_a}{\omega_0 L_a} = 0{,}477.$$
$$m_b^2 = m^2 - s^2 = 8{,}4, \quad m_b = 2{,}90$$

Zuerst wird Dreieck ABC konstruiert (Abb. 6), der Maßstab so gewählt, daß einem Δx^2 von 0,1 die Länge 10 mm entspricht. Dann wird berechnet

$$U_{x=m} = \frac{0{,}36}{9 \cdot 0{,}228} = 0{,}175.$$

Diese Strecke wird von C nach oben bis L abgetragen ($\overline{CL}$), in L die Senkrechte zu LC gezogen und mit dem verlängerten Strahl CB geschnitten: B_1. Durch B_1 und C wird ein Kreis gezogen mit dem Mittelpunkt auf CL. Von C aus werden noch im Abstand 1 nach oben und unten Parallele zu AB gezogen. Für irgendeine Frequenz $x\omega_0$ erhält man nun die gesuchten Funktionen folgendermaßen: Man trägt von B aus das zugehörige $\Delta x^2 = x^2 - m^2$ ab und zieht durch den erhaltenen Punkt P einen Strahl nach C. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis sei P_1. Dann stellt die Strecke $\overline{P_1 I}$ die Funktion $(1 + U)$, die Strecke $\overline{P_1 K}$ die Funktion $(1 - U)$ dar. Auf diese Weise wurde in dem gewählten Beispiel für Punkte im Resonanzbereich U konstruiert (Abb. 6) und daraus Scheinwiderstand und Phasenwinkel berechnet (Tafel I, Abb. 7 und 8).

Zahlentafel 1.

x	$\frac{z}{R_a/2}$	φ	x	$\frac{z}{R_a/2}$	φ
$2{,}89_8$	1,157	$-19^0\,55'$	$3{,}00_0$	1,173	0^0
$2{,}91_5$	1,155	$-16^0\,5'$	$3{,}00_8$	1,168	$+1^0\,26'$
$2{,}93_3$	1,162	$-12^0\,18'$	$3{,}01_7$	1,155	$2^0\,54'$
$2{,}95_0$	1,173	$-8^0\,46'$	$3{,}03_3$	1,134	$6^0\,6'$
$2{,}96_6$	1,185	$-5^0\,37'$	$3{,}05_0$	1,119	$9^0\,29'$
$2{,}98_3$	1,187	$-2^0\,46'$	$3{,}06_6$	1,115	$13^0\,0'$
$2{,}99_2$	1,186	$-1^0\,23'$	$3{,}08_2$	1,114	$16^0\,29'$
			$3{,}09_8$	1,122	$+20^0\,0'$

Gl. 14b) ergibt für den Scheinwiderstand

$$z = \frac{R_a}{2}\sqrt{(1+U)^2 + V^2(1-U^2)} \qquad \text{18)}$$

oder

$$z = \frac{R_a}{2}\sqrt{(1+U)^2 + \frac{\omega_0^2 L_a^2}{R_a^2}\,\frac{(x^2-m^2)^2}{x^2}(1-U)^2}$$

und für den Phasenwinkel

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_0 L_a}{R_a}\cdot\frac{x^2-m^2}{x}\cdot\frac{1-U}{1+U} \qquad \text{19)}$$

Die entsprechenden Formeln für einen unverzweigten Stromkreis mit dem Widerstand $\frac{R_a}{2}$ und gleichem $\frac{R}{\omega_0 L}$ (also der Induktivität $\frac{L_a}{2}$ und der Eigenfrequenz $m\omega_0$ lauten [Gl. 6 und 10])

$$z = \frac{R_a}{2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L_a^2}{R_a^2}\cdot\frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_0 L_a}{R_a}\cdot\frac{x^2 - m^2}{x}.$$

Der Vergleich zeigt, daß sich die Formeln für den Doppelkreis von denjenigen für den einfachen Kreis nur durch die Faktoren $(1 + U)$ und $(1 - U)$ unterscheiden. Abb. 6 zeigt aber, daß je mehr sich die Frequenz $x\omega_0$ von der Frequenz $m\omega_0$ entfernt, die Funktionen $(1 + U)$ und $(1 - U)$ immer näher an 1 rücken, d. h. je mehr sich die Frequenz vom Resonanzgebiet entfernt, um so mehr fallen die Kurven für z und φ des Doppelkreises mit denjenigen des ungeteilten Kreises zusammen. Der Doppelkreis kann also in diesem Gebiete durch einen gewöhnlichen Kreis ersetzt werden. Dieser soll Ersatzkreis genannt werden. Die Übereinstimmung ist um so vollständiger, je kleiner der Kreisdurchmesser in Abb. 6 gegen 1 ist, je kleiner also s^2 ist [Gl. 17)].

An Hand des Verlaufes von U ergibt sich jetzt z in Funktion der Frequenz folgendermaßen [Gl. 18)]: Im Resonanzgebiet ist x ähnlich so groß wie m, die Funktion V also klein und damit z nahezu proportional dem ersten Gliede in der Wurzel: $(1 + U)$. Dadurch (Abb. 6) ist ein Maximum von z in der Gegend von m bedingt. Je weiter sich x von m entfernt, je größer also $x^2 - m^2$ positiv oder negativ wird, um so größer ist V und damit der Einfluß des zweiten Gliedes in der Wurzel: $V^2(1 - U)^2$. Schließlich überwiegt dieser Einfluß und führt zur Bildung je eines Minimums unter- und oberhalb m und dann zum Anstieg der z-Kurve. Schließlich fällt die Kurve mit derjenigen des ungeteilten Kreises zusammen. Abb. 7 zeigt die z-Kurve im Resonanzgebiet für das oben berechnete Beispiel. Die gestrichelte Kurve ist die entsprechende des Ersatzkreises. Die zugehörigen Stromkurven wären natürlich den z-Kurven reziprok. Einen ganz ähnlichen Verlauf weist die Stromkurve zweier bestimmter Schwingungskreise in loser magnetischer Kopplung auf.

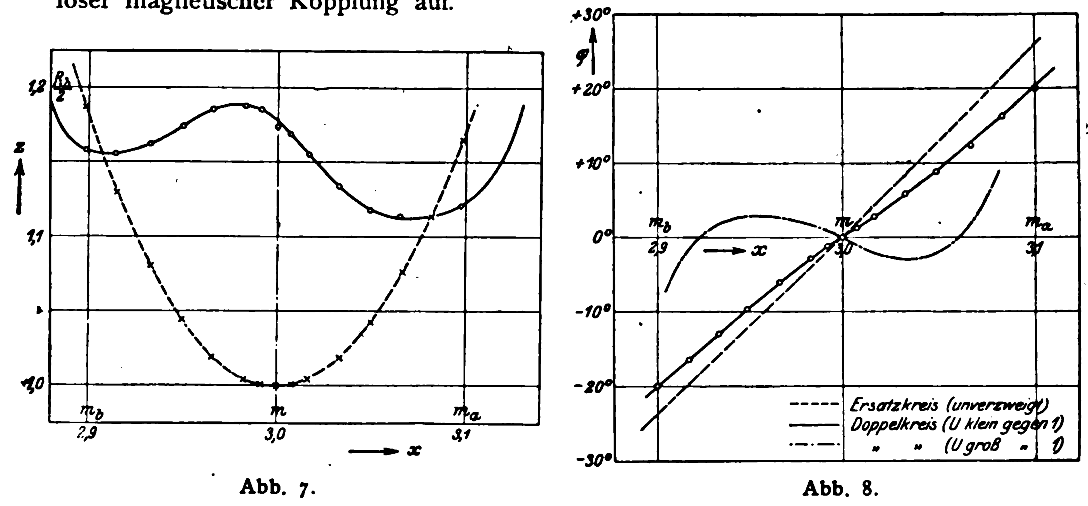


Abb. 7. Abb. 8.

Interessant ist der Verlauf des Phasenwinkels φ. Wie schon bemerkt, nähert sich seine Kurve für die von m stark verschiedenen Frequenzen derjenigen des Ersatzkreises. Im Bereiche der Resonanzfrequenz dagegen findet eine starke Einsenkung statt (Abb. 8, ausgezogene Kurve), die um so stärker wird, je größer U gegen 1 wird, je größer also der Kreisdurchmesser in Abb. 6, je größer endlich s^2 ist. Sie kann sogar so groß werden, daß die Kurve die Abszissenachse dreimal statt einmal schneidet (strichpunktierte Kurve in Abb. 8). Das tritt dann ein, wenn in Abb. 6 der Kreis die obere 0-Linie schneidet, wenn also nach Gl. 17) sein Durchmesser[1])

$$U_{x=m} > 1$$

[1]) Die Bedingung ist nicht ganz genau, da ja $U_{x=m}$ (gleich der Strecke $\overline{CL}$ in Abb. 6) nicht gleich dem Durchmesser ist. Der Unterschied ist aber klein.



oder

$$s^4 > m^2 \frac{R_b^2}{\omega_0^2 L_b^2}$$

wird.

B. Theorie der Spannungsmessung einer Welle.

Bezeichne m die Ordnungszahl der zu messenden Oberwelle. Die übrigen Oberwellen nennen wir „fremde Oberwellen"; als solche kommen nach Seite 1 bei technischen Wechselströmen nur ungerade in Betracht, also von der $(m+2)$-ten an aufwärts und der $(m-2)$-ten an abwärts.

1. Messung bei gleichbleibender Frequenz.

Bekanntlich ist der Ausschlag eines Dynamometers

$$\alpha = K \cdot J_1 J_2 \cos \varphi_{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

wenn J_1 der Strom der festen Spule, J_2 derjenige der beweglichen und $\cos \varphi_{12}$ der Phasenwinkel ist, den beide einschließen.

Beide Spulen des Dynamometers mögen an die zu analysierende Spannung angeschlossen sein. Gelingt es nun, für die m-te Oberwelle $\cos \varphi_{12} = 1$ zu machen, für alle fremden Oberwellen dagegen gleich 0, so ist der Dynamometerausschlag ein Maß für die m-te Oberwelle. Im folgenden wird versucht, mit Hilfe von Schwingungskreisen diese Bedingung zu erfüllen.

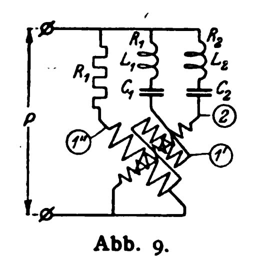


Abb. 9.

Wir verwenden ein Dynamometer, dessen feste Wicklung in 2 Spulen 1' und 1'' unterteilt ist von vorläufig gleicher Windungszahl. 1'' ist in Reihe geschaltet mit einem induktionslosen Widerstand R_1'', 1' mit einem aus Induktivität L_1 und Kapazität C_1 bestehenden Schwingungskreis vom Wirkwiderstand R_1' und einer Eigenfrequenz gleich der Frequenz $m\omega_0$ der zu messenden Oberwelle (Abb. 9). Also

$$\omega_0^2 m^2 C_1 L_1 = 1 .$$

Dabei sei

$$R_1' = R_1'' = R_1 .$$

Die bewegliche Spule ist in Reihe mit einem Kreise vom Widerstand R_2 und gleicher Eigenfrequenz (Abb. 9):

$$\omega_0^2 m^2 C_2 L_2 = 1 .$$

Alle drei Stromkreise sind parallel geschaltet, die Windungsrichtung der beiden festen Spulen einander entgegengesetzt. Dabei sind die Selbstinduktionen der Dynamometerspulen 1' und 2 (Abb. 9) in L_1 und L_2 enthalten. Diejenige von 1'' wird vernachlässigt, da sie kompensiert wird; die gegenseitige Induktion zwischen den Spulen 1' und 1'' kann vernachlässigt werden, diejenige zwischen den beweglichen und den festen Spulen wird ebenfalls kompensiert, fällt also für die Rechnung außer Betracht (s. später unter II A). An den Endklemmen wird nun die zu analysierende Spannung angelegt. Die mechanische Wirkung der Ströme J_1' und J_1'' in den beiden festen Spulen auf die bewegliche Spule ist gleichwertig der Wirkung eines einzigen Stromes J, der gleich der Differenz der beiden Ströme ist. Sein Vektor ist

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1'' - \mathfrak{J}_1' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

wobei

$$\mathfrak{J}_1'' = \frac{\mathfrak{P}}{R_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_1' = \frac{\mathfrak{P}}{R_1 + j\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}}$$

nach Gl. 6). Daraus folgt

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{P}}{R_1} \frac{\omega_0^2 L_1^2 \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2} + j\omega_0 L_1 R_1 \frac{x^2 - m^2}{x}}{R_1^2 + \omega_0^2 L_1^2 \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2}} \quad \ldots \ldots \quad 22)$$

Hieraus für den Phasenwinkel φ_1, um den J_1 hinter P herläuft[1])

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-R_1}{\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}} \quad \ldots \ldots \quad 23)$$

Für den Kreis 2 der beweglichen Spule ist er bestimmt [Gl. 10)] durch:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = + \frac{\omega_0 L_2}{R_2} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x} \quad \ldots \ldots \quad 24)$$

Unter der Bedingung

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2} \quad \ldots \ldots \quad 24a)$$

ist $\operatorname{tg} \varphi_2 = - \operatorname{tg} \varphi_1$, also $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^0$ für jedes beliebige x (Abb. 10), es wird also überhaupt keine Oberschwingung angezeigt.

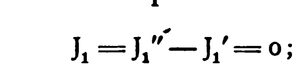
Für $x = m$ zeigt die φ_1-Kurve einen Sprung von $+90^0$ auf -90^0. Es ist in diesem Punkt

$$J_1'' = \frac{P}{R_1}$$

und nach Gl. 8)

$$J_1' = \frac{P}{R_1},$$

folglich



$$J_1 = J_1'' - J_1' = 0;$$

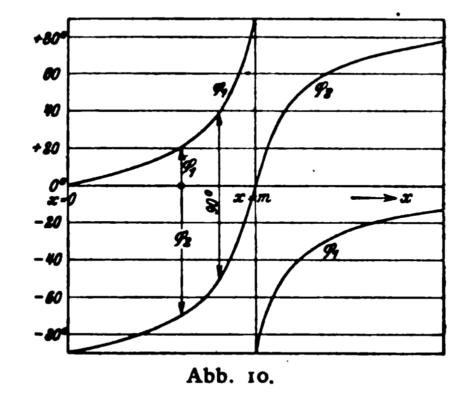


Abb. 10.

es wird also auch eine Oberschwingung der Ordnung m nicht angezeigt, d. h. der Apparat ist in dieser Form nicht anwendbar.

Diese Verhältnisse ändern sich, wenn der Resonanzkreis 1' in einen Doppelkreis aufgeteilt wird (Abb. 11) mit Eigenfrequenzen m_a und m_b größer, bzw. kleiner als m. Für diesen sei $R_a = R_b$; die Dimensionierung der übrigen Größen stehe vorerst noch offen.

Unter Verwertung der in Abschnitt I, A. 2. b) gefundenen Resultate für den Sonderfall $L_a = L_b$ kann angenommen werden, daß auch hier die φ- und z-Kurven des Doppelkreises mit wachsender Entfernung der Frequenz von m sich immer mehr an die entsprechenden Kurven der eben betrachteten Schaltung mit einem Kreis anschließen, es ist also nach wie vor für die fremden Oberwellen $\cos \varphi_{12}$ gleich oder wenigstens annähernd 0.

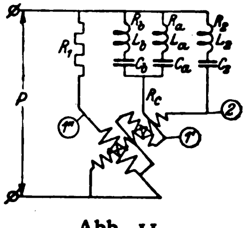


Abb. 11.

Es wird sich zeigen, daß es zweckmäßig ist, L_a zwar von gleicher Größenordnung, nicht aber gleich L_b zu machen. Daß die Verwertung der Ergebnisse für den Fall $L_a = L_b$ hier auch nur qualitativ zulässig, ist deshalb eine Annahme. Ihre Richtigkeit

[1]) Das Vorzeichen mußte umgekehrt werden, weil Gl. 22) den Operator des Leitwertes darstellt. Dieser liefert für φ_1 das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Berechnung aus dem Widerstandsoperator.

wird nachher durch die Versuche bewiesen: Sie zeigen, daß der Ausschlag des Instrumentes für die fremden Oberwellen wirklich zu 0 wird.

Läßt sich nun noch erreichen, daß für die Frequenz $m\omega_0$ der Widerstand z des Doppelkreises ab größer als R_1 wird, so ist $J_1' < J_1''$ und damit J_1 nicht gleich 0: Dann liefert also das Dynamometer für die m-te Oberwelle einen Ausschlag, für die andern Wellen nicht; damit wäre die Aufgabe gelöst. Erwarten läßt sich auch die Erfüllung dieser Bedingung aus dem Verlauf der z-Kurven in Abb. 7. Daß sie wirklich erfüllt ist, wird nachher bewiesen.

Die Bedingung der gleichen Wirksamkeit des Doppelkreises mit dem einfachen Kreis läßt sich natürlich nicht für alle fremden Wellen scharf erfüllen, für einen Teil derselben wäre also $\cos\varphi_{12}$ nicht genau 0. Die betreffenden Wellen würden [Gl. 20)] einen Ausschlag und damit einen Fehler verursachen. Hier kommt uns die Drosselung im Kreis 2 zu Hilfe, denn J_2 wird für alle fremden Wellen um ein Vielfaches kleiner als für die m-te [Gl. 9a), Abb. 2]. Dadurch wird α verkleinert [Gl. 20)], der Fehler also heruntergedrückt, und zwar, wie die Versuche zeigen werden, auf einen vernachlässigbaren Wert. Wie Abb. 2 und Gl. 9a) zeigen, ist die Drosselung für die verschiedenen Wellen nicht gleich stark. Dabei kommt der Bereich von $(m-2)$ bis $(m+2)$ nicht in Betracht, da ja dort keine Oberwellen liegen. Wie Abb. 2 zeigt, wird die $(m+2)$-te Oberwelle am wenigsten durch die Drosselung beeinflußt. Weiter ist trotz starker Drosselung die Grundwelle gefährlich, da ihre Stärke ein Vielfaches derjenigen aller Oberwellen zu betragen pflegt. Es soll deswegen für die Unterdrückung dieser beiden Wellen von der Mitwirkung der Drosselung abgesehen werden, d. h. für diese Wellen soll $\cos\varphi_{12}$ vollständig zu 0 werden. Das ist der Fall, wenn der Widerstandsoperator des Doppelkreises (Abb. 11) für diese beiden Frequenzen nach Größe und Phase vollständig mit demjenigen des ungeteilten Kreises (Abb. 9) übereinstimmt.

Auf Grund dieser beiden Bedingungen wird die Dimensionierung des Doppelkreises vorgenommen. Da beide durch komplexe Gleichungen dargestellt werden, ergeben sich vier Bedingungen. Demgegenüber kann noch über vier Größen verfügt werden: m_b, L_a, L_b, R_a. Denn es ist $R_b = R_a$. Widerstand R_c setzt sich aus Instrumenten- und Justierwiderstand zusammen, m_a soll frei gewählt werden können. Die Aufgabe ist also die folgende:

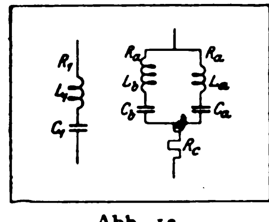


Abb. 12.

Ein Doppelkreis mit vorgeschaltetem induktionslosem Widerstand R_c ist so zu dimensionieren, daß sein Widerstandsoperator für die Frequenzen ω_0 und $(m+2)\omega_0$ nach Größe und Phase gleich ist demjenigen eines gegebenen einfachen Kreises von der Eigenfrequenz $m\omega_0$, der Induktivität L_1 und dem Widerstand R_1 (Abb. 12). Dabei kann noch über die Resonanzfrequenz m_a eines der beiden Teilkreise frei verfügt werden. Unter Benutzung der Gl. 11) ist der Widerstandsoperator des Doppelkreises

$$\mathfrak{z}_1' = \frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} + R_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25)$$

Dabei ist

$$Y_a = \omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x}, \qquad Y_b = \omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x}.$$

Für die Frequenzen $x = 1$ und $x = m + 2$ muß dieser Operator gleich sein dem Operator des einfachen Kreises

$$\mathfrak{z} = R_1 + jY_1,$$

wobei

$$Y_1 = \omega_0 L_1 \cdot \frac{x^2 - m^2}{x}.$$



Also:
$$\frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} + R_c = R_1 + jX_1.$$

Daraus durch Trennung von reellen und imaginären Gliedern

$$\left.\begin{array}{l} R_a^2 - Y_a Y_b = (R_1 - R_c)\, 2R_a - Y_1(Y_a + Y_b) \\ R_a(Y_a + Y_b) = (R_1 - R_c)(Y_a + Y_b) + 2R_a Y_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für } x = 1 \\ \phantom{\text{für }} x = m + 2 \end{array} \quad \ldots\ldots \quad 26)$$

Für $x = 1$ wird

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \omega_0 L_1 (1 - m^2); \quad Y_a = \omega_0 L_a (1 - m_a^2); \quad Y_b = \omega_0 L_b (1 - m_b^2). \\ \text{Für } x = (m + 2): \\ Y_1 = \omega_0 L_1 \dfrac{(m + 2)^2 - m^2}{m + 2}; \qquad Y_a = \omega_0 L_a \dfrac{(m + 2)^2 - m_a^2}{m + 2}; \\ Y_b = \omega_0 L_b \dfrac{(m + 2)^2 - m_b^2}{m + 2}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 27)$$

Zur Abkürzung sei

$$\left.\begin{array}{lll} 1 - m^2 = u & 1 - m_a^2 = u_a & 1 - m_b^2 = u_b \\ \dfrac{(m + 2)^2 - m^2}{m + 2} = v, & \dfrac{(m + 2)^2 - m_a^2}{m + 2} = v_a, & \dfrac{(m + 2)^2 - m_b^2}{m + 2} = v_b, \\ & R_1 - R_c = R_{ab} & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 28)$$

Letzteres kann auch betrachtet werden als derjenige Teil von R_1, der für die Zerlegung in den Doppelkreis übrigbleibt. Ferner bezeichne

$$k_{ab} = \frac{R_{ab}}{\omega_0 L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Aus den Gl. 26) entstehen durch Einsetzen der Ausdrücke für Y_a, Y_b, Y_1 die vier Gleichungen:

$$R_a^2 - \omega_0^2 L_a L_b u_a u_b = (R_1 - R_c)\, 2R_a - \omega_0^2 L_1 u (L_a u_a + L_b u_b) \quad \ldots\ldots \quad 30a)$$

$$R_a^2 - \omega_a^2 L_a L_b v_a v_b = (R_1 - R_c)\, 2R_a - \omega_0^2 L_1 v (L_a v_a + L_b v_b) \quad \ldots\ldots \quad 30b)$$

$$0 = (R_1 - R_c - R_a)(L_a u_a + L_b u_b) + 2R_a L_1 u \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31a)$$

$$0 = (R_1 - R_c - R_a)(L_a v_a + L_b v_b) + 2R_a L_1 v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31b)$$

aus 30a) und b):

$$\frac{L_a L_b}{L_1}(u_a u_b - v_a v_b) = L_a(u u_a - v v_a) + L_b(u u_b - v v_b) \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

aus 31a) und b)
$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{u v_b - v u_b}{v u_a - u v_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Diese beiden wiederum zusammengezogen liefern

$$\left.\begin{array}{l} L_a = L_1 \dfrac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b)(u v_a - v u_a)}, \\ L_b = L_1 \dfrac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b)(v u_b - u v_b)}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Die Werte für u, v eingesetzt, erhält man

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33a)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_a = L_1 \dfrac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \cdot \dfrac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2}, \\ L_b = L_1 \dfrac{m_a^2 - m_b^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \dfrac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 34a)$$

Aus Gl. 33a) und 5) folgt ohne weiteres

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{m_a^2 - m^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{m_b^2}{m_a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33b)$$

Weiter sind zu berechnen R_a und R_b.

Unter Benutzung der Beziehung

$$(L_a u_a + L_b u_b) L_1 = u L_a L_b \frac{v_a v_b - u_a u_b}{v^2 - u^2},$$

die sich aus den Gl. 34) ergibt, erhält man aus Gl. 30a) für R_a

$$R_a = (R_1 - R_c) \pm \sqrt{(R_1 - R_c)^2 + \omega_0^2 L_a L_b \left[\frac{v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b}{v^2 - u^2}\right]} \quad \ldots \quad 35)$$

Gl. 31 a) und b) dagegen geben für

$$R_a = (R_1 - R_c) \frac{1}{1 - \frac{2 L_1 v}{L_a v_a + L_b v_b}} = (R_1 - R_c) \frac{1}{1 - \frac{2 L_1 u}{L_a u_a + L_b u_b}} \quad \ldots \quad 36)$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für R_a liefert:

$$k_{ab} = \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L_1} = \frac{v_a u_b - u_a v_b}{v_a v_b - u_a u_b} \left[\frac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b)\, 2v} \left(\frac{1}{u v_a - v u_a} - \frac{1}{v u_b - u v_b}\right) - 1\right] \cdot$$

$$\sqrt{\frac{(v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b)(v^2 - u^2)}{(u v_a - v u_a)(v u_b - u v_b)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

Es ist die ganze rechte Seite der Gleichung nur Funktion von m, m_a, m_b [vgl. Gl. 28)], d. h. bei bestimmtem m und $\frac{R_{ab}}{\omega_0 L}\left(= \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L_1}\right)$ ist jedem m_a ein m_b zugeordnet, unabhängig von den übrigen Größen. Für die 3. Oberwelle wurde dieser Zusammenhang für eine Anzahl von Werten berechnet und in dem Diagramm Abb. 13 dargestellt. Dabei war $R_c = 0$. Die etwas umständliche Differentiation der Gl. 37) nach m_b ergibt bei allen Oberwellen für die Punkte der Abszissenachse

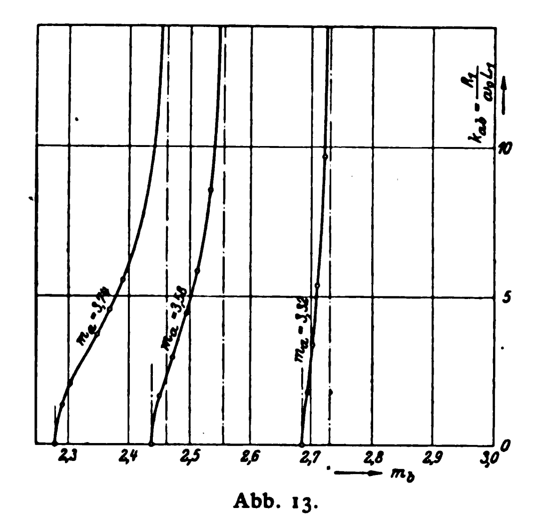


Abb. 13.

$$\frac{\partial k_{ab}}{\partial m_b} = \infty \quad \text{für} \quad k_{ab} = 0.$$

Die Tangente an die k_{ab}-Kurven steht also für jene Punkte senkrecht auf der Abszissenachse. Dadurch und durch den flachen Verlauf der Kurven ergibt sich bei kleinem k_{ab}, daß für verschiedene k_{ab} dasselbe m_a zu einem bestimmten m_b gehört, wie für $k_{ab} = 0$: Es wird also für kleine k_{ab} der Zusammenhang von m_a mit m_b von k_{ab} praktisch unabhängig. Da in unsern Kreisen nur Werte für k_{ab} von der Größenordnung 1 vorkommen, dürfen wir diesen Satz immer anwenden.

Den Zusammenhang von m_a mit m_b für $k_{ab} = 0$ ergibt Gl. 35). Es ist nämlich $k_{ab} = \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L} = 0$, also $R_1 - R_c = 0$ (für den Fall $R_c = 0$ also R_1 selbst $= 0$), nach Gl. 36) auch $R_a = 0$. Dann muß in Gl. 35) sein

$$v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b = 0.$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m^2 = \frac{(m_a^2 - m^2)(m^2 - m_b^2)}{4} \cdot \frac{5 - m}{m^2 - 1} \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

Dadurch wird also bei kleinem k_{ab} jedem m_a ein m_b zugeordnet. Die Werte wurden beispielsweise für die 3. und 9. Oberwelle berechnet und in Diagrammen aufgetragen (Abb. 14 und 15).

Damit sind $\frac{L_a}{L_b}$ und $\frac{C_a}{C_b}$ Funktionen von m_a allein. Da es für die Dimensionierung bequem ist, die Werte von $\frac{C_a}{C_b}$ zu kennen, wurden auch sie in den Diagrammen eingetragen (Abb. 14 und 15).

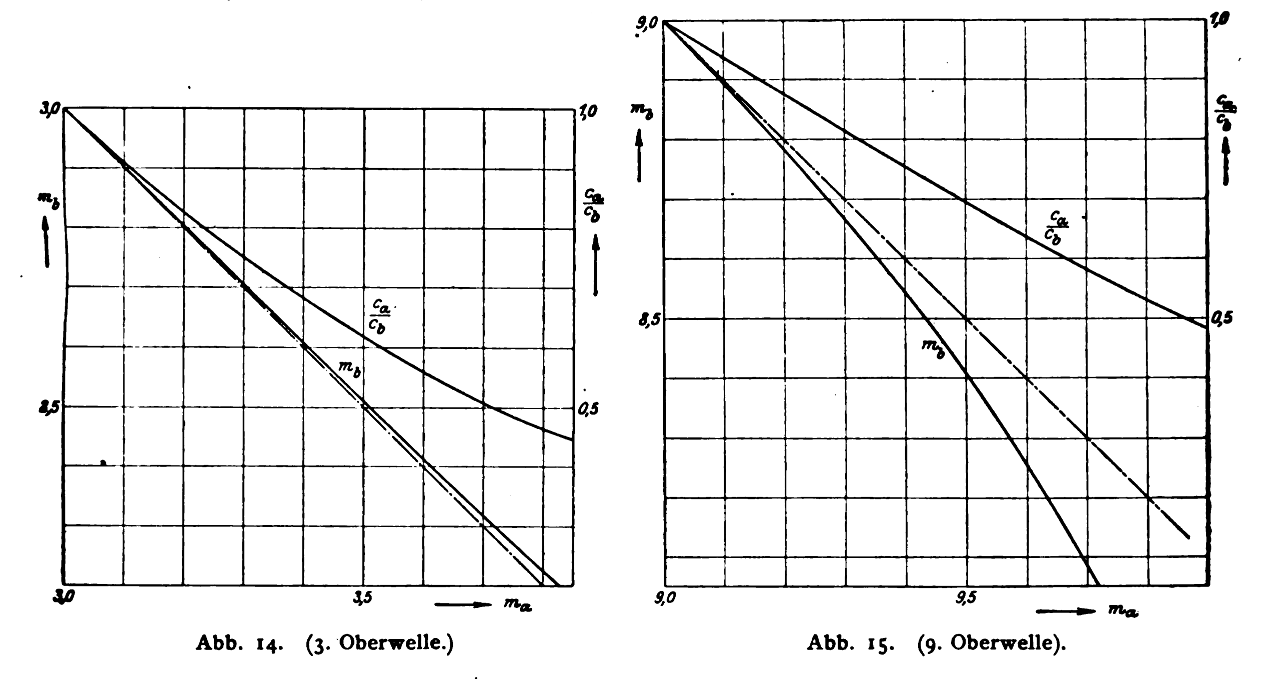


Abb. 14. (3. Oberwelle.) Abb. 15. (9. Oberwelle).

Als zweite Bedingung wurde oben verlangt, daß der Widerstandsoperator des Doppelkreises (mit vorgeschaltetem Widerstand R_c) für die Frequenz $m\omega_0$ größer als R_1' sei. Vorerst zeigt sich, daß er reiner Wirkwiderstand ist. Denn der Doppelkreis besitzt die Eigenschaft [Gl. 33a)]

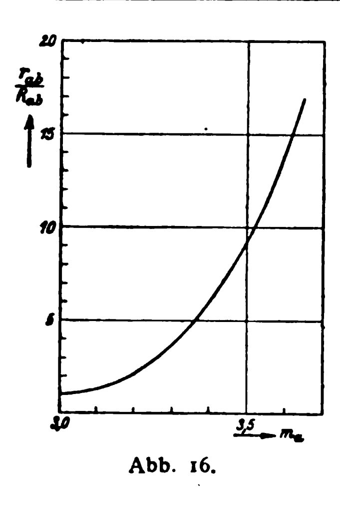
$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2}.$$

Diese entspricht aber der Gl. 12), mithin ist der Phasenwinkel für die m-te Oberwelle 0. Der Widerstand heiße r_1. Er berechnet sich aus Gl. 25) zu

$$r_1 = \frac{R_a^2 - X_a X_b}{2 R_a} + R_c = r_{ab} + R_c.$$

r_{ab} ist der Widerstand des Doppelkreises allein bei der Frequenz $m\omega_0$. Nach Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke und einigen Umformungen ergibt sich

$$r_{ab} + R_c = \frac{R_a}{2}\left[1 + \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R_a^2 m^2} \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2 (m^2 + m + 2)^2 (m^2 - m - 2)^2}{[m_a^2 m_b^2 - (m+2)^2]^2}\right] + R_c. \quad 39)$$


Abb. 16.

Es könnte R_a noch durch R_{ab} und eine Funktion von m_a und m_b ersetzt werden [Gl. 36)]. $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$, d. h. das Verhältnis des Widerstandes des Doppelkreises zum Widerstand des vorherigen einfachen Kreises wäre dann also dargestellt als Funktion von k_{ab} und m_a, da ja auch m_b eine Funktion von m_a ist [Gl. 38)]. Der Ausdruck würde aber in allgemeiner Form viel zu kompliziert. Für die 3. Oberwelle und $k_{ab} = \frac{R_{ab}}{L_1 \omega_0} = 0{,}382$ wurde die Rechnung durchgeführt und $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$ in Funktion von m_a aufgetragen (Abb. 16). Naturgemäß ist für

$$m_a = m_b = m \qquad \frac{r_{ab}}{R_{ab}} = 1.$$

Mit wachsendem $(m_a - m)$ dagegen steigt der Wert von r_{ab} sehr rasch auf ein Vielfaches von R_{ab} an. Damit ist die gestellte 2. Bedingung erfüllt. Denn es ist jetzt auch

$$r_1 = r_{ab} + R_c > R_{ab} + R_c,$$

und zwar um ein Mehrfaches. Es ist also auch $J_1' < J_1$ und damit $J > 0$ (S. 367). Für größere k_{ab} wird die $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$-Kurve in Abb. 16 flacher, für kleinere steiler.

Die Berechnungsgleichungen mögen nochmals zusammengestellt werden:

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m^2 = \frac{(m_a^2 - m_b^2)(m^2 - m_b^2)}{4} \cdot \frac{5 - m}{m^2 - 1} \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

$$\left.\begin{aligned} L_a &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m+2)^2} \\ L_b &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m+2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 34a)$$

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \quad \ldots\ldots \quad 33a)$$

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{m_a^2 - m^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{m_b^2}{m_a^2} \quad \ldots\ldots \quad 33b)$$

$$\frac{R_{ab}}{R_a} = \frac{R_1 - R_c}{R_a} = 1 - 2\frac{[m_a^2 m_b^2 - (m+2)^2](m_a^2 - m^2)(m^2 - m_b^2)}{(m_a^2 - m_b^2)^2 (m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)} \quad \ldots \quad 36a)$$

$$r_{ab} = r_1 - R_c = \frac{R_a}{2}\left[1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R_a^2 m^2} \cdot \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2}{[m_a^2 m_b^2 - (m+2)^2]^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)^2 (m^2 - m - 2)^2}{m^2}\right]. \quad 39)$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst: Kreis 1' ist durch einen Doppelkreis so ersetzt, daß bei den Frequenzen ω_0 und $(m+2)\omega_0$ sein Widerstandsoperator mit demjenigen des ersetzten Kreises identisch ist. Für die Frequenz $m\omega_0$ der zu messenden Oberwelle ist der Widerstand ein Mehrfaches desjenigen des ersetzten Kreises, und zwar reiner Wirkwiderstand. Letzterer Umstand ist wichtig, denn nun hat das Instrument für die Frequenz m überhaupt nur Wirkwiderstand, indem ja Kreis 2 in Resonanz ist und Kreis 1'' nur induktionslosen Widerstand enthält. Ob auch für die übrigen Wellen [außer 1. und (m + 2)ter] die Identität so groß ist, daß dieselben keinen Einfluß auf den Ausschlag haben, werden Versuche zeigen. Damit ist ein Instrument geschaffen, das nur auf die betreffende m-te Oberwelle anspricht. Es muß nur noch mit einer Spannung dieser Frequenz geeicht werden, um die Oberwelle direkt in Volt anzuzeigen.

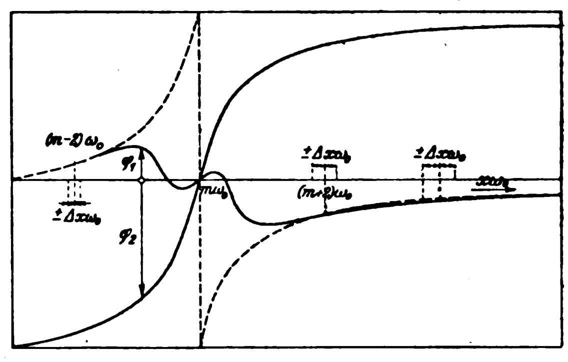


Abb. 17.

Abb. 17 zeigt den Verlauf von φ_1 bei ungeteiltem (gestrichelte Kurve) und Doppelkreis (ausgezogene Kurve). Je nach dem kleinern oder größern Abstand der Resonanzfrequenzen m_a und m_b von m schneidet die Kurve die Abszissenachse ein- oder dreimal.

Die obige Ableitung der Berechnungsformeln gilt nicht für die Messung der Grundwelle, $m = 1$, da dort naturgemäß für die Frequenz ω_0 keine Übereinstimmung zwischen Doppelkreis und ersetztem Kreis bestehen darf. Damit fallen zwei Bedingungen weg. Dafür wird die neue Bedingung gestellt: Der Blindwiderstand soll für $m = 1$ zu 0 werden, also nach Gl. 12):

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - 1}.$$

Ferner kann neben m_a jetzt auch m_b frei gewählt werden. Es bleibt also die Identität mit dem ersetzten Kreis für die $(m+2)$-te Oberwelle:

$$R_a^2 - \omega_0^2 L_a L_b v_a v_b = (R_1 - R_c)\, 2 R_c - \omega_0^2 L_1 v (L_a v_a + L_b v_b) \quad \ldots . \quad 30\text{b})$$

$$(R_1 - R_c - R_a)(L_a v_a + L_b v_b) + 2 R_a L v = 0 \quad \ldots \ldots . \quad 31\text{b})$$

Darin ist für $m = 1$:

$$v = \frac{8}{3}, \qquad v_a = \frac{9 - m_a^2}{3}, \qquad v_b = \frac{9 - m_b^2}{3},$$

und nach einigen Umformungen:

$$(R_1 - R_c - R_a) L_a \frac{m_a^2 - m_b^2}{1 - m_b^2} + 2 R_a L_1 = 0,$$

$$L_a = - L_1 \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \cdot \frac{2 R_c}{R_1 - R_c - R_a}.$$

Aus diesen beiden Formeln würden sich R_a und L_a ergeben. Die Berechnung liefert aber sehr komplizierte Ausdrücke. Deshalb werde gesetzt:

$$R_1 - R_c = \frac{R_a}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 40)$$

Beispiele zeigen, daß dadurch L_a um 1 bis 2% falsch wird, was nachher durch die Justierung ausgeglichen werden kann. Dann ist

$$L_a = 4 L_1 \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 41)$$

$$L_b = 4 L_1 \frac{m_a^2 - 1}{m_a^2 - m_b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 42)$$

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 43)$$

$$R_a = 2 (R_1 - R_c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 44)$$

$$r_1 = R_1 \left[1 + \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R_a^2}\, 16 \frac{(1 - m_a^2)^2 (m_b^2 - 1)^2}{(m_a^2 - m_b^2)^2} \right] \quad \ldots \ldots . \quad 45)$$

Oft ist es vorteilhaft, die Windungszahlen der beiden festen Instrumentenspulen entgegen der bisherigen Annahme nicht gleich zu machen. Seien n_1' und n_1'' die betreffenden Windungszahlen. Dann wird der Fall ohne weiteres auf den besprochenen zurückgeführt durch Multiplikation der Größen L, R, $\frac{1}{C}$ $\left(\text{bzw. } R_a, R_c, L_a, L_b, \frac{1}{C_a}, \frac{1}{C_b}\right)$ des Kreises $1'$ mit dem Faktor $\frac{n_1''}{n_1'}$. Durch Vergrößerung von n_1' ist es z. B. möglich, den Stromverbrauch dieser Spulen gegenüber $1''$ herunterzudrücken.

Die Berechnung des Ausschlages des Instrumentes für die m-te Oberwelle gestaltet sich sehr einfach, da nur Werkwiderstände auftreten.

Sei

$$\frac{r_1}{R_1} = \varrho_1,$$

dann ist in Gl. 20)

$$J_2 = \frac{P}{R_2},$$

$$J_1 = \frac{P}{R_1} - \frac{P}{r_1} = \frac{P}{R_1} \cdot \frac{P-1}{\varrho_1},$$

$$\cos \varphi_{12} = 1;$$

also geht Gl. 20) in die Form über:

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 46)$$

Dabei ist P die zu messende Spannung der m-ten Oberwelle.

2. Messung bei schwankender Frequenz.

Die bisherigen Ausführungen sind richtig unter der Voraussetzung, daß die Frequenz der zu analysierenden Spannung sich nicht ändert. Bei Laboratoriumsuntersuchungen ist diese Bedingung leicht einzuhalten. In Netzen dagegen werden immer kleinere Abweichungen von der vorgeschriebenen Frequenz stattfinden und die Angaben des Apparates müssen davon unabhängig gemacht werden.

Der Einfluß der Schwankungen kann sich in zwei Richtungen geltend machen, einmal kann eine Beeinflussung des Ausschlages durch fremde Oberwellen stattfinden und dann können im Bereiche der m-ten Oberwelle selbst Fehler auftreten.

Bei den fremden Wellen kommen einmal die (m + 2)-te und die Grundwelle in Betracht. Bei dem flachen Schnitt der beiden φ-Kurven (Abb. 17) darf erwartet werden, daß die Bedingung $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 90^0$ auch bei kleinen Schwankungen um $\Delta x \omega_0$ noch genügend genau erfüllt ist. Für die übrigen fremden Oberwellen ist, wie Abb. 17 zeigt, der Fehler in φ_{12}, der durch Schwanken um $\Delta x \omega_0$ entsteht, kleiner als der durch die Verschiedenheit von Doppelkreis und ersetztem Kreis entstandene. Wird also jener durch die Drosselung unterdrückt, so macht sich auch dieser nicht bemerkbar.

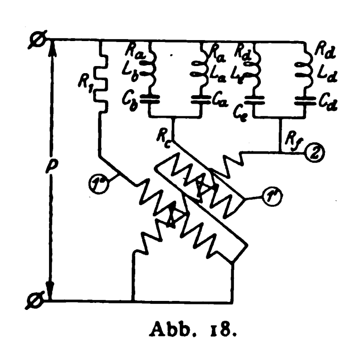


Abb. 18.

Im Bereich der m-ten Oberwelle soll der Ausschlag α des Instrumentes von der Frequenz im Bereiche der auftretenden Schwankungen unabhängig sein. Dafür ist maßgebend Gl. 20). Darin weisen die Glieder der rechten Seite alle drei ein Maximum für x = m auf (für das Glied $\cos \varphi_{12}$ allerdings schwach ausgeprägt). Deshalb besitzt α hier ein scharfes Maximum. Schon kleine Frequenzschwankungen würden den Ausschlag stark beeinflussen.

Um diese Erscheinung zu vermeiden, wird auch Kreis 2 in einen Doppelkreis zerlegt, mit den Eigenfrequenzen m_d und m_e (Abb. 18). Wieder ist der Instrumentenwiderstand

und ein kleiner Betrag für die Justierung vorgeschaltet. Dabei sind diese Eigenfrequenzen aber im Gegensatz zu Kreis 1′ nur wenig von m verschieden. Für J_2 entsteht so ein Minimum statt des vorherigen Maximums (Abb. 7 stellt die entsprechenden Scheinwiderstände dar, reziprok J_2). Die günstige Größe von m_d und m_e wird experimentell so ermittelt, daß das Minimum von J_2 die beiden Maxima von J_1 und $\cos \varphi_{12}$ annähernd aufhebt. Die weitere Dimensionierung des Doppelkreises erfolgt nach den Formeln 33) bis 45), denn die Bedingungen sind wieder dieselben: Identität mit dem zu ersetzenden Kreis für die gefährlichen Frequenzen ω_0 und $(m+2)\omega_0$. Dagegen muß jetzt $\frac{r_2}{R_2}$ möglichst klein sein, nicht mehr möglichst groß (wie es von $\frac{r_1}{R_1}$ verlangt wurde), da sonst der Strom J_2 zu sehr geschwächt wurde. Abb. 16 zeigt, daß dafür m_a möglichst nahe an m liegen muß. Aus dem gleichen Grunde ist ein großes $k_{de} = \frac{R_2}{\omega_0 L_2}$ günstiger als ein kleines. r_2 ist wieder der Widerstand des Kreises 2 bei der Meßfrequenz $m\omega_0$.

Der Ausschlag α berechnet sich jetzt folgendermaßen: Sei

$$\varrho_2 = \frac{r_2}{R_2}, \qquad 47)$$

dann ist für $x = m$

$$J_2 = \frac{P}{R_2 \varrho_2}$$

und aus Gl. 20 ergibt sich

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1 \varrho_2} \qquad 48)$$

Dabei sind ϱ_1 und ϱ_2 nur von m_a, m_b, m_c, m_d, k_{ab} und k_{de} abhängig.

C. Messung der Stromstärke einer Oberwelle.

Für Stromanalyse wurde der gleiche Apparat verwendet unter Vorschaltung eines Stromwandlers. Letzterer erhielt eine spezielle Wicklung für hohe Sekundärspannung. Da der Widerstand des Apparates fast reiner Wirkwiderstand ist, kommt eine Verzerrung der Kurvenform nicht in Betracht. Versuche von Agnew zeigen, daß der Einfluß verschwindend ist.

D. Ableitung einer Methode zur Messung einer Oberwelle in Prozenten der Grundwelle.

Die entwickelte Methode erlaubt die direkte Messung einer Oberwelle in Volt oder Ampere. Es braucht also nur noch durch ein gewöhnliches Volt- resp. Amperemeter die Gesamtspannung (resp. -Strom) gemessen zu werden, um die Oberwelle in Prozenten der Gesamtspannung (-Strom) zu erhalten. Wie die Versuche in Teil II zeigen, ist das Ergebnis richtig. Wird dabei aber dem Instrument und dem parallelen Voltmeter ein großer Widerstand vorgeschaltet, so ist die Spannungskurve an den Klemmen des Instrumentes nicht mehr dieselbe wie die zu untersuchende.

Denn es besteht ja für Kreis 2 des Instrumentes ein Resonanzzustand für die m-te Oberwelle. Für diese ist also der Widerstand des Kreises 2 und damit des ganzen Instrumentes kleiner als für die übrigen Wellen[1]). Damit ist auch das Verhältnis Vorschaltwiderstand zu Instrumentenwiderstand für die verschiedenen Wellen verschieden, die Spannungsteilung ist eine andere für die zu messende Welle als für alle anderen, die Kurvenform an den Klemmen des Instrumentes ist also verzerrt. Bei Stromanalyse liegen die Verhältnisse ähnlich.

[1]) Bei der für die Versuche in Teil II verwendeten Schaltung war das Verhältnis z. B. 3 : 4. Allerdings könnte es bedeutend verbessert werden durch Vergrößerung von R_2 im Verhältnis zu R_1. Das bedingt aber entweder höhere Spannung oder größeren Stromverbrauch.

Zur Vermeidung dieses Fehlers wurde die Methode weiter durchgebildet. Es wird jetzt einmal die Grundwelle, dann die gesuchte Oberwelle gemessen. Hat das Instrument bei beiden Messungen denselben Widerstand, so liefert das Verhältnis der beiden den Wert der Oberwelle in Prozenten der Grundwelle, und zwar ist unter dieser Bedingung das Verhältnis Spannung an den Instrumentenklemmen zu Spannung an Instrument plus Vorschaltwiderstand beide Male dasselbe. Es sind also die gemessenen Werte den Wellen der zu untersuchenden Spannung proportional.

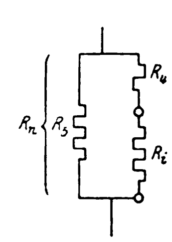


Abb. 19.

Um zu vermeiden, daß jede Oberwelle eine eigene Skala benötigt, muß verlangt werden, daß bei allen Wellen der Vollausschlag für die gleiche Spannung erfolge.

Diese beiden Forderungen (gleicher Widerstand und gleiche Empfindlichkeit für alle Wellen) führten zu einer Justierschaltung für jede einzelne Welle. Sie besteht aus einem vor- und einem parallelgeschalteten Widerstand (Abb. 19). Für die Berechnung der beiden ergibt sich auf einfache Weise

$$R_v = R_1\left(\frac{P_n}{P_1} - 1\right) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 49)$$

$$R_s = \frac{R_n}{1 - \frac{R_n P_1}{R_1 P_n}} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 50)$$

Dabei ist R_1 der wirkliche Widerstand des Instrumentes für die betreffende Welle, R_n der für alle Wellen verlangte Widerstand, P_1 die Spannung, welche für die betreffende Welle Vollausschlag ergibt, P_n die für Vollausschlag allen Wellen vorgeschriebene Spannung.

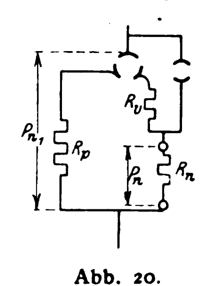


Abb. 20.

Eine gleiche Schaltung wird für die Änderung des Meßbereiches angewandt. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Meßinstrument, wie eben ausgeführt, für alle Wellen auf gleichen Widerstand R_n gebracht worden sei. Der Gesamtwiderstand muß derselbe bleiben, der Vollausschlag aber für P_{n_1} statt für P_n erfolgen, R_p und R_v (Abb. 20) sind dann für alle Wellen dieselben:

$$R_p = R_n \frac{1}{1 - \frac{P_n}{P_{n_1}}}, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 51)$$

$$R_v = R_n \left[\frac{P_{n_1}}{P_n} - 1\right] \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 52)$$

Eine Messung wird nun folgendermaßen ausgeführt: Die zur Grundwelle gehörigen Kreise und Widerstände werden eingeschaltet. Ein Vorschaltwiderstand wird so reguliert, daß mit dem Meßbereich für 100⁰/₀ das Instrument 100⁰/₀ anzeigt. Dann wird auf die gesuchte Oberwelle umgeschaltet und ihr Wert direkt in Prozenten der Grundwelle abgelesen.

Für die Stromanalyse wird wieder ein Stromwandler für hohen sekundären Spannungsabfall vorgeschaltet. Der Regulierwiderstand liegt jetzt parallel dazu. Im übrigen bleiben alle Größen dieselben, insbesondere auch die Widerstände für die Meßbereiche und diejenigen für Normalisierung des Instrumentenwiderstandes. Denn R_n ist immer dasselbe, folglich bei gleichem P_n für Vollausschlag auch das zugehörige J.

(Fortsetzung folgt.)



Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 11. Heft. 1918.

Spulen und Wanderwellen. II.

Resonanzspannungen beim Einschalten einer Spule aus zwei Windungen.

Von

W. Rogowski, z. Z. im Felde.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Die technische Aufgabe. In einer früheren Arbeit habe ich zur Erklärung von Überspannungen den Fall behandelt, daß eine Spule aus zwei Windungen an eine Gleichstrombatterie E geschaltet wird (Abb. 1). Die Zuleitung QA habe ich damals einmal als sehr kurz, das andere Mal als sehr lang vorausgesetzt. In beiden Hauptfällen fällt die Überspannung nach Höhe und Dauer recht verschieden aus. Aus diesem Grunde ist es wünschenswert, über sie auch noch bei mittlerer Länge der Zuleitung unterrichtet zu werden.

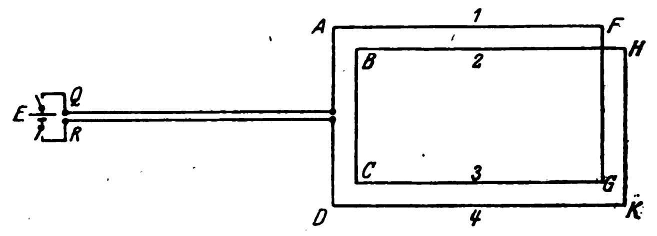


Abb. 1. Eine Spule aus zwei Windungen wird über eine Zuleitung an eine Spannung E geschaltet.

Bei näherer Prüfung erkennt man bald, daß bei mäßig langer Zuleitung ein Fall besonders hohe Überspannungen zu liefern verspricht. Nämlich der Fall, daß die Spule aus zwei Windungen über ein Kabel (über einen sehr niedrigen Wellenwiderstand) eingeschaltet wird, dessen Länge mit der Länge der Spulenseite (mit dem halben Spulenumfang, dem vierten Teile der Drahtlänge der Spule) übereinstimmt. Dieser Fall soll im folgenden genauer untersucht werden. Wir werden sehen, daß die Überspannung in Zustandekommen und Verlauf an die Resonanzspannungen gekoppelter Systeme erinnert.

2. Angenäherte Lösung. Wir wollen annehmen, die Windungscharakteristik $\mathfrak{z}$ der Spule sei unendlich groß im Vergleich zur Charakteristik Z des Zuleitungskabels (weit auseinandergezogene Windungen)[1]. Dann wird sich der Einschaltvorgang auf der Zuleitung angenähert so abspielen, als ob sie an den Stellen AD frei endigte (Abb. 2). Unter diesen Umständen sind die Kabelspannungen bekannt. Es ist aber vielleicht doch gut, wenn wir auf sie in unserer Ausdrucks- und Darstellungsweise nochmals zurückkommen[2].

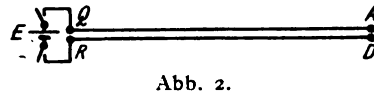


Abb. 2.

Von der Spannungsquelle löst sich im allerersten Anfang die Spannungswelle

$$\lambda_0 = E \qquad 1)$$

[1]) Wenn man die Spule aus zwei Windungen als Vertreter beliebiger Spulen ansieht, muß man auch mit der Möglichkeit eines solchen Falles rechnen.

[2]) Die vorliegende Arbeit lehnt sich eng an an meine frühere Arbeit: Einschaltspannungen der Spule aus zwei Windungen, Arch. f. Elektrot. 6, S. 265. Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, setze ich diese Arbeit hier als bekannt voraus.

los. Sie hat Rechteckform. Ihre Spannungshöhe ist E. Der Kopf der Welle wandert von der Spannungsquelle nach dem Kabelende. Der Schweif liegt bei QR. Diese Gestalt behält die Welle während der Zeit $0 \leq t < \frac{T}{2}$ bei, unter $\frac{T}{2}$ die Laufzeit für die Kabelzuleitung verstanden. Abb. 3a zeigt die Welle für diese Zeitspanne. Wir wollen sie „Kopfwelle" nennen.

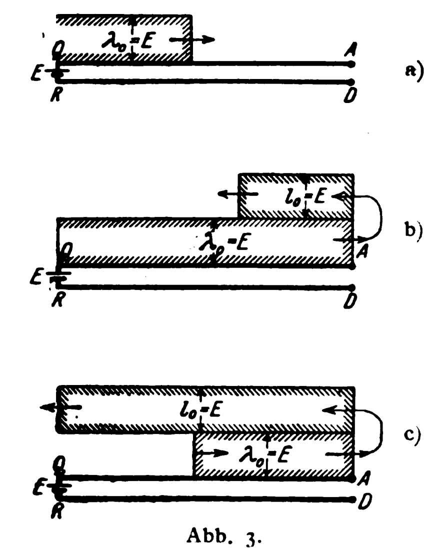


Abb. 3.

Die Welle findet, wenn sie an das Kabelende kommt, den Weg versperrt. Sie wandert nun zurück. Vom physikalischen Standpunkte aus geurteilt, reicht die Gesamtwelle von der Spannungsquelle bis zum Kabelendpunkt und von dort bis zur augenblicklichen Lage des zurückwandernden Wellenkopfes. Wir wollen sie uns aber am Kabelendpunkt zerschnitten denken. Dann haben wir einen, von links nach rechts wandernden Stumpf, die Stumpfwelle λ_0, und einen von rechts nach links wandernden Teil, die neue Kopfwelle, die wir l_0 nennen (Abb. 3b). Nach bekannten Rechnungen ist

$$l_0 = E. \tag{2}$$

Die Stumpfwelle und die neue Kopfwelle überdecken sich teilweise. Dort, wo dies der Fall ist, beträgt die Spannung des Kabels

$$\lambda_0 + l_0 = 2E. \tag{3}$$

Wenn der Kopf der Welle l_0 an den Klemmen QR ankommt, dann brechen wir die Welle λ_0 daselbst ab und lassen ihr als Fortsetzung die Welle λ_1 folgen. λ_1 muß so gewählt werden, daß

$$\lambda_1 + l_0 = E \tag{4}$$

ist. Nun war bereits $l_0 = E$, somit ist $\lambda_1 = 0$. Die Welle[1] λ_1 ist physikalisch genau so die Fortsetzung der Welle l_0, wie l_0 selbst die Fortsetzung der Welle λ_0 ist. Während der Kopf der Welle λ_1 nach dem Kabelende wandert, schiebt er den Schweif der Welle λ_0 vor sich her. Die Welle λ_0 schrumpft daher in der Zeit $T < t < 3\frac{T}{2}$ nach und nach zusammen (Abb. 3c). Wir nennen sie für diese Zeit die Schweifwelle λ_0. Kopfwelle, Stumpfwelle und Schweifwelle haben dieselbe Spannungsamplitude[2] E.

Wir führen dieselben Betrachtungen, die vorhin für die Welle λ_0 angestellt worden sind, für die Welle λ_p durch. Diese soll sich nach Vollendung des p-ten Laufes der Wanderwelle von der Spannungsquelle aus loslösen. Unter einem Lauf verstehen wir den Hin- und Rücklauf der Wanderwelle, der sich z. B. aus dem Lauf der Kopfwellen λ_0 und l_0 zusammensetzt und zu dem die Zeit T benötigt wird.

Kommt die Welle λ_p an den Klemmen AD an, so setzt sie sich fort in der neuen Kopfwelle

$$l_p = \lambda_p; \tag{5}$$

kommt die Welle l_p zur Spannungsquelle zurück, so brechen wir dort die Welle λ_p ab und lassen ihr als Fortsetzung die Welle λ_{p+1} folgen. Damit die Spannung E an den Klemmen QR aufrecht erhalten bleibt, muß zwischen den Amplituden der Wellen die Beziehung bestehen:

$$\lambda_{p+1} + l_p = E \tag{6}$$

[1]) Man sehe im Augenblick davon ab, daß die Welle λ_1 zufällig die Höhe Null hat.

[2]) Wir bezeichnen also kurz die Wellen nach ihrer Amplitude.

oder
$$\lambda_{p+1} + \lambda_p = E. \tag{7}$$
Dies ist eine Differenzengleichung.

Die Lösung lautet:
$$\lambda_p = A \cdot (-1)^p + \frac{E}{2}. \tag{8}$$
A willkürliche Kenstante.

Damit sich $\lambda_0 = E$ ergibt, muß $A = \frac{E}{2}$ gesetzt werden, so daß:
$$\lambda_p = \frac{E}{2}[1 + (-1)^p] \tag{9}$$
wird.

Wir berechnen die Spannung an den Klemmen AD: Sie kommt dadurch zustande, daß sich die Stumpfwelle λ_p mit der Kopfwelle $l_p = \lambda_p$ überdeckt. Ihr allgemeiner Ausdruck lautet:
$$\lambda_p + l_p = 2\lambda_p = E[1 + (-1)^p]. \tag{10}$$
Sie besteht somit aus einer Übereinanderlagerung der Gleichspannung E und der Wechselspannung $(-1)^p E$. (Man beachte das negative Vorzeichen.) Die Abhängigkeit von der Zahl der Läufe p gibt das Bild 4. Das gleiche Bild gilt für die zeitliche Abhängigkeit dieser Spannung. Als Zeiteinheit ist dann die Zeit T für die Dauer eines Hin- und Rücklaufes gewählt.

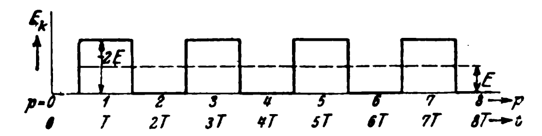


Abb. 4. Klemmenspannung der Spule, wenn ihre Windungscharakteristik groß gegen die der Zuleitung ist.

Wir wenden uns nun der Spule zu. An ihren Klemmen liegt die in Abb. 4 aufgezeichnete Spannung. Unsere Aufgabe besteht somit darin, für diese besondere Klemmenspannung die Spannungsbeanspruchung der Spule zu ermitteln.

Wir fassen die Spule wieder auf als zwei ineinandergeschobene Doppelleitungen mit gewissen Kurzschlüssen als Querverbindungen.

Wir unterscheiden die Spannungswellen μ_p und ν_p, die von den Klemmen der Spule aus längs den Doppelleitern (1, 4) und (2, 3) nach rechts laufen (Abb. 1). Desgleichen unterscheiden wir die Wellen m_p und n_p, die längs den gleichen Doppelleitungen nach links eilen. Der Leser findet nähere Angaben hierüber in meiner früheren Arbeit (Archiv f. Elektrot. **6**, S. 277). Die Zeit für einen Lauf der Wanderwelle in der Spule ist ebenfalls gleich T. Dies rührt daher, daß die Zuleitung genau so lang wie die Spulenseite sein sollte. Auch die Wellen μ_p, ν_p, m_p, n_p bestehen aus Kopf-, Stumpf- und Schweifwellen. Man kann nun für die gegenseitigen Beziehungen der Wellen der Spule die Überlegungen des Kapitels I unserer früheren Arbeit (a. a. O.) Wort für Wort wiederholen. Nur muß die früher als zeitlich unveränderlich angesehene Klemmenspannung jetzt durch die Wechselspannung (Abb. 4) ersetzt werden. Früher führten unsere Überlegungen auf die Differenzengleichung:
$$\mu_{p+2} - \mu_p = E \tag{11}$$
$$E = \text{constans}.$$
Jetzt lautet die Differenzengleichung:
$$\mu_{p+2} - \mu_p = E[1 + (-1)^p]. \tag{12}$$
Die konstante Klemmenspannung ist also in der Differenzengleichung lediglich durch die zeitlich veränderliche (Abb. 4) zu ersetzen.

Die Lösung von 12) hat die Form:

$$\mu_p = A + B(-1)^p + \frac{p}{2} E \cdot [1 + (-1)^p]. \tag{13}$$

Wir haben nun die willkürlichen Konstanten zu bestimmen:

Für $p = 0$ (Anfang der Spulenaufladung nach einem halben Laufe der Wanderwelle in der Zuleitung) ist

$$\mu_{(p=0)} = \mu_0 = 2\,E. \tag{14}$$

Für $p = 1$ ist, wie man leicht ermittelt,

$$\mu_{(p=1)} = \mu_1 = 0.$$

Wir haben somit die Bestimmungsgleichungen:

$$2\,E = A + B,$$

$$0 = A - B,$$

und hieraus folgt:

$$A = E; \quad B = E. \tag{15}$$

Für μ_p ergibt sich somit der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \mu_p &= E\left[1 + (-1)^p + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}p(-1)^p\right] \\ \text{oder} \quad \mu_p &= \frac{E}{2}(2 + p)[1 + (-1)^p]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Windungsspannungen. Ich habe früher (Archiv f. Elektrot. **6**, S. 278) für die Windungsspannung an der Spulenvorderseite den Ausdruck

$$\mathbf{E}_v = \frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2} \tag{17}$$

abgeleitet. Er gilt auch jetzt noch. In unserem Falle erhält man somit für die Windungsspannung an der Spulenvorderseite

$$\mathbf{E}_v = \frac{E}{2}[1 + (-1)^p]. \tag{18}$$

also wie es sein muß die Hälfte der Klemmenspannung Abb. 4.

Für die Windungsspannung an der Spulenrückseite gilt nach meinen früheren Rechnungen (S. 279) der Ausdruck:

$$\mathbf{E}_r = \mu_p - \mu_{p-1}. \tag{19}$$

Setzen wir den Wert 16) ein, so erhalten wir:

$$E_r = \frac{E}{2}[1 + (-1)^p(3 + 2\,p)]. \tag{19a}$$

Die Windungsspannung an der Spulenrückseite besteht aus einer Gleichspannung $\frac{E}{2}$ und einer darüber gelagerten Wechselspannung $(-)^p \cdot \frac{E}{2} \cdot (3 + 2\,p)$. Die Amplitude dieser Wechselspannung steigt proportional der Laufzahl also auch proportional der Zeit an und wird nach und nach beliebig groß (Abb. 5). Einen ganz ähnlichen Anstieg erhalten wir bei Resonanz auch für die Spannung in einem Schwingungskreis mit konzentrierter Selbstinduktion und Kapazität und dem Widerstande Null.

Beim Einschalten einer Spule über ein Kabel von bestimmter Länge können sich daher Resonanzspannungen ausbilden. Wird die Kabelcharakteristik klein genug gegenüber der Windungscharakteristik der

Spule gemacht, dann können diese Resonanzspannungen so groß werden, daß sie einen Windungsdurchschlag bestimmt herbeiführen.

3. Strenge Lösung. Welche Werte haben die Windungsspannungen, wenn die Windungscharakteristik $\mathfrak{z}$ der Spule nicht mehr sehr (unendlich), sondern nur mäßig groß im Vergleich zur Kabelcharakteristik ist?

In demselben Augenblick, in dem die Kopfwelle λ_p die Klemmen QR verläßt, verlassen die Kopfwellen m_{p-1} und n_{p-1} die Spulenrückseite, um der Spulenvorderseite zuzueilen (vgl. meine frühere Arbeit S. 290). Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich die Wellen l_p, μ_p und ν_p aus Teilbeträgen der Wellen λ_p, m_{p-1} und n_{p-1} zusammensetzen müssen:

$$l_p = \alpha\lambda_p + \beta m_{p-1} - \gamma n_p \qquad 20)$$

$$\mu_p = \delta\lambda_p - \alpha m_{p-1} - \gamma n_{p-1} \qquad 21)$$

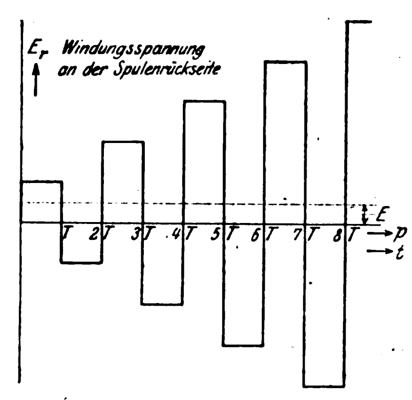


Abb. 5. Die Windungsspannung an der Spulenrückseite kann bei bestimmter Länge und bei kleiner Windungscharakteristik der Zuleitung mit der Zeit außerordentlich stark anwachsen.

Die Koeffizienten α, β, γ haben nach meinen früheren Rechnungen die Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\mathfrak{z} - Z}{2\mathfrak{z} + Z} \\
\beta &= \frac{2Z}{2\mathfrak{z} + Z} \\
\gamma &= \frac{2Z\cdot\frac{M}{L}}{2\mathfrak{z} + Z} \\
\delta &= \frac{4\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z} + Z}
\end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Für später sind wichtig noch die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha - \delta &= -1 \\
\alpha + \beta &= 1 \\
\alpha^2 + \beta\delta &= 1 \\
\alpha - \gamma &= \frac{2\mathfrak{z} - Z - 2Z\frac{M}{L}}{2\mathfrak{z} + Z} = a = 1 - b \\
1 + \gamma - \delta &= -a;
\end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

$$b = 1 - a = 2 + \gamma - \delta.$$

$$\frac{\delta}{4 - b} = \frac{1}{2},$$

wenn

$$\frac{M}{L} = 1.$$

[1]) α gleich dem Koeffizienten in 62b) S. 290 und gleich dem Werte $-\alpha$ von S. 291. β gleich dem Koeffizienten von m_0 in Formel 64) S. 290. γ gleich dem Koeffizienten von n_0 S. 290 und gleich dem Werte β auf S. 291. δ gleich dem Koeffizienten in Ausdruck 62a) S. 290.

Die Beziehung 6) muß offenbar auch jetzt noch gültig bleiben

$$\lambda_{p+1} + l_p = E. \tag{24}$$

Nun können bei unseren Wellen die Amplituden m_{p-1}, n_{p-1}, ν_{p-1} durch die Amplitude μ_p ausgedrückt werden. Man darf schreiben (vgl. meine frühere Arbeit S. 291):

$$\left.\begin{aligned} m_{p-1} &= -\nu_{p-1} = -\mu_{p-2} \\ n_{p-1} &= -\mu_{p-1} \\ n_{p-1} &= -\nu_p = -\mu_{p-1}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Somit gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$\lambda_{p+1} = E - \alpha\lambda_p + \beta\mu_{p-2} - \gamma\mu_{p-1} \tag{26}$$

$$-\delta\lambda_p = \alpha\mu_{p-2} + \gamma\mu_{p-1} - \mu_p. \tag{27}$$

Wir beseitigen μ_{p-1} und erhalten:

$$\lambda_{p+1} - \lambda_p = E + \mu_{p-2} - \mu_p. \tag{28}$$

Wird λ_p beseitigt, so folgt:

$$\lambda_{p+1} = E + \frac{1}{\delta}\mu_{p-2} - \frac{\gamma}{\delta}\cdot\mu_{p-1} - \frac{\alpha}{\delta}\mu_p.$$

oder

$$\lambda_p = E + \frac{1}{\delta}\mu_{p-3} - \frac{\gamma}{\delta}\cdot\mu_{p-2} - \frac{\alpha}{\delta}\mu_{p-1}. \tag{29}$$

Setzen wir diesen Wert in 28) ein, so erhalten wir die Differenzgleichung unseres Problems:

$$-\mu_{p-3} + \mu_{p-2}(1 + \gamma - \delta) + (\alpha - \gamma)\mu_{p-1} + \mu_p(\delta - \alpha) = \delta E$$

oder

$$\mu_{p+3} + a\cdot\mu_{p+2} - a\cdot\mu_{p+1} - \mu_p = \delta E. \tag{30}$$

Um die Lösung dieser Differenzgleichung zu gewinnen, stellen wir die Gleichung dritten Grades auf[1]):

$$y^3 + ay^2 - ay - 1 = 0. \tag{31}$$

Ihre Wurzeln lauten:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -\left(\frac{2-b}{2}\right) + \frac{i}{2}\sqrt{4b-b^2} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ y_3 &= -\left(\frac{2-b}{2}\right) - \frac{i}{2}\sqrt{4b-b^2} = \cos\varphi - i\sin\varphi \\ i = \sqrt{-1}; &\quad \cos\varphi = -\left(\frac{2-b}{2}\right); \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{4b-b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Wenn der Quotient $\frac{Z}{\delta}$ verschwindet (Kabelcharakteristik unendlich klein gegenüber der Windungscharakteristik), ist $\sin\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$; $\varphi = 180^0$. Die Lösungen y_2 und y_3 fallen zusammen. Wir kommen dann, wie der Leser selbst nachweist, auf den im Abschnitt 2 behandelten Grenzfall zurück. Lassen wir die Kabelcharakteristik im Verhältnis zur Windungscharakteristik wachsen, so nimmt der Wert von $\cos\varphi$, absolut genommen, ab; der Winkel φ wird kleiner als 180^0. Tragen wir die Wurzeln y_2 und y_3 in der Ebene der imaginären Zahlen auf, so wandern die ihnen zugehörigen

[1]) Bezüglich der Integration von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, für die die Mathematiker gut ausgebildete Methoden gefunden haben, verweise ich auf die bei Teubner erschienenen Lehrbücher von **Wallenberg** und von **Markoff**, ebenso auf den Aufsatz über Differenzenrechnung in der mathematischen Enzyklopädie.

Punkte auf dem Einheitskreise vom Punkte P aus mit wachsendem Werte der Kabelcharakteristik oder mit abnehmendem Werte der Windungscharakteristik im Sinne der eingetragenen Pfeile der Abb. 6. Zusammengehörige Werte von b und $\frac{Z}{\delta}$ sind der Abb. 7 zu entnehmen.

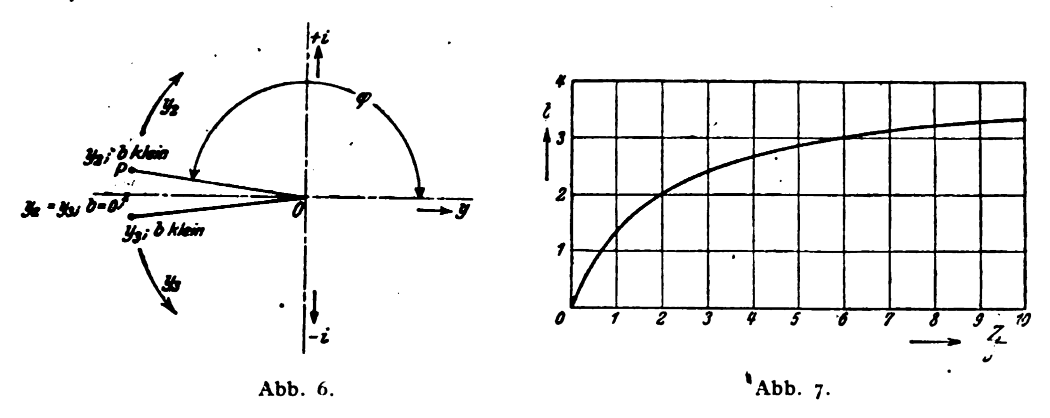


Abb. 6. Abb. 7.

Nach der Theorie der Differenzengleichungen lautet nun die Lösung von 30):

$$\mu_p = A + B\cos p\varphi + C\sin p\varphi + \frac{\delta E}{4-b}\cdot p. \qquad 34)$$

Konstantenbestimmung. a) Für die Windungsspannung an der Spulenrückseite E_r. Nach früheren Rechnungen ist

$$E_r = \mu_p - \mu_{p-1} \qquad 35)$$

$$\left.\begin{aligned} &= B[\cos p\varphi - \cos(p-1)\varphi] + C[\sin p\varphi - \sin(p-1)\varphi] + \frac{\delta E}{4-b} \\ &= \cos p\varphi\,[B(1-\cos\varphi) + C\sin p\varphi] + \sin p\varphi\,[C(1-\cos\varphi) - B\sin\varphi] + \frac{E\delta}{4-b} \end{aligned}\right\} \qquad 36)$$

Wir setzen nun:

$$\left.\begin{aligned} B[(1-\cos\varphi) + C\sin\varphi] &= B' \\ C[(1-\cos\varphi) + B\sin\varphi] &= C', \end{aligned}\right\} \qquad 37)$$

wo B' und C' neue Konstanten sind, und erhalten:

$$E_r = B'\cos p\varphi + C'\sin p\varphi + \frac{E\delta}{4-b}. \qquad 38)$$

Nun ergibt die Differenzengleichung, wenn man $\mu_{-3} = \mu_{-2} = \mu_{-1} = 0$ setzt,

$$\mu_0 = \delta E \qquad 39)$$

$$\mu_1 = \delta E b. \qquad 40)$$

Für $p = 0$ ist daher

$$E_{r\,|p=0|} = \mu_0 = \delta E. \qquad 41)$$

Für $p = 1$ hat man zu schreiben:

$$E_{r\,|p=1|} = \mu_1 - \mu_0 = \delta E(b-1) = -\delta E(1-b). \qquad 42)$$

Somit müssen wir den Konstanten B' und C' folgende Forderungen auferlegen:

$$\left.\begin{aligned} B' + \frac{E\delta}{4-b} &= \delta E \\ B'\cos\varphi + C'\sin\varphi + \frac{E\delta}{4-b} &= -\delta E(1-b). \end{aligned}\right\} \qquad 43)$$

Sie werden durch die Werte erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} B' &= \frac{\delta E}{4-b}[3-b] \\ C' &= \frac{\delta E}{2 \sin\varphi (4-b)} \cdot [-4+5b-b^2]. \end{aligned}\right\} \quad 44)$$

Somit lautet unser Ergebnis für die Windungsspannung an der Spulenrückseite:

$$E_r = \frac{\delta E}{4-b} \left[(3-b)\cos p\varphi - \frac{4-5b+b^2}{\sqrt{4b-b^2}} \sin p\varphi + 1\right]. \quad 45)$$

b) Konstantenbestimmung für die Windungsspannung E_v an der Spulenvorderseite. Es ist:

$$E_v = \frac{\mu_p - \mu_{p-2}}{2}. \quad 46)$$

Für $p = 0$ ist

$$E_{v\,|p=0|} = \frac{\mu_0}{2} = \frac{\delta E}{2}. \quad 47)$$

Für $p = 1$ ergibt sich:

$$E_{v\,|p=1|} = \frac{\mu_1}{2} = \frac{\delta E b}{2}. \quad 48)$$

Der allgemeine Ausdruck für E_v lautet:

$$E_v = \frac{1}{2}\left[A + B\cos p\varphi + C\sin p\varphi + \frac{E\delta p}{4-b} - A - B\cos(p-2)\varphi - C\sin(p-2)\varphi - \frac{E\delta(p-2)}{4-b}\right] \quad 49)$$

$$E_v = \frac{1}{2}\left[\cos p\varphi\{B(1-\cos 2\varphi) + C\sin 2\varphi\} + \sin p\varphi\{-B\sin 2\varphi + C(1-\cos 2\varphi)\} + \frac{2E\delta}{4-b}\right] \quad 50)$$

oder, wenn wir die neuen Konstanten

$$\left.\begin{aligned} B'' &= B(1-\cos 2\varphi) + C\sin 2\varphi \\ C'' &= -B\sin 2\varphi + C(1-\cos 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad 51)$$

einführen:

$$E_v = \frac{1}{2}\left[B''\cos p\varphi + C''\sin p\varphi + \frac{2E\delta}{4-b}\right]. \quad 52)$$

Soll dieser Ausdruck für $p = 0$ in den Ausdruck 47) und für $p = 1$ in den Ausdruck 48) übergehen, so muß

$$\left.\begin{aligned} B'' + \frac{2E\delta}{4-b} &= \delta E \\ B''\cos\varphi + C''\sin\varphi + \frac{2E\delta}{4-b} &= \delta E b \end{aligned}\right\} \quad 53)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} B'' &= \delta E \cdot \frac{2-b}{4-b} \\ C'' &= \frac{4E \cdot b\delta\left(1-\frac{b}{4}\right)}{(4-b)\sqrt{4b-b^2}} \end{aligned}\right\} \quad 54)$$

gesetzt werden.

Somit lautet der gesuchte Ausdruck für die Windungsspannung an der Spulenvorderseite:

$$E_v = \frac{1}{2}\frac{\delta E}{4-b}\left[(2-b)\cos p\varphi + \sqrt{4b-b^2}\sin p\varphi + 2\right]. \quad 55)$$

Die Klemmenspannung E_k, gleichzeitig die Spannung am Ende des Zuleitungskabels, ist etwa doppelt so groß wie E_v:

$$E_k = \frac{\delta E}{4 - b}\left[(2 - b)\cos p\varphi + \sqrt{4b - b^2}\sin p\varphi + 2\right]. \qquad 56)$$

Wir diskutieren den Inhalt unserer Formeln zunächst für den Fall, daß $\frac{Z}{\mathfrak{z}}$ klein, oder was dasselbe besagt, daß b klein gegen 1 ist (Einschalten einer Spule über ein Kabel).

Der Winkel φ ist dann nur etwas kleiner als 180^0. Die aufeinanderfolgenden Lagen des beweglichen Schenkels des Winkels $p\varphi$ sind für die Anfangswerte von p der Abb. 8 zu entnehmen. Der Winkel $p\varphi$ überstreicht nach und nach die ganze Windrose und springt im allgemeinen aus dem II. Quadranten in den IV., und umgekehrt aus dem IV. in den II. oder aus dem I. in den III. und aus dem III. in den I. Quadranten. Die Funktionen $\cos p\varphi$ und $\sin p\varphi$ wechseln daher das Vorzeichen, wenn p um eine Einheit wächst. Die beiden Funktionen $\sin p\varphi$ und $\cos p\varphi$ stellen daher, wenn man nur einen engen Bereich von Nachbarwerten der Laufzahl p in Betracht zieht, Wechselspannungen dar. Die Periode beträgt 2 T, unter T die Zeit für einen Wanderwellenlauf verstanden. Die Ausdrücke $\sin p\varphi$ und $\cos p\varphi$ haben aber noch eine zweite Periode. Da der Winkel $p\varphi$ mit seinen Lagen, wenn man einen weiten Bereich der Werte p in Betracht zieht, nach und nach die ganze Windrose überstreicht, so schwankt der Wert dieser Ausdrücke periodisch zwischen $+1$ und -1.

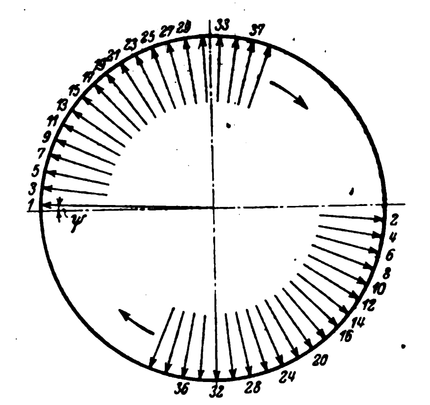


Abb. 8. Aufeinanderfolgende Lagen des beweglichen Schenkels des Winkels $p\varphi$. Der andere Schenkel liegt fest und fällt mit der positiven Abszissenachse zusammen.

Bezeichnen wir mit ψ die Abweichung des Winkels φ von 180^0, $\psi = 180^0 - \varphi$, so ist die zweite Periodendauer gegeben durch

$$\tau = \frac{360^0}{\psi^0} \cdot T. \qquad 57)$$

Die Werte von ψ sind der Abb. 9 zu entnehmen.

Die zweite Periodendauer ist bei kleinem Werte ψ wesentlich größer als 2 T. Physikalisch heißt dies, die Ausdrücke $\cos p\varphi$ und $\sin p\varphi$ stellen Schwebungen dar. Die Schwebungen folgen um so langsamer, je kleiner der Winkel ψ ist, also je kleiner die Charakteristik des Zuleitungskabels im Vergleich zur Windungscharakteristik ist.

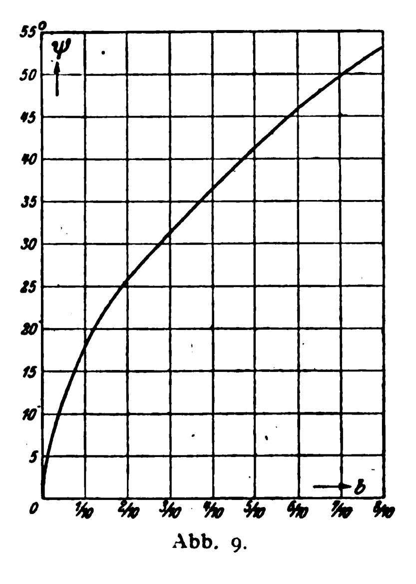


Abb. 9.

Unsere Spannungen E_r, E_v, E_k bestehen daher aus einer Gleichspannung (konstantes Glied in der Klammer) und einer darüber gelagerten Wechselspannung, deren Amplitude in Schwebungen auf- und abschwillt. Beispiele hierfür findet man in den Abb. 11 bis 13, die durch ihre Beschriftung ohne weiteres verständlich sind.

Auch wenn die Windungscharakteristik nur mäßig groß gegenüber der Kabel-

charakterstik ist, können sich, wie diese Abbildungen lehren, noch recht kräftige Resonanzüberspannungen ausbilden.

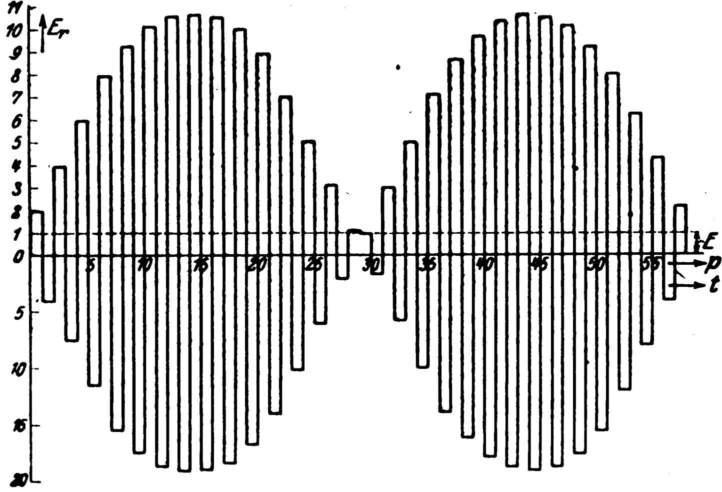


Abb. 11. Windungsspannung an der Spulenrückseite. $b = 1/_{100}$. Langsame Schwebungen. Maximalwert etwa 10,5 mal größer als die Schaltspannung E.

Anders verläuft der Vorgang, wenn b große Werte annimmt. Der größte Wert, den b erreichen kann, ist 4. Bis zu dieser Grenze hin ist unsere Lösung 32) zu gebrauchen. Wir beschränken uns im Augenblick für die Diskussion, um das Charakteristische herauszuarbeiten, auf nahe bei 4 gelegene Werte von b und setzen:

$$\left.\begin{array}{l} 4 - b = \eta \\ b = 4 - \eta. \end{array}\right\} \qquad 58)$$

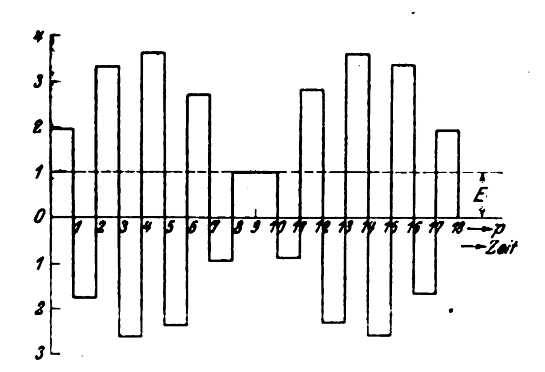


Abb. 12. Windungsspannung an der Spulenrückseite. $b = 1/_{10}$. Raschere Schwebungen. Maximalwert etwa 3,7 mal größer als die Schaltspannung E.

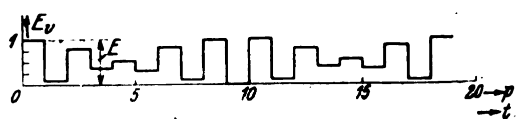


Abb. 13. Windungsspannung an der Spulenvorderseite. $b = 1/_{10}$. Auch hier Schwebungen. Maximalwert gleich der Schaltspannung E.

Es is dann

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = 1 - \frac{\eta}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4\eta - \eta^2} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\[2ex] y_3 = 1 - \frac{\eta}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{4\eta - \eta^2} = \cos\varphi - i\sin\varphi \\[2ex] \cos\varphi = 1 - \frac{\eta}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{4\eta - \eta^2}. \end{array}\right\} \qquad 59)$$

Wenn η klein wird oder, was dasselbe besagt, wenn b an den Grenzwert 4 heranrückt, wird der Winkel φ klein und liegt im ersten Quadranten. Die aufeinanderfolgenden Lagen von $p\varphi$ gehen jetzt aus der Abb. 14 hervor. Die Ausdrücke $\sin p\varphi$

und $\cos p\varphi$ können jetzt keine Schwebungen, sondern nur ganz gewöhnliche Schwingungen darstellen mit der Periodendauer von

$$\frac{360}{\varphi}\cdot T \text{ Sekunden.} \qquad 60)$$

In Abb. 15 habe ich für den theoretischen Fall $\eta = 0{,}1$ die Windungsspannung für die Spulenrückseite gezeichnet. Abb. 16 gilt für den praktisch vielleicht realisierbaren Fall $\eta = 0.5$.

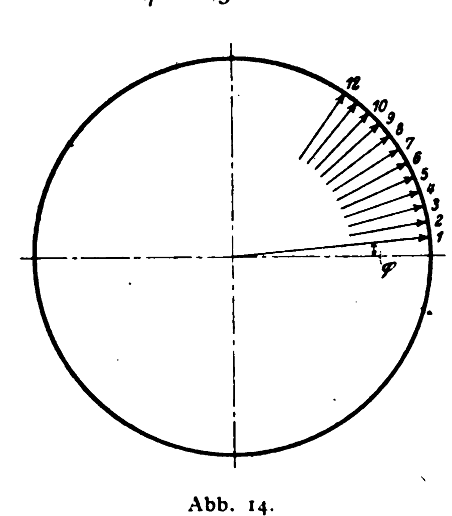


Abb. 14.

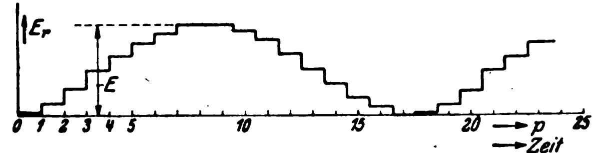


Abb. 15. Windungsspannung an der Spulenrückseite. Langsame Schwingung. Maximale Spannung annähernd gleich der Schaltspannung E; $b = 3{,}9$; $\beta = 0{,}1$.

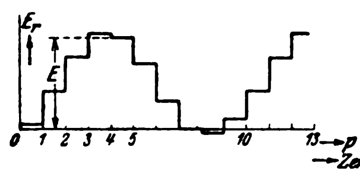
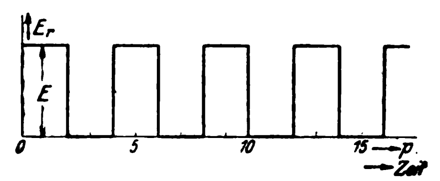


Abb. 16. Windungsspannung an der Spulenrückseite. Raschere Schwingung. Maximalspannung annähernd gleich E; $b = 3{,}5$; $\beta = 0{,}5$.

Weiter habe ich für das Zwischengebiet, in welchem b weder als groß noch als klein betrachtet werden, die Abb. 17 gezeichnet. Sie gilt für den Fall $b = 2$; $\varphi = 90^0$.

Uns interessiert noch der Maximalwert der Spannungen, der während einer Schwebung oder Schwingung erreicht wird.



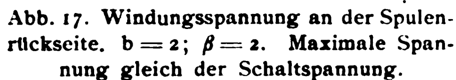


Abb. 17. Windungsspannung an der Spulenrückseite. $b = 2$; $\beta = 2$. Maximale Spannung gleich der Schaltspannung.

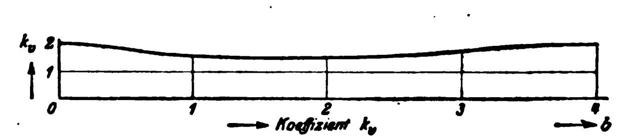


Abb. 18. Der Koeffizient k_v.

Bei beliebigem Werte von b gelten die folgenden Ausdrücke:

Für die Windungsspannung an der Spulenrückseite:

$$E_{r\,\max} = \frac{E}{2}\cdot\frac{2\delta}{4-b}\left[1+\sqrt{(3-b)^2+\frac{[4-5b+b^2]^2}{4b-b^2}}\right] \qquad 61)$$

für die Windungsspannung an der Spulenvorderseite:

$$E_{v\,\max} = \frac{E}{2}\cdot\frac{\delta}{4-b}\left[2+\sqrt{(2-b)^2+4b\left(1-\frac{b}{4}\right)}\right] \qquad 62)$$

für die Klemmenspannung der Spule:

$$E_{k\,\max} = E_{v\,\max} \qquad 63)$$

oder wenn wir $\frac{M}{L}$ in den Ausdrücken 22) und 23) gleich 1 setzen:

$$E_{r\,\max} = \frac{E}{2}\left[1+\sqrt{(3-b)^2+\frac{(4-5b+b^2)^2}{4b-b^2}}\right] = \frac{E}{2}\,k_r \qquad 64)$$

$$E_{v\,max} = \frac{E}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[2 + \sqrt{(2-b)^2 + 4b\left(1 - \frac{b}{4}\right)}\right] = \frac{E}{2} \cdot k_v \qquad 65)$$

$$E_{k\,max} = E \cdot k_v. \qquad 66)$$

Die Koeffizienten k_v und k_r sind den Abb. 18 und 19 zu entnehmen.

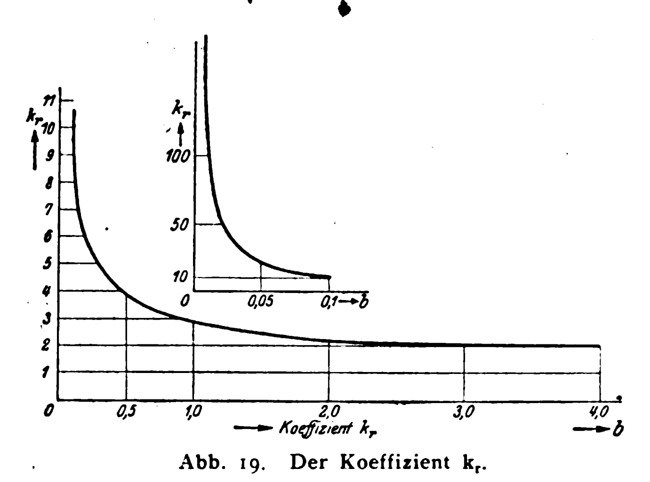


Abb. 19. Der Koeffizient k_r.

Für kleine Werte von b leitet man leicht die folgenden Näherungswerte ab:

$$E_{r\,max} = \frac{E}{2}\left[1 + \sqrt{9 + \frac{4}{b}}\right] \qquad 67)$$

$$E_{v\,max} = E \qquad 68)$$

$$E_{k\,max} = 2\,E. \qquad 69)$$

Liegt der Wert von b nahe bei 4 ($\eta = 4 - b$), so lauten die Näherungswerte:

$$\left.\begin{array}{l} E_{r\,max} = E \\ E_{v\,max} = E \\ E_{k\,max} = 2\,E. \end{array}\right\} \qquad 70)$$

Für ein und denselben Wert von b ist der Koeffizient k_r größer als der Koeffizient k_v; die Spulenrückseite ist daher die gefährdete Stelle. Bei großen Werten von b (einschalten über eine Freileitung) erreicht daselbst die Windungsspannung den Wert E der Schaltspannung. Bei kleinem Werte von b (einschalten über ein Kabel) kann jedoch die Windungsspannung bedeutend über den Wert E emporwachsen und daher eine schwere Gefahr für die Spule ergeben.

Ein neues Meßinstrument zur direkten Analyse von Wechselströmen.

Von

Arnold Roth, Baden (Schweiz).

Mitteilung aus dem elektrotechnischen Laboratorium der Technischen Hochschule Berlin.

Fortsetzung von Seite 376.

II. Experimentelle Untersuchungen.

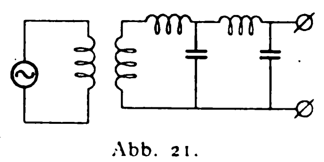
Über eine Reihe von Punkten mußten noch Versuche Aufschluß geben. Vor allem war zu untersuchen, welche Fehler sich aus der praktischen Durchbildung der Theorie ergeben, dann waren Justierung und Eichung vorzunehmen. Ferner war die in Teil I getroffene Annahme zu untersuchen, daß die Drosselung hinreiche, um die aus den Abweichungen in $\cos\varphi_{12}$ von 0 für die fremden Oberwellen entstehenden Fehler zu unterdrücken. Des weitern waren Anhaltspunkte für die Dimensionierung des Instrumentes zu gewinnen $\left(\text{Wahl von } \frac{R}{\omega_0 L}, m_a, m_b, m_d, m_e\right)$. Schließlich wurden noch vergleichende Messungen mit einer bekannten Methode gemacht. Alle Messungen wurden für die 3. und 9. Oberwelle durchgeführt. Die 3. wurde gewählt, weil bei ihrer Messung die benachbarte Grundwelle sich besonders stark geltend macht, die 9. als ein Vertreter der höheren Oberwellen.

Für die Untersuchungen war die Anwendung von hochfrequentem Wechselstrom notwendig. Dafür standen 2 Hochfrequenzmaschinen für die Frequenzen 500 und 10000 zur Verfügung.

Zur bequemen Regelung der Tourenzahl wurden die mit den Maschinen gekuppelten Gleichstrommotoren von Generatoren in Leonardschaltung angetrieben. Der Frequenzmessung lag ein Zungenfrequenzmesser von Hartmann & Braun für die Frequenzen um 50 zugrunde. Die Periodenzahl der Hochfrequenzmaschinen wurde darauf bezogen, indem von den beiden Schleifen eines Oszillographen die eine durch die Frequenz 50, die andere durch den zu untersuchenden Hochfrequenzstrom erregt wurde. Um die Frequenz $m\omega_0$ zu erhalten, wurde diese reguliert, bis einerseits das Bild im Oszillographen m Wellen auf eine Grundwelle erkennen ließ, andererseits Stillstehen des Bildes den vollständigen Synchronismus anzeigte.

Spannungs- und Strommessung der Hochfrequenzströme erfolgte durch Manganin-Konstantan-Thermoelemente in Doppelschaltung nach Schering[16].

In vielen Fällen war ein Strom von reiner Sinusform notwendig. Es wurde dann eine Schaltung von 2 Schwingungskreisen angewendet, wie es z. B. K. W. Wagner bei seinen Untersuchungen getan hat[20] und [3] (Abb. 21).


Abb. 21.

Der Strom von der Frequenz 50 wurde von zwei verketteten Phasen eines Drehstromgenerators geliefert. Hier lagen die Verhältnisse insofern besonders günstig zur Erzielung einer reinen Sinuskurve, als die 3. und 9. Oberwelle darin gar nicht vorkommen[12].

Die für die Versuche verwendeten Schaltungen besaßen folgende Größen: $\omega_0 = 314.2$.

3. Oberwelle: $m = 3$, $\frac{R}{\omega_0 L} = 0{,}68_8$.

$$\left.\begin{array}{lll} m_a = 3{,}5, & C_a = 0{,}8\,\mu F, & R_a = R_b = 140 \text{ Ohm} \\ m_b = 2{,}51, & C_b = 1{,}17_5\,\mu F, & R_c = 36 \text{ Ohm} \end{array}\right\} L_1 = 0{,}527 \text{ H.}$$

$$R_1'' = 57 \text{ Ohm}, \quad R_s = 37 \text{ Ohm}.$$
$$R_1' = 114 \text{ Ohm}, \quad C = 1{,}85\,\mu F.$$

$$\left.\begin{array}{lll} m_d = 3{,}13, & C_d = 0{,}50\,\mu F, & R_d = R_e = 220 \text{ Ohm} \\ m_e = 2{,}87, & C_e = 0{,}57\,\mu F, & R_f = 106 \text{ Ohm} \end{array}\right\} L_2 = 1{,}00_5 \text{ H}, \quad R_2 = 217 \text{ Ohm.}$$

9. Oberwelle: $m = 9$, $\frac{R}{\omega_0 L} = 1{,}11$.

$$\left.\begin{array}{lll} m_a = 9{,}86, & C_a = 0{,}10\,\mu F, & R_a = R_b = 196 \text{ Ohm} \\ m_b = 8{,}14, & C_b = 0{,}133\,\mu F, & R_c = 60 \text{ Ohm} \end{array}\right\} L_1 = 0{,}474 \text{ H.}$$

$$R_1'' = 83{,}_6 \text{ Ohm}, \quad R_1' = 167{,}_2 \text{ Ohm}.$$
$$R_s = 37 \text{ Ohm}, \quad C = 1{,}85\,\mu F.$$

$$\left.\begin{array}{lll} m_d = 9{,}45, & C_d = 0{,}10_0\,\mu F, & R_d = R_e = 218 \text{ Ohm} \\ m_e = 8{,}55, & C_e = 0{,}11_6\,\mu F, & R_f = 83{,}_6 \text{ Ohm} \end{array}\right\} L_2 = 0{,}55_3 \text{ H}, \quad R_2 = 192{,}_8 \text{ Ohm.}$$

A. Teiluntersuchungen.

1. Vom Dynamometer verursachte Fehler und ihre Behebung.

Die Berechnung ergab, daß das Dynamometer, wenn der gesamte Stromverbrauch auf ungefähr 0,3 Ampere festgesetzt wurde, eine viel größere Empfindlichkeit aufweisen mußte, als die bisher gebräuchlichen direkt zeigenden Instrumente besitzen. Deshalb wurde Fadenaufhängung gewählt und Eisen verwendet. Für den Eisenkörper wurde ein listenmäßiger Fabrikationsteil von Siemens & Halske genommen, wie er für selbstregistrierende Meßinstrumente verwendet wird. Er besteht aus geblättertem Eisen und



besitzt kreisrunde Bohrung und einen ebensolchen Eisenkern. Die Wicklungen wurden auf Schablonen hergestellt und in Nuten eingepreßt (Abb. 22). Die Stromzuführung erfolgte durch Aufhängefaden und eine Stromzuführungsfeder, beide aus Phosphorbronze. Die Feder war in üblicher Weise halb rechts-, halb linksgängig gewickelt, um den Temperatureinfluß zu vermindern. Die Skala umfaßte einen rechten Winkel und war vorerst in 150 gleiche Teile geteilt. Der Kopf war als Torsionskopf ausgebildet, so daß die Ruhelage des Zeigers über die ganze Skala verschoben werden konnte. Eine Luftdämpfung, bestehend aus einem Zylinder in Form eines Kreissektors und einem Aluminiumkolben mit regulierbarer Öffnung für Luftaustritt, ermöglichte aperiodische Einstellung des Zeigers. Es war:

Windungszahl der festen Spule	1′	$n_1' = 130$	
„ „ „ „	1″	$n_1'' = 65$	
„ „ bewegl. „	2	$n_2 = 240$	
Widerstand der festen Spule	1′	= 9,50 Ohm	
„ „ „ „	1″	= 0,707 „	
„ „ bewegl. „ mit Zuführungen	2	= 72,3 „	
Selbstinduktion der festen Spule	1′	= 0,0048 H	
„ „ „ „	1″	= 0,0012 H	
„ „ bewegl. „	2	$= 0{,}013_3$ H	

für $\alpha = 150^0$ $J_1 \cdot J_2 = 85{,}5 \cdot 10^{-6}$ Ampere,

wobei J_1 der durch die feste Spule 1″ fließende Strom ist. Den Aufbau des Instrumentes zeigt Abb. 22, und zwar von der Zeigerseite her gesehen. Der magnetische Kreis wird vom Körper a und dem Kern f gebildet; beide bestehen aus geblättertem Eisen. Eingepreßt in den Eisenkörper sind die Spulen b. Das ganze System ist an den Laschen c im Gehäuse festgeschraubt. Ein Bügel d (zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten aus Widerstandsmaterial hergestellt), trägt einerseits den Eisenkern, andererseits isoliert (h) das Rohr i, welches den Torsionskopf k mit 3 Fixierschrauben hält. Ein Arm des Bügels trägt eine Libelle e, die mit 3 Stellschrauben justiert wird. Am Torsionskopf ist mit einem Faden m aus Phosphorbronze die bewegliche Spule p aufgehängt. Der Faden dient zugleich als Stromzuführung, die zweite wird von der Feder h übernommen. Zentriert wird die Spule mit den erwähnten Fixierschrauben am Torsionskopf. Die Spule trägt auf der einen Seite Balanciergewichte r, auf der andern an dem Drahte q den Dämpferkolben (nicht abgebildet). q ist der Gewichtsersparnis wegen als Röhrchen ausgebildet. Das System ist so konstruiert, daß es als Ganzes abmontiert werden kann, ebenso das bewegliche System für sich.

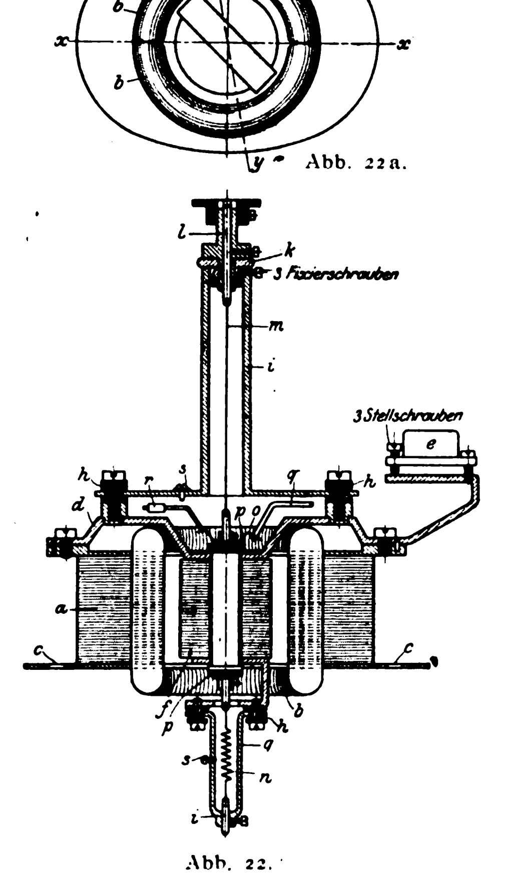


Abb. 22a.

Abb. 22.

Äußerlich gleicht das Instrument einem Wattmeter normaler Konstruktion. Es unterscheidet sich davon nur durch einen kamin-

artigen Aufbau für den Torsionskopf und durch 3 Stellschrauben an der Grundplatte für Einstellung der horizontalen Lage. Um elektrostatische Kräfte auszuschließen, wurde ein Punkt der festen Spule mit dem Eisenkörper verbunden.

a) Das Eisen als Fehlerquelle. Infolge der unhomogenen Feldverteilung hatte die bewegliche Spule das Bestreben, sich senkrecht zur Achse x — x einzustellen (Abb. 22a). Versuche ergaben den dadurch verursachten Fehlerwinkel α_f ungefähr proportional dem Quadrate der Stromstärke (Abb. 23). Die Abhängigkeit vom Ausschlag bei konstantem Strom zeigt Abb. 24.

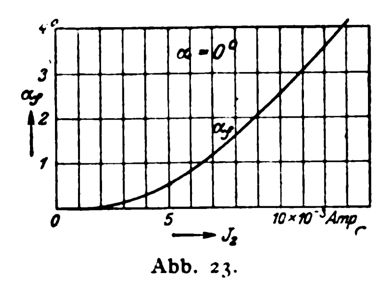


Abb. 23.

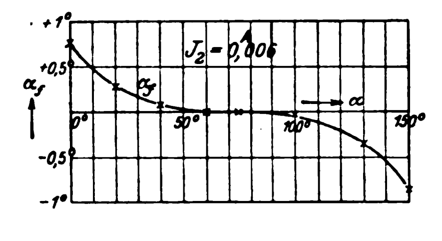


Abb. 24.

Bei der Verwendung des Instrumentes zur Kurvenanalyse fließt durch die bewegliche Spule der Strom der m-ten Oberwelle und derjenige Teil der Ströme der übrigen Wellen, der nicht durch die Drosselung unterdrückt wird. Am gefährlichsten sind wieder Grundwelle und (m + 2)-te Oberwelle. Die letztere hat bei Anwendung der Versuchsschaltung für die 3. Oberwelle (S. 389) in dem ungünstigen Falle, wo sie 15% der Grundwelle mißt, einen Wert von $2 \cdot 10^{-3}$ Ampere, nach Abb. 23 also keinen Einfluß. Die übrigen Oberwellen werden stärker gedrosselt, fallen also erst recht nicht in Betracht. Dagegen ist von der Grundwelle noch eine Stromstärke von $6 \cdot 10^{-3}$ Ampere übrig und diese ergibt Fehler bis zu 0,8° (Abb. 24). Aus diesem Grunde wurde die Nullage des Instrumentes um 50° gedreht (gleich 30 geometrischen Graden, Achse y — y, Abb. 22a). Dort ist der Fehler kleiner als 0,1° (Abb. 24), bei Vollausschlag ist er allerdings wieder 0,8°, entsprechend 0,4% des Meßwertes. Wird er als zu groß erachtet, so kann er durch eine Korrekturtabelle eliminiert werden.

Der Strom der m-ten Oberwelle dagegen hat keinen Fehler zur Folge, da für ihn dieselbe Erscheinung bei der Eichung auftritt: Der Fehler wird hineingeeicht.

b) Einfluß der Selbstinduktion von fester Spule 1′ und beweglicher Spule. Die Selbstinduktionen beider Spulen wirken gleich wie die übrigen Induktivitäten des betreffenden Schwingungskreises und können zu ihnen addiert werden. Genau stimmt dies für unverzweigte Kreise nach Abb. 9. Bei Verwendung von Doppelkreisen (Abb. 18) werden die Induktivitäten mit ihrem doppelten Wert den einzelnen Teilkreisen zugezählt. Bei der Kleinheit dieser Selbstinduktionen im Verhältnis zu denjenigen der Spulen L_a, L_b, L_d, L_e ist der dadurch entstehende Fehler zu vernachlässigen.

c) Kompensierung der Selbstinduktion der Instrumentenspule 1″. Bei Aufstellung der Gleichungen in Teil I wurde angenommen, daß Kreis 1″ vollständig induktionsfrei sei. Für den vorgeschalteten Widerstand trifft dies zu, nicht aber für die Spule des Instruments. Es würde dadurch der Strom J_1'' mit wachsender Frequenz immer mehr gegen die Spannung an den Klemmen verschoben. Mit ihm der Gesamtstrom J_1 der festen Spulen. Dann würde die φ_1-Kurve nicht mehr asymptotisch zur Abszissenachse verlaufen. Versuche zeigten, daß trotz Drosselung infolge dieser Erscheinung die höhern Oberwellen einen so starken Einfluß auf den Ausschlag erhielten, daß eine Messung dadurch unmöglich wurde. Übrigens läßt sich dies auch leicht durch Rechnung feststellen.



Es wurden deshalb verschiedene Wege versucht, die Selbstinduktion zu kompensieren. Den Forderungen entsprach schließlich eine Anordnung, die aus einem vorgeschalteten Schwingungskreis mit sehr hoher Eigenschwingung parallel zu einem induktionslosen Widerstand bestand. Abb. 25 zeigt das Schema.

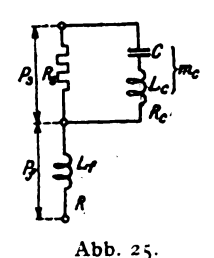


Abb. 25.

Da diese Schaltung vielleicht von allgemeinerem Interesse ist, möge hier näher auf ihre Theorie eingegangen werden.

Seien C und L_c Kapazität und Induktivität des Schwingungskreises, $\omega_0 m_c$ seine Eigenfrequenz, R_c sein Widerstand, R_s der zum Schwingungskreis parallel geschaltete induktionsfreie Widerstand. L_f ist die zu kompensierende Induktion der Dynamometerspule, R ihr Widerstand, Ströme und Spannungen tragen die entsprechenden Indexe. Dann ergibt eine einfache Rechnung den Phasenwinkel φ zwischen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{P}_f$ und dem Strom $\mathfrak{J}$ in L_f:

$$\operatorname{tg} \varphi = x \omega_0 \frac{L_f + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} L_f - C R_s^2 \frac{m_c^2}{m_c^2 - x^2}}{R + R_s + (R_s + R_c) x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} [R_s R_c + R R_s + R R_c]} \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

Es soll $\operatorname{tg} \varphi$ klein werden, damit also der Zähler klein. Der Nenner wächst mit x, wirkt also im günstigen Sinne. Dabei sei m_c höher als das m der höchsten in Betracht fallenden Oberwelle. Dann ist Entwicklung in eine konvergente Reihe möglich:

$$\text{Zähler} = x \omega_0 [L_f - R_s^2 C] + x^3 \omega_0^3 [L_f (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2] C^2$$
$$+ x^5 \frac{\omega_0^3}{m_c^2} \left[2 L_f (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2 \right] C^2 + x^7 \frac{\omega_0^3}{m_c^4} \left[3 L_f (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2 \right] . \quad . \quad 54)$$

Dieser Ausdruck wird für $x < m_c$ klein, wenn

$$L_f - R_s^2 C = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 C L_f (R_s + R_c)^2 = R_s^2 \frac{1}{m_c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Daraus folgt

$$L_c = \frac{1}{C m_c^2 \omega_0^2} = L_f \left(1 + \frac{R_c}{R_s} \right)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Die Dimensionierung der Kompensierung erfolgt an Hand der beiden Formeln 55 und 56. R_c/R_s wird klein gewählt, dann ist L_c ähnlich L_f. Sodann wählt man m_c größer als die in Betracht kommenden Oberwellen (ca. 50). Dadurch ist m_c bestimmt und daraus nach Gl. 55) R_s. Wie man sieht, ist die Kompensierung vom Widerstand R der zu kompensierenden Spule vollständig unabhängig.

Es soll der noch verbleibende Phasenwinkel einer so kompensierten Selbstinduktion berechnet werden. In der konvergenten Reihe Gl. 54) werde noch das 3. Glied berücksichtigt. Die Ausrechnung ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi_f = x^5 \cdot \frac{\omega_0^5 L_c^2 C^3 R_s^2}{R + R_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

Ein Beispiel werde gerechnet für

$$L_f = 0{,}002 \text{ H}, \quad R = 50 \text{ Ohm}, \quad R_s = 31{,}6 \text{ Ohm}, \quad C = 2{,}0 \, \mu\text{F}.$$

Dann wird nach Gl. 57)

$$\varphi_f = 12 \cdot 10^{-10} x^5 .$$

Ohne Kompensierung wäre

$$\varphi_f = 0{,}628 \, x ,$$

also noch für $x = 10$ 52000 mal größer als mit Kompensierung.

d) Kompensierung der Gegeninduktion zwischen beweglichen und festen Spulen. Vermittelst dieser Gegeninduktion fälschten die fremden Wellen die Angaben

des Instrumentes in hohem Maße. Ihre Wirkung wurde durch eine regulierbare Gegeninduktivität aufgehoben, welche aus einem System von einer drehbaren und zwei festen Spulen mit Eisenkörper und Eisenkern bestand, dessen Bau und Windungszahlen mit denjenigen des Dynamometers identisch waren. Die festen Spulen des Dynamometers wurden mit den entsprechenden festen der regulierbaren Gegeninduktivität in Reihe geschaltet, ebenso die bewegliche Spule mit der drehbaren, aber in entgegengesetztem Sinn. Um die zu einem bestimmten Dynamometerausschlag α gehörige Stellung der Gegeninduktivität zu finden, wurde folgenderweise verfahren: Die beiden Apparate wurden geschaltet, wie eben dargelegt. Durch zwei entsprechende feste Spulen wurde ein Wechselstrom geschickt und die beiden beweglichen Spulen über ein Vibrationsgalvanometer kurzgeschlossen. Mit dem Torsionskopf des Wattmeters wurde dann α eingestellt und hierauf die regulierbare Gegeninduktivität so lange gedreht, bis der Galvanometerausschlag verschwand. Dann waren die in den beweglichen Spulen induzierten elektromotorischen Kräfte einander gleich und damit auch die Gegeninduktionen. Die zu den verschiedenen α gehörenden Stellungen wurden auf einer Skala markiert.

Es ist nun vor jeder Ablesung am Dynamometer die regulierbare Gegeninduktivität auf die entsprechende Zahl einzustellen.

Natürlich muß die Selbstinduktion der zum Zweig 1'' gehörenden Spule auch kompensiert werden, sie wird zu L_f (Abschnitt II A 1c) zugezählt.

e) Einfluß der Gegeninduktion zwischen den beiden festen Spulen des Dynamometers. Die Gegeninduktivität zwischen den beiden festen Spulen wurde zuerst nach demselben Prinzip wie diejenige zwischen beweglicher und festen Spulen (II A 1d) kompensiert.

Der Ausschlag des Dynamometers für alle fremden Wellen blieb aber 0 mit oder ohne Kompensierung. Daraus wurde geschlossen, daß ein Einfluß dieser Gegeninduktion nicht merklich ist, die Kompensierung wurde wieder entfernt.

2. Justierung.

a) Einstellung des Zweiges 1'' auf Induktionslosigkeit. Diese Justierung ist zuerst durchzuführen, da die anderen einen induktionslosen Zweig 1'' voraussetzen. Dazu wird die gewöhnliche Wheatstonesche Brücke benutzt, drei Zweige von induktionslosen Widerständen, der vierte von Dynamometerspule 1'' samt Kompensationsschaltung gebildet. Als Brückeninstrument dient ein Telephon oder Vibrationsgalvanometer.

Dann wird bei einer niedrigen Frequenz (gewöhnlich wurde $x = 1$ genommen) R_s auf Stromlosigkeit im Telephon reguliert. Bei niedriger Periodenzahl sind nämlich in Gl. 54) bei der starken Konvergenz der Reihe die Glieder mit x^3, x^5 usw. ohne Einfluß. Es wird auf diese Weise also Bedingung 55) erfüllt.

Andererseits kommt die Größe L_c der Kompensierungsinduktivität nur bei diesen höheren Potenzen von x zur Geltung, also bei hohen Frequenzen. Deshalb wurde bei einer hohen Frequenz die Abgleichung von L_c vorgenommen. Und zwar wurde, abweichend von der in II A 1c entwickelten Theorie, L_c auf Stromlosigkeit in der Brücke reguliert. Statt der Kurve nach Gl. 57) erhält man jetzt also eine Kurve, welche die Abszissenachse bei der betreffenden hohen Frequenz, mit der die Abgleichung vorgenommen, schneidet.

Der Verlauf des Blindwiderstandes (proportional tg φ) für ein so kompensiertes Dynamometer wurde in einer Wechselstrombrücke nachgemessen. Den Verlauf stellt Abb. 26 dar. Mathematisch kann der Verlauf dieser Kurve wohl so begründet werden, daß in der Reihe

Abb. 26.

der Gl. 54) das x-Glied statt 0 klein und positiv ist, das Glied mit x^3 dagegen negativ anstatt 0, die höheren Glieder positiv. Dann ist die Einbuchtung von der 10. bis zur 15. Oberwelle auf das x^3-Glied zurückzuführen.

Für den Apparat wurde die Abgleichung von L_c bei $25\,\omega_0$ durchgeführt. Störungen durch die Selbstinduktion traten dann nicht mehr auf. Die verwendete Drosselspule besaß einen Eisenkreis mit Luftspalt.

b) Einstellung der Induktivitäten, Kapazitäten und Widerstände. Zuerst wurden die Kapazitäten auf die berechneten Werte eingestellt. Für die Abgleichung der Induktivitäten erwies sich die Einstellung auf Resonanz als genügend. Dafür wurde das Dynamometer benützt. Z. B. soll der Kreis d auf Resonanz bei der Frequenz $m_d \omega_0$ eingestellt werden. Dann werden alle Kreise unterbrochen, ausgenommen die Kreise 1″ und d (Abb. 27). Die Selbstinduktion von 1″ ist bereits kompensiert worden. Nun wird das Instrument mit Wechselstrom von der Frequenz $m_d \omega_0$ beschickt und L_d so lange verändert, bis der Ausschlag des Dynamometers ein Maximum ist.

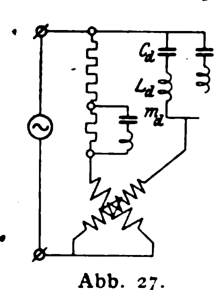


Abb. 27.

Natürlich könnte auch zuerst die Induktivität abgeglichen und dann die Kapazität auf Resonanz eingestellt werden.

Eine kleine Ungenauigkeit tritt in beiden Fällen auf, indem die Selbstinduktion der beweglichen Instrumentenspule nur mit einem einzigen Kreise in Reihe ist, anstatt — wie bei normalem Aufbau — mit dem Doppelkreis. Bei der Kleinheit dieser Selbstinduktion im Verhältnis zu derjenigen des ganzen Kreises verschwindet aber der Fehler.

Auf ähnliche Weise werden die Kreise a und b abgestimmt.

Nachdem die einzelnen Kreise reguliert waren, wurden sie zusammengebaut (Abb. 18) und die Widerstände auf die berechneten Werte roh abgeglichen. Hierauf wurde der Apparat abwechselnd mit den Frequenzen ω_0 und $(m+2)\cdot\omega_0$ beschickt, entsprechend den gefährlichsten Wellen. Bei der Frequenz ω_0 wurde dann R_f, bei $(m+2)\omega_0$ die Induktivität L_a so lange abgeändert, bis für beide der Ausschlag 0 war. Von der Induktivität ist nämlich der Ausschlag bei Frequenzen unter $m\omega_0$ wenig abhängig, für Frequenzen über $m\omega_0$ dagegen sehr.

c) Justierung von Instrumentenwiderstand und Vollausschlag. In Abschn. IB wurde für das Instrument ein bestimmter Widerstand und Vollausschlag bei bestimmter Spannung gefordert. Bei der Einregelung entsprechend den beiden Forderungen konnte, da das Instrument für die Frequenz $m\omega_0$ reinen Wirkwiderstand besitzt, mit der Wheatstoneschen Brücke gearbeitet werden (Abb. 28). Der Wechselstrom wird dabei genau auf der Frequenz $m\omega_0$ gehalten. R_2 wird gleich R_n gemacht, R_1 gleich R_3. In Zweig 3 liegt ein induktionsfreier, von der Frequenz unabhängiger Strommesser (Thermoelement in Doppelschaltung)[16]). Damit wird der Strom auf dem, der verlangten Spannung für Vollausschlag entsprechenden Wert gehalten: $P_n : R_n$. Die Justierwiderstände R_4 und R_5 des Instrumentes für die betreffende Oberwelle werden dann abwechselnd reguliert, bis einerseits Stromlosigkeit in der Brücke, andererseits Vollausschlag des Analysators eintritt*). Wesentlich ist, daß reiner Sinusstrom verwendet, also eine Schaltung nach Seite 389, Abb. 21 benutzt wird; denn der Strommesser mißt den Effektivwert des Eichstromes, der Analysator naturgemäß nur seine Grundwelle (die eine Oberwelle von ω_0 ist). Sehr streng braucht diese For-

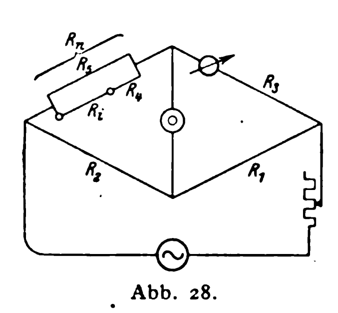


Abb. 28.

*) Die Stromstärke für Vollausschlag des Analysators in Schaltung nach S. 389 war 0,038 Ampere, die Spannung 1,51 Volt.



derung aber nicht erfüllt zu werden, da der Effektivwert der Wurzel aus den Quadraten proportional ist [Gl. 4)]. Eine 2%ige Oberwelle des Eichstromes würde z. B. den Effektivwert nur um 0,04% verändern.

d) Justierung der Schaltung für Änderung des Meßbereichs. Die Widerstände R_v und R_p werden nach Gl. 51) und 52) berechnet und einzeln auf diese Werte einreguliert.

3. Eichkurve.

Die Eichung für Vollausschlag wurde in II A 2c besprochen. Zu untersuchen ist noch der Verlauf der Eichkurve. Vergleichende Messungen mit einem Spannungsmesser [Thermoelemente in Doppelschaltung[16])] unter Verwendung von reinem Sinusstrom ergaben rein quadratischen Verlauf der Eichkurve:

Zahlentafel 2.

Grad	Volt	% der Grundwelle	Grad	Volt	% der Grundwelle
1	0,15	1,0	60	1,18	7,75
10	0,48	3,16	70	1,27	8,37
20	0,68	4,47	80	1,36	8,95
30	0,83	5,47	90	1,44	9,49
40	0,96	6,32	100	1,51	10,0
50	1,07	7,07			

4. Einfluß fremder Wellen auf die Messung.

Der Beeinflussung des Ausschlages durch eine fremde x-te Welle liegt wieder die Dynamometergleichung 20) zugrunde. Sie lautet dann:

$$\alpha_f = J_{1x} \cdot J_{2x} \cos \varphi_{12x} \cdot K \quad \ldots \ldots \ldots \quad 58)$$

Eine Beeinflussung findet statt, wenn $\cos \varphi_{12x}$ von 0 verschieden ist. Sie wird herabgesetzt durch die Drosselung von J_{2x}.

In Gl. 58) sollen die Werte eingesetzt werden. Für J_{1x} braucht zur Berechnung seiner Größe (nicht etwa der Phasenverschiebung!) nur sein Teil J_1'' [Gl. 21)] berücksichtigt zu werden, da im anderen Zweig 1′ im Bereich der fremden Wellen — nur dieser kommt ja hier in Betracht — starke Drosselung vorhanden. Es ist dann

$$J_{1x} = \frac{P_x}{R_1},$$

wenn P_x die Spannung der betreffenden fremden Welle ist. Für J_{2x} ergibt Gl. 7b)

$$J_{2x} = \frac{P_x}{\omega_0 L_2} \cdot \frac{x}{(x^2 - m^2)}.$$

Dann ist [Gl. 58)]

$$\alpha_f = K \frac{P_x^2}{\omega_0 L_2 R_1} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \cos \varphi_{12x}.$$

Von Bedeutung ist aber weniger der Wert von α_f selbst, als vielmehr sein Verhältnis zum Ausschlag α für die zu messende m-te Oberwelle. Hat diese die Spannung P, so ist der entsprechende Ausschlag [Gl. 48)]

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Also ist

$$\frac{\alpha_f}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \cdot \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cos \varphi_{12x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 59)$$

Wesentlich ist, daß K herausfällt: α_f/α ist von der Empfindlichkeit des Wattmeters unabhängig.

In Teil I wurde gezeigt, daß Doppelkreis und ersetzter Kreis in bezug auf den Phasenwinkel für die fremden Oberwellen kleine Unterschiede aufweisen. Daraus ergibt sich [Gl. 59)] ein Fehlerausschlag α_f, denn es ist dann für diese Oberwelle $\cos\varphi_{1\nu}$ nicht genau gleich 0. Die Frage war offen gelassen, ob der Einfluß der Drosselung stark genug sei, um einen solchen Ausschlag zu unterdrücken. Die folgenden Versuche sollen darüber Aufschluß geben.

Alle von fremden Wellen herrührenden Fehlerausschläge α_f fälschen das Meßergebnis um so mehr, je kleiner der Wert der zu messenden m-ten Oberwelle ist. Denn α_f ist nur von der betreffenden fremden Oberwelle abhängig, also für jede Zeigerstellung des Instrumentes gleich groß. Daher macht sich z. B. ein Fehler von $\alpha_f = 1^0$ stärker bemerkbar, wenn $\alpha = 2^0$ ist, als wenn $\alpha = 100^0$ beträgt. Noch weiter verstärkt wird diese Erscheinung durch den quadratischen Verlauf der Eichkurve. Bei der Eichkurve Tafel 2, S. 395 z. B. fälscht ein Fehlerausschlag $\alpha_f = 1^0$ bei $\alpha = 1^0$ das Ergebnis um $1\,^0/_0$ der Grundwelle oder um $100\,^0/_0$ seines eigenen Wertes, bei $\alpha = 100^0$ dagegen um $0{,}05\,^0/_0$ der Grundwelle oder um $0{,}5\,^0/_0$ seines eigenen Wertes.

Der Gang der Versuche war der folgende: Das Instrument war für Messung der m ten Oberwelle geschaltet. Dann ließ man der Reihe nach eine $100\,^0/_0$ige Grundwelle und alle Oberwellen von einer Spannung gleich $15\,^0/_0$ der Grundwelle darauf einwirken. $15\,^0/_0$ wurden gewählt, weil höhere Werte für Oberwellen praktisch nur ausnahmsweise vorkommen dürften. Wie alle Versuche, wurden auch diese für die 3. und die 9. Oberwelle durchgeführt. Bei Schaltung für die 3. Oberwelle wirkten also nacheinander die 1., 5., 7., 9. Oberwelle auf das Instrument ein, bei Schaltung für die 9. Oberwelle die 1. bis 7., 11. bis 19. Es war R/L gleich 216, bzw. 347. Ein Ausschlag ließ sich nirgends feststellen, die Drosselung war also genügend. Dabei wurden die fremden Wellen von der Hochfrequenzmaschine erzeugt.

Da der Fehlerausschlag α_f dem Quadrate der betreffenden Oberwelle proportional ist, tritt für Werte der Oberwelle kleiner als $15\,^0/_0$ eine Einwirkung erst recht nicht ein.

5. Fehler infolge Änderung der Widerstände mit der Temperatur.

Die Versuche des vorigen Abschnittes bezogen sich auf den Einfluß der fremden Wellen, wenn die Widerstände des Instrumentes die einregulierte Größe besitzen. Nun müssen aber die Induktivitäten der verschiedenen Kreise aus Kupfer hergestellt werden, da sonst ihr Gewicht zu groß sein würde. Da Kupfer einen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes von $0{,}4\,^0/_0$ pro 1^0 C besitzt und Schwankungen der Raumtemperatur von $\pm 10\,^0/_0$ zu berücksichtigen sind, treten Änderungen der Widerstände von $\pm 4\,^0/_0$ ihres Wertes auf.

Dadurch kann einmal die Bedingung gestört werden, daß die Widerstände der Kreise 1′ und 1″ gleich sein müssen. Versuche zeigten aber, daß R_a, R_b, R_c um $10\,^0/_0$ ihres Wertes bei der 3. Oberwelle (R/L war 216) und um $4\,^0/_0$ bei der 9. Oberwelle (R/L war 347) geändert werden durften, ohne daß sich ein Ausschlag feststellen ließ. Die Werte der fremden Wellen waren dabei wieder $15\,^0/_0$ der Grundwelle, bzw. $100\,^0/_0$ für die Grundwelle selbst. Auf die Widerstände des Kreises 1′ braucht also keine Rücksicht genommen zu werden, um so mehr, als, wie wir nachher sehen werden, auch Zweig 1″ zum großen Teil aus Kupfer hergestellt wird, also die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur hat wie Kreis 1′.

Von großem Einfluß war dagegen die Änderung des Widerstandes von 1″. Einmal zeigten die Versuche, daß unter allen Umständen der zum Kompensierungsschwingungskreis parallele Widerstand R_s konstant gehalten werden mußte (Abb. 25). Des weitern handelte es sich um die Nichterfüllung der Bedingung 24a): $R_1/L_1 = R_2/L_2$.



Ihr Einfluß möge vorerst theoretisch untersucht werden. Dabei soll im Gebiet der fremden Wellen mit den identischen ungeteilten Kreisen gerechnet werden, während für die m-te Oberwelle die Teilung durch ϱ_1 und ϱ_2 berücksichtigt wird. Maßgebend dafür ist wieder die Gleichung für Einfluß der fremden Wellen [Gl. 59)]. Zu bestimmen ist darin noch das Glied $\cos\varphi_{12x} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Aus Gl. 23) und 24) folgt mit genügender Genauigkeit

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_{12} = \frac{R_2}{\omega_0 L_2}\left[\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} - 1\right] \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \quad \text{. . . . . . 60)}$$

Eingesetzt in Gl. 59) ergibt

$$\frac{\alpha_f}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}\left[\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} - 1\right] \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 - 1)}.$$

Für die richtigen Werte von R_1 und R_2 wird

$$\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} = 1.$$

Ändert sich dagegen R_1''*) um den Betrag $+ f_1\,\%$, R_2 um $+ f_2\,\%$, so wird

$$\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} - 1 = \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1}\frac{\left(1 + \frac{f_1}{100}\right)}{\left(1 + \frac{f_2}{100}\right)} - 1 = \frac{f_1 - f_2}{100}.$$

Also ist

$$\frac{\alpha_f}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100}.$$

P und P_x waren die Spannungen von m-ter und x-ter Oberwelle in Volt. Da nur das Verhältnis der beiden vorkommt, können sie statt dessen in % der Grundwelle gemessen werden. Sie mögen dann p und p_x heißen.

$$\frac{\alpha_f}{\alpha} = \frac{p_x^2}{p^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 - 1)} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100} \quad \text{. . . . . 61)}$$

Sei α_1 der Ausschlag in Grad für eine m-te Oberwelle, deren Wert 1% der Grundwelle beträgt, also $p = 1$, dann ist

$$\alpha_f = \alpha_1 p_x^2 \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100} \quad \text{. . . . . . . 62)}$$

der Fehlerausschlag in Grad, den eine x-te Welle erzeugt.

Die Diskussion dieser Gleichung ergibt folgendes: Einmal ist der Fehlerausschlag infolge Änderung des Widerstandes dem Quadrate von $\frac{R}{\omega_0 L}$ des Instrumentes proportional. Entsprechend dem Ausdruck $\frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}$ ist der Einfluß einer Oberwelle auf die Messung um so kleiner, je weiter sie von m abliegt. Der Ausdruck $\frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1}$ ist von den Eigenfrequenzen der verschiedenen Schwingungskreise abhängig. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß er um so größer, also um so ungünstiger ist, je näher m_a und m_b zusammenliegen, je weiter m_d von m_e entfernt ist. Seine Größenordnung lag für die ausgeführten Schaltungen zwischen 1,5 und 3. Am wichtigsten in Gl. 62) ist aber die Abhängigkeit des Fehlerwinkels von der Widerstandsänderung selbst. Die Gleichung ergibt, daß er der Differenz der prozentualen Änderung der beiden Widerstände vom

*) Daß bei der Änderung von R_1 nur der Widerstand des Kreises 1″ in Betracht kommt, wurde schon im Abschnitt 5, 2. Absatz durch Versuch gezeigt.

festen Kreis I″ und Kreis 2 proportional ist. Ändern sich also R_1'' und R_2 im selben Verhältnis, so tritt ein Ausschlag für fremde Wellen nicht auf.

Nachfolgender Versuch möge die Richtigkeit dieser Fehlerformel für die 3. Oberwelle zeigen:

Apparat in Schaltung nach S. 389.

Daraus:

$$\varrho_1 = 4{,}90, \quad \varrho_2 = 1{,}28, \quad \alpha_1 = 1^0, \quad \frac{R_2}{\omega_0 L_2} = \frac{R_1''}{\omega_0 L_1} = 0{,}688$$

$$f = 0{,}768\, p_x^2 \frac{(f_1 - f_2)}{100} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}.$$

Die Versuche ergaben:

Zahlentafel 3.

Welle x	% der Grundwelle	α_f bei Änderung von R_1'' um f_1 =			
		+ 2%	+ 1%	— 1%	— 2%
1	100	— 2,2	— 1,0	+ 1,2	+ 2,3
5	15	— 0,2	— 0,05	+ 0,05	+ 0,1
7	15	0	0	0	0
9	15	0	0	0	0

Den Vergleich dieser Werte mit den aus obiger Formel errechneten zeigt folgende Zahlentafel:

Zahlentafel 4.

Welle x	% der Grundwelle	α_f	
		berechnet	aus Tafel 4
1	100	$\alpha_f = 1{,}20\,f$	$\alpha_f = 1{,}1 \cdot f$
5	15	$0{,}17\,f$	$0{,}1 \cdot f$
7	15	$0{,}05\,f$	0
9	15	$0{,}03\,f$	0

Die Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten ist wohl bei der Kleinheit der Ausschläge und bei der Annahme ungeteilter Kreise im Gebiet der fremden Wellen befriedigend. Der Versuch wurde mit demselben Resultat für die 9. Oberwelle mit Schaltung nach S. 389 durchgeführt.

Weitere Versuche zeigten, daß sich Änderungen um $+ f_1$ und $+ f_2$% der beiden Widerstände in ihrer Wirkung aufheben, wie Gl. 62) verlangt.

Die Tafeln 3 bis 4 zeigen, daß bei Temperaturänderungen um 10^0 C eine ganz unzulässige Beeinflussung der Messung durch die fremden Wellen stattfindet. Um diese zu vermeiden, muß auch der Widerstand R_1'' aus Kupfer hergestellt und so groß dimensioniert werden, daß seine Erwärmung durch den Strom keine wesentliche Temperaturerhöhung verursacht. Dies ist allerdings nur zum Teil möglich, da R_s konstant bleiben, also aus Manganin hergestellt werden muß. Deshalb wird auch ein Teil von R_2 im gleichen Verhältnis R_s/R_1'' aus Manganin konstruiert. Dieses Verhältnis muß möglichst klein gehalten werden, da dadurch R_f (Abb. 18) größer, also der für die Konstruktion der Induktivitäten des Kreises 2 verfügbare Widerstand $R_{de} = R_2 - R_f$ um diesen Betrag kleiner wird, was einen Mehrverbrauch an Kupfer bedingt.

Es dürfte sich wohl erreichen lassen, daß der Temperaturunterschied der beiden Kreise kleiner als $2{,}5^0$ C bleibt, entsprechend einer Widerstandsdifferenz von $1^0/_0$. Damit wäre f festgelegt und der Fehlerwinkel α_f nur noch von $R_2/\omega_0 L_2$ des Apparates abhängig [Gl. 62)]. Wird z. B. für Messung der 3. Oberwelle $R/\omega_0 L = 0{,}47$ gemacht (entsprechend 50 Perioden und $R/L = 150$), bei 1^0 Ausschlag = $1^0/_0$ der Grundwelle.

dann wird $\alpha_f = 0{,}6^0$. D. h. das Instrument zeigt statt $0^0/_0$ $0{,}8^0/_0$, statt $1^0/_0$ $1{,}3^0/_0$, statt $2^0/_0$ $2{,}1^0/_0$, statt $10^0/_0$ $10{,}03^0/_0$.

Weiter übt die Änderung des Widerstandes einen Einfluß auf den Ausschlag der m-ten Oberwelle selbst aus, wie bei jedem Strom- oder Spannungsmesser, der Kupfer enthält. Da aber die Messung einer m-ten Oberwelle auf die Messung der Grundwelle bezogen wird, besteht nur die Bedingung, daß der Widerstand des Apparates R_n beide Male denselben Wert hat. Es muß also die Abhängigkeit von der Raumtemperatur bei allen Schaltungen dieselbe sein, d. h. theoretisch müßten die Justierwiderstände und die Widerstände für andere Meßbereiche aus Kupfer bestehen. Für diese letzteren muß diese Forderung auch gestellt werden. Da diese Widerstände für Messung aller Wellen dieselben sind, betrifft sie bei zwei Meßbereichen nur ein einziges Konstruktionselement. Die Justierwiderstände dagegen können von der Raumtemperatur unabhängig sein, also aus Manganin hergestellt werden. Denn es ist (Abb. 19)

$$R_n = R_i \frac{1 + \frac{R_4}{R_i}}{1 + \frac{R_4 + R_i}{R_5}}.$$

Da $\frac{R_4}{R_i}$ und $\frac{(R_4 + R_i)}{R_5}$ klein sind gegen 1, ist für geringe Änderungen von R_i das R_n dem R_i proportional. Für alle Schaltungen ist also die Abhängigkeit von der Raumtemperatur gleich derjenigen von R_i, also dieselbe.

6. Die Kondensatoren als Fehlerquelle.

Versuche ergaben, daß Änderung der Kapazitäten, wie sie unter dem Einfluß der Temperatur auftreten, keine merklichen Fehler verursachen, wenn gute Papierkondensatoren verwendet werden. Ebenso wurden Fehler infolge der „Kabelwirkung“ der gewickelten Papierkondensatoren nicht festgestellt.

7. Die Wahl der Eigenfrequenzen m_a und m_b.

Sie hängen zusammen nach Gl. 38). Einmal ist der Unterschied zwischen m_a und m, und damit zwischen m_b und m, möglichst groß zu machen, denn dadurch wird r_{ab}/R_{ab} (Abb. 16), also auch $r/R_1 = \varrho_1$ groß: Der entgegenwirkende Strom in Kreis 1′ wird für die Meßfrequenz klein, der Ausschlag also groß. Mathematisch ausgedrückt: Der Faktor $\frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1}$ in Gl. 46) und 48) wird groß und damit α.

Entfernen sich aber m_a und m_b zu weit von m, so erreichen die Fehler in $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ der fremden Oberwellen unzulässige Werte, da dann die Operatoren von einfachem Kreis und Doppelkreis nicht mehr genügend übereinstimmen.

Bei den Versuchen erwiesen sich als günstig folgende Werte:

Für die 3. Oberwelle $m_a = 3{,}5$ (nach Abb. 14 entsprechend $m_b = 2{,}51$) bei $R/\omega_0 L = 0{,}688$.

Für die 9. Oberwelle $m_a = 9{,}86$ (nach Abb. 15 entsprechend $m_b = 8{,}14$) bei $R/\omega_0 L = 1{,}10$.

8. Frequenzschwankungen, Wahl von m_d und m_e.

Durch das Zusammenwirken von 4 Resonanzkreisen (a, b, d, e) werden die Verhältnisse theoretisch sehr kompliziert, die Untersuchung erfolgte deshalb experimentell.

Es zeigte sich, daß die Eigenfrequenzen $m_d \omega_0$ und $m_e \omega_0$ um ein weniges höher (bzw. tiefer) liegen müssen als die höchsten (bzw. tiefsten) Frequenzen, die bei Schwan-



kungen auftreten können. Die Abhängigkeit des Ausschlages α von der Frequenz ist dann um so kleiner, je größer $R/\omega_0 L$ ist.

Die Versuchsresultate zeigt Abb. 29 für die 3. und Abb. 30 für die 9. Oberwelle.

Die Wurzeln aus α/α_0 wurden aufgetragen, weil die Werte der Oberwellen den Wurzeln aus den Ausschlägen proportional sind [Gl. 48)]. Der zur Ordinatenachse unsymmetrische Verlauf der Kurve in Abb. 29 ist nicht etwa auf Ungenauigkeit in den Messungen zurückzuführen, denn er tritt auch für theoretisch konstruierte Kurven auf.

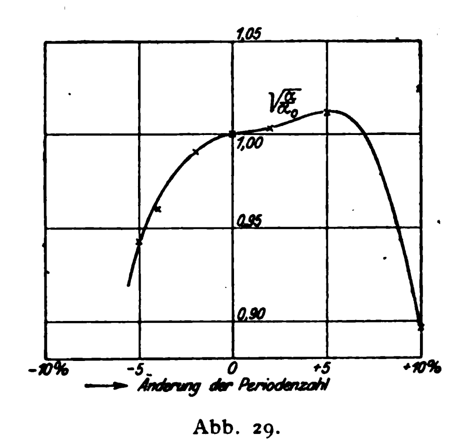


Abb. 29.

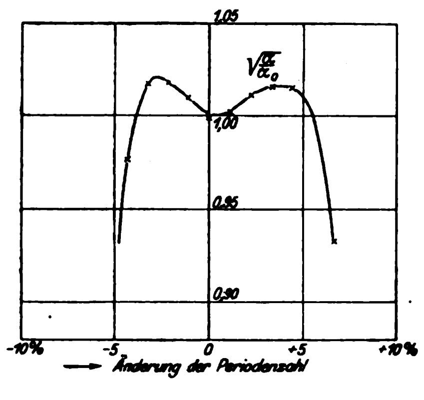


Abb. 30.

Die Frequenzschwankungen bewirken ferner eine Beschränkung der Zahl der Oberwellen, welche gemessen werden können. Wenn nämlich die Schwankungen zu groß werden, greifen die Gebiete benachbarter Oberwellen ineinander, z. B. schwankt bei $+5\%$ Schwankung die 21. Oberwelle von $19{,}95\,\omega_0$ bis $22{,}05\,\omega_0$. Es müßte also $m_d > 22{,}05$ sein. Nun schwankt aber bei -5% die 23. Oberwelle bis auf $21{,}85\,\omega_0$ hinunter, sie würde also in das Resonanzgebiet von m_d kommen und so natürlich die Messung fälschen. Man würde deswegen bei $\pm 5\%$ Schwankung der Periodenzahl nur bis zur 19. Oberwelle messen können. Für $\pm 2\%$ wäre die entsprechende Oberwelle die 49. Der Einfluß der benachbarten Wellen macht sich aber schon lange vor ihrem direkten Eingreifen ins Resonanzgebiet störend bemerkbar, da dort die Identität zwischen einfachem und Doppelkreis nicht mehr genügend ist (Abb. 17).

Bei Messung der 3. Oberwelle war ein Einfluß der 5. Oberwelle bei -5% Änderung um $0{,}4^0$ wahrzunehmen, wenn ihr Wert 15% der Grundwelle betrug. Sonst wurde bei $\pm 5\%$ Änderung der Periodenzahl durch fremde Wellen kein Ausschlag verursacht.

Bei Schaltung für Messung der 9. Oberwelle zeigte sich, daß benachbarte Oberwellen im Werte von 15% der Grundwelle bei Schwankung der Periodenzahl um 3% Fehler bis $0{,}6^0$ verursachten (dabei entsprach 1^0 1% der Grundwelle, $R/\omega_0 L$ war 1,10).

Für höhere Wellen konnten Versuche nicht mehr gemacht werden. Es darf wohl angenommen werden, daß bei passendem $R/\omega_0 L$ Messungen bis ungefähr zur 19. Oberwelle bei $\pm 2\%$ Schwankungen möglich sind.

Immerhin sieht man, daß durch die Größe der zulässigen Periodenschwankung die Anzahl der Oberwellen, die gemessen werden können, beschränkt wird.

Allerdings werden die Oberwellen selten den Betrag 15% der Grundwelle erreichen. Für kleinere Beträge aber nimmt der Fehler wieder quadratisch ab, z. B. ist er für eine 5%ige Oberwelle noch $^1/_9$ des Fehlerwinkels der 15%igen. Für die seltenen Fälle großer Oberwellen können deshalb Korrekturtabellen aufgestellt werden.

9. Die Wahl von $R/\omega_0 L$.

Bei allen bisherigen Untersuchungen erwies sich die Größe der Meßfehler von dem Faktor

$$\frac{R_2}{\omega_0 L_2} = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

abhängig. Seine Wahl ist deshalb maßgebend für die Eigenschaften des Instrumentes.

Für ein kleines $R/\omega_0 L$ spricht die Herabsetzung aller Fehler, die durch fremde Wellen verursacht werden, sei es infolge Verschiedenheit von einfachem Kreis und Doppelkreis, oder Schwanken des Widerstandes, der Kapazitäten oder der Periodenzahl, oder infolge des Einflusses der Induktion der festen Instrumentenspule. Dieser Zusammenhang kommt in Gl. 59) zum Ausdruck. Dort ist vorerst die Abhängigkeit von $R/\omega_0 L$ eine quadratische, indem auch $\cos \varphi_{12x}$ diesem Faktor proportional ist. Ausgenommen davon ist nur der Einfluß der Selbstinduktion der festen Spule. Für ihn ist $\cos \varphi_{12x}$ von $R/\omega_0 L$ ziemlich unabhängig, der Zusammenhang von $R/\omega_0 L$ mit α_f also linear.

Das Herabsetzen von $R/\omega_0 L$ hat aber eine Grenze, indem schließlich das Anwachsen von ϱ_2 in Gl. 59) dem Abnehmen von $R/\omega_0 L$ die Wage hält. Je kleiner nämlich $R/\omega_0 L$ wird, und damit $R_d/\omega_0 L_d$ bzw. $R_e/\omega_0 L_e$ der Teilkreise, um so ausgeprägter wird das Maximum der Widerstandskurve des Kreises 2 zwischen den Eigenfrequenzen der Teilkreise (Abb. 7), um so höher also der Widerstand r_2 für die Frequenz $m\omega_0$. Die Empfindlichkeit für die m-te Oberwelle wird so vermindert. Schließlich kann diese Verminderung die besprochene Verkleinerung der Fehlerausschläge überwiegen, so daß diese Fehlerausschläge im Verhältnis zum Ausschlag selbst wieder größer werden. Mathematisch ausgedrückt: Da bei Abnehmen von $R/\omega_0 L$ die Größe r_2 wächst, so nimmt auch $\varrho_2 = r_2/R_2$ in Gl. 59) zu. Es kann schließlich diese Zunahme die Folge der Abnahme von $R/\omega_0 L$ überwiegen, so daß α_f/α größer wird.

Weiter ist $R/\omega_0 L$ nach unten durch praktische Gründe begrenzt. Das Gewicht der Selbstinduktionsspulen ist nämlich[13]) ungefähr umgekehrt proportional $\sqrt{R^3/L^3}$, es nimmt also bei Verkleinerung von $R/\omega_0 L$ zu.

Als günstige Werte ergaben die Versuche für die 3. Oberwelle $R/\omega_0 L = 0{,}477$ (entsprechend $R/L = 150$ bei $\omega_0 = 314$), für die 9. Oberwelle 1,11 ($R/L = 350$). Für die übrigen Oberwellen dürften die Werte durch Interpolation bzw. Extrapolation zu finden sein. Eine Ausnahme macht die Grundwelle, da hier die Werte der fremden Oberwellen nur Bruchteile ihres eigenen Wertes betragen und deswegen eine Beeinflussung der Ausschläge viel weniger eintritt. Mathematisch ausgedrückt: der Faktor P_x^2/P^2 in Gl. 59) wird sehr klein. Außerdem treten ja für die Grundwelle nur große Ausschläge auf, gegen welche die Fehlerausschläge sowieso relativ klein sind. Es darf also $R/\omega_0 L$ sehr groß gemacht werden.

B. Vergleichende Messungen mit einer bekannten Methode.

Um noch allgemein die Richtigkeit der neuen Meßmethode zu erweisen, wurde eine Reihe von Messungen durchgeführt, die einen Vergleich mit einer bekannten Methode gestatten. Als solche stand oszillographische Aufnahme mit nachfolgender Analyse mit dem Maderschen Analysator[11]) zur Verfügung.

Die Versuche wurden für die unter I B. beschriebene Methode der Messung in Proz. der Effektivwerte von Strom und Spannung durchgeführt. Die Versuchsanordnung zeigen Abb. 43 und 44. Die Abb. 31 bis 42 zeigen die untersuchten Kurven. Die Resultate der Analyse sind in den Tafeln 5 und 6 dargestellt.

Zahlentafel 5.

3. Oberwelle.

Spannung				Strom			
Lfde. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme %	Direkte Analyse %	Lfde. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme %	Direkte Analyse %
1	—	—	0	7	—	—	0
2	31	3,7	3,55	8	36	2,8	3,17
3	32	5,8	5,95	9	37	6,5	6,17
4	33	5,6	6,51	10	38	8,14	8,37
5	34	17,3	17,4	11	39	12,7	12,80
6	35	20,5	21,5				

Zahlentafel 6.

9. Oberwelle. Spannung.

Lfde. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme %	Direkte Analyse %
12	—	—	0
13	40	0,7	1,52
14	41	5,4	4,20
15	42	7,9	7,77

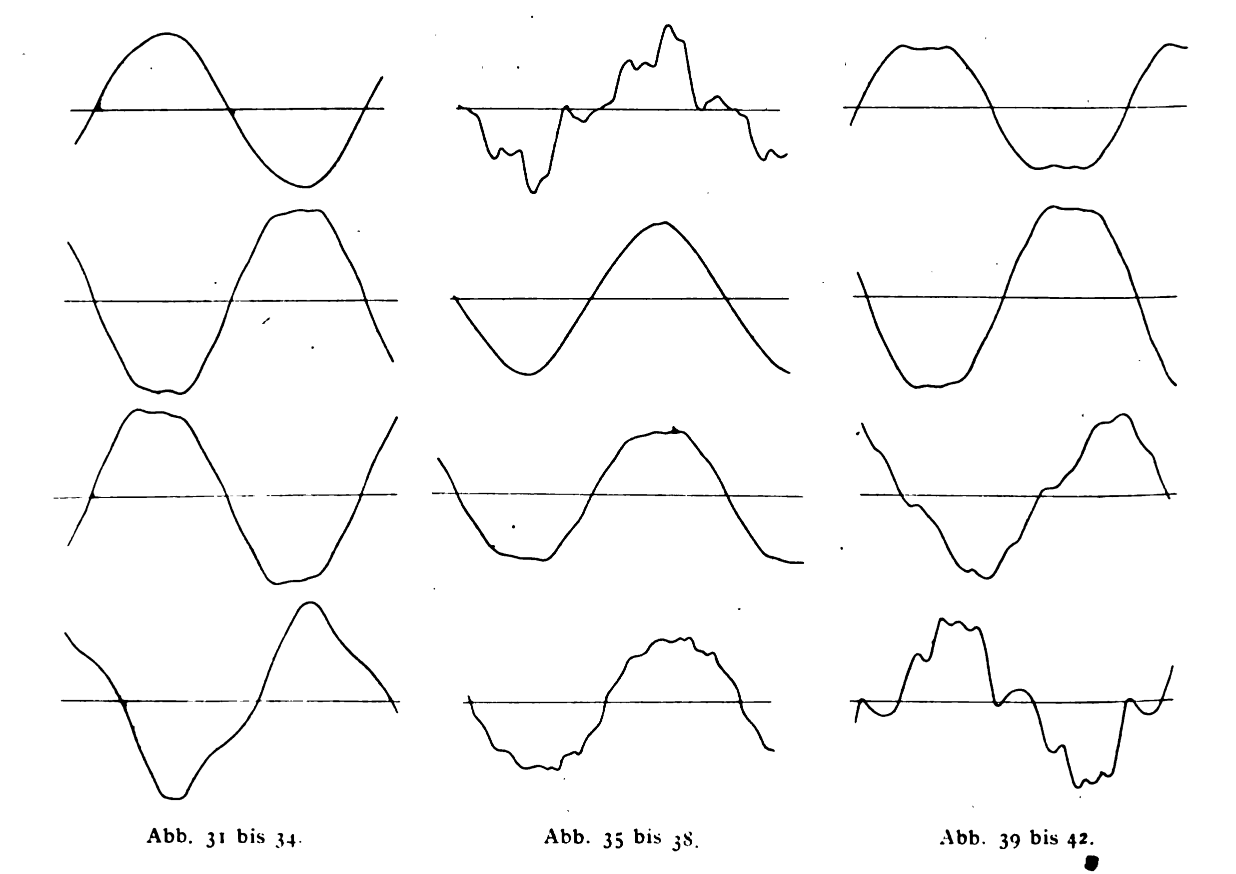


Abb. 31 bis 34. Abb. 35 bis 38. Abb. 39 bis 42.

Bei der Analyse der Oszillogramme wurde der Effektivwert gefunden, indem alle Wellen bis zur 9. herausgelesen und der Effektivwert als Wurzel aus der halben Summe ihrer Quadrate gebildet wurde. Daraus wurde das Verhältnis Effektivwert der m-ten Oberwelle zum gesamten Effektivwert gebildet. Bei der direkten Analyse wurde der Effektivwert durch ein vorgeschaltetes Amperemeter, bzw. parallel geschaltetes Voltmeter gemessen (Abb. 43 und 44). Die Versuche Nr. 1, 7, 12 betreffen die Analyse von verkettetem Drehstrom, für den bekanntlich die 3., 9., 15. usw. Oberwelle bei symmetrischer Belastung der drei Zweige verschwinden [12]). Die Versuche 4 und 13 stellen die Sternspannung eines modernen Generators dar, Versuch 9 den Strom einer Phase desselben Generators, mit induktionslosem Widerstand belastet. Bei den übrigen Versuchen sind die Strom- und Spannungskurven unter Anwendung von Drosseln und Kondensatoren verbessert oder verschlechtert worden.

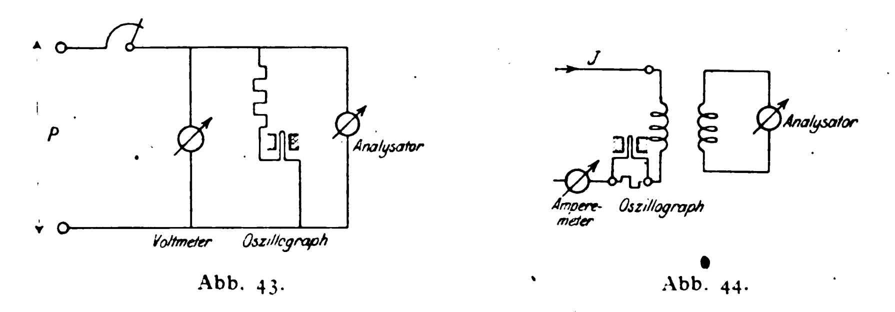


Abb. 43. Abb. 44.

Ungenügend scheint die Übereinstimmung auf den ersten Blick bei den Versuchen 4, 13, 14 zu sein. In allen drei Fällen entspricht aber der Unterschied einem Fehler des Maderschen Analysators von höchstens 4 Noniusteilen. Es muß überhaupt gesagt werden, daß die Analyse von aufgezeichneten Kurven für kleine Werte nie genau ist, erfolge sie nun geometrisch oder rechnerisch. Ferner ist der Madersche Analysator für höhere Oberwellen ungenauer als für niedrige. Dazu kommt noch, daß der Oszillograph selbst für die verschiedenen Oberwellen verschiedene Empfindlichkeit aufweist.

Unter Berücksichtigung dieser Punkte dürften die Resultate des Vergleichs befriedigend sein. Den besten Beweis für das richtige Arbeiten des Apparates bilden wohl die Versuche 1, 7, 12. Sie zeigen die Unabhängigkeit des Ausschlages von fremden Oberwellen. Soweit die Vergleiche mit den Oszillographen ein Urteil gestatten, besteht kein Unterschied in der Genauigkeit zwischen Strom- und Spannungsanalyse.

III. Vorschläge zur Durchbildung des Meßinstrumentes.

Auf Grund der vorliegenden Erfahrungen mögen einige Vorschläge für die Durchbildung eines Meßinstrumentes für Messung der Oberwellen in Prozent der Grundwelle gemacht werden.

Vor allem möchte Verfasser vorschlagen, das Dynamometer als Torsionsinstrument auszubilden. Es zeigte sich nämlich, daß das Einstellen der regulierbaren Gegeninduktivität sehr leicht vergessen wird. Um die Vorteile eines direkt zeigenden Instrumentes nicht zu verlieren, könnte so konstruiert werden, daß dieses Torsionswattmeter eine Skala erhält und vorerst ausschlägt wie ein Zeigerinstrument. Dieser Ausschlag würde für rohe Messungen genügen. Für genauere Messungen würde dann der Torsionskopf gedreht, bis der Zeiger der beweglichen Spule auf 0 steht. Die Spulen stehen dann senkrecht, eine Gegeninduktion tritt nicht auf.

Bei dem verwendeten Dynamometer waren die Torsionskräfte von Stromzuführungsfeder und Aufhängefeder ungefähr gleich groß. Bei der Durchbildung als Torsions-



instrument würde das Drehmoment der Zuführungsfeder wegfallen, da dann nur noch der Faden eine Torsion erleidet. Das Drehmoment des Instrumentes brauchte also nur ungefähr den halben Wert zu besitzen: bei gleicher Empfindlichkeit kann die AW-Zahl von festen oder beweglichen Spulen auf die Hälfte herabgesetzt werden.

Es wurde oben gezeigt, daß wegen der Veränderung der Widerstände mit der Temperatur auch bei günstigem $R/\omega_0 L$ Fehler von der Größenordnung von $0{,}8^0$ auftreten können. Es hat aber keinen Sinn, die Empfindlichkeit des Dynamometers so groß zu machen, daß solche Fehler überhaupt sichtbar werden. Die Empfindlichkeit wird also 5mal kleiner gemacht, d. h. die AW-Zahlen können heruntergesetzt werden. Der Ausschlag für eine Oberwelle von $1^0/_0$ der Grundwelle sei noch $0{,}2^0$. Bei der Ausführung als Torsionsdynamometer ist die Genauigkeit in der Ablesung etwas kleiner, so daß hier 2,5fache Herabsetzung der Empfindlichkeit richtig sein dürfte.

In beiden Fällen — Ausführung als Torsionsdynamometer oder Drehspulinstrument mit Kompensierung der Gegeninduktion — ist also das Produkt der AW-Zahlen von fester Spule 1'' und beweglicher Spule auf $^1/_5$ seines Betrages herabzusetzen. Wie oben ausgeführt, wird die Windungszahl n_1' der Spule 1' beliebig, unter der Bedingung, daß die Größen R_1', L_1, $1/C$ (bzw. R_a, R_c, L_a, L_b, $1/C_a$, $1/C_b$) dieses Kreises durch Multiplikation mit n_1''/n_1' auf den Kreis 1'' reduziert werden (Seite 18 unten).

Die Verkleinerung der notwendigen AW-Zahlen wird einmal dazu ausgenutzt, den Stromverbrauch der beweglichen Spule etwas herunterzusetzen. Dann kann die AW-Zahl der Spule 1'' auf ungefähr $^1/_4$ ihres Wertes herabgesetzt werden. Also wird L_f in Gl. 55) ungefähr 16mal kleiner, und damit bei gleichem C das R_s 4mal kleiner. So erreicht das Verhältnis R_s/R_1'' den günstigen Wert 0,17.

Die Schaltung für die Grundwelle braucht nur den Meßbereich $100^0/_0$. Es liegt nahe, die Widerstände R_1 und R_2 von vornherein für diesen Meßbereich zu dimensionieren. Die Rechnung ergibt aber, daß die Selbstinduktionsspulen dadurch unbequem große Werte annehmen würden. Dagegen können die Justierwiderstände R_4 und R_5 zur Vergrößerung des Meßbereiches herangezogen werden. Sie sind dann nach den Formeln für R_p und R_v Gl. 51) und 52) zu dimensionieren und müssen für diese Welle (Grundwelle) aus Kupfer konstruiert werden.

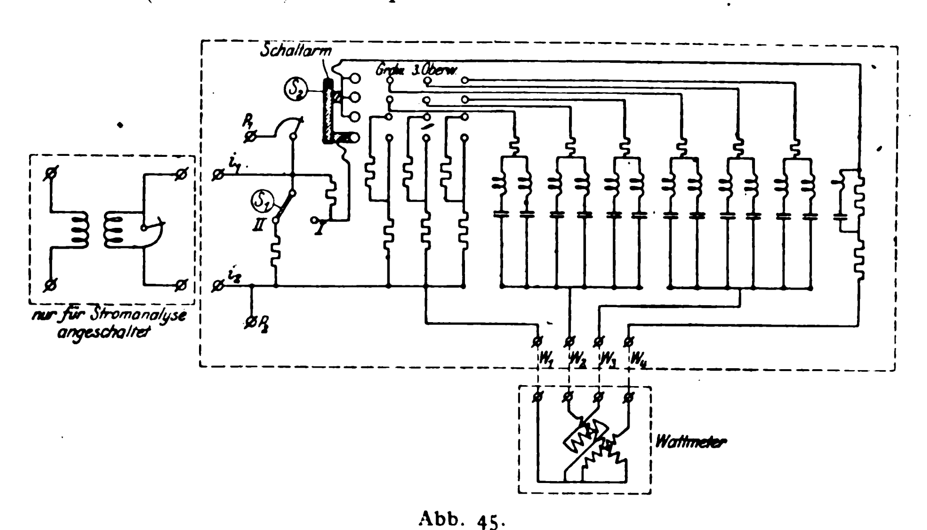


Abb. 45.

Das Schaltungsschema, durchgebildet für Messung von 2 Oberwellen, zeigt Abb. 45. Für Messung weiterer Wellen sind nur gleiche Elemente anzufügen. Schalter S_2 (für Wahl der Welle) ist mit Schalter S_1 (Meßbereich) so zu verriegeln, daß er nur auf den Kontakt „Grundwelle“ gestellt werden kann, wenn S_1 auf „I“ steht. Eine Um-

schaltung von S_1 auf „II" kommt nur selten vor (Oberwelle größer als 20 $^0/_0$). Für den 4poligen Umschalter S_2 möchte Verfasser eine Ausführung ähnlich derjenigen der Schaltapparate in automatischen Telephonzentralen vorschlagen: Die festen Kontakte wären auf einem Halbzylinder anzuordnen, ein Schaltarm würde die 4 beweglichen Kontakte tragen. Die Induktivitäten sind so zu gruppieren, daß L_a und L_b von L_d und L_e nicht beeinflußt werden; dagegen dürfen L_a gegen L_b oder L_d gegen L_e Gegeninduktion aufweisen, wie Versuche zeigten.

Für die Stromanalyse wird ein Stromwandler 7:1 vorgeschaltet, so daß Stromstärken von 2 bis 5 Ampere analysiert werden können. Für stärkere Ströme wird irgend ein weiterer, normaler Stromwandler vorgeschaltet.

Zu Hochspannungsanalysen wird das Instrument über einen normalen Spannungswandler angeschlossen.

Die Handhabung des Apparates für Messung einer m-ten Oberwelle ist folgende: 1. S_2 auf „Grundwelle", der Regulierwiderstand wird verstellt, bis Ausschlag 100 $^0/_0$. 2. S_2 auf „m", Ablesung.

Der gesamte Energieverbrauch des Instrumentes für Grundwelle und Oberwellen beträgt bei geeigneter Dimensionierung ungefähr 5 bis 6 Watt, der gesamte Stromverbrauch ca. 0,28 Ampere.

Zusammenfassung.

An Hand von Theorie und Versuchen wird gezeigt, daß es möglich ist, unter Zuhilfenahme von parallel geschalteten Schwingungskreisen mit verschiedener Eigenfrequenz und eines speziell konstruierten Dynamometers ein Meßinstrument zu schaffen, welches die Oberschwingungen von Wechselströmen und -Spannungen in $^0/_0$ der Grundwelle direkt anzeigt. Seine Handhabung ist sehr einfach. Es kann, da Anschluß an Strom- und Spannungswandler zulässig ist, auch direkt zur Messung in Hochspannungsnetzen verwendet werden.

Das Instrument liefert zuverlässige Werte für Oberwellen, die größer sind als 1 bis 1,5 $^0/_0$ der Grundwelle. Die Meßgenauigkeit ist dort ungefähr $^1/_3$ bis $^1/_4$ des Eigenwertes. Mit der Größe der gemessenen Oberwelle nimmt sie aber sehr rasch zu und erreicht bald die normale Genauigkeit von technischen Meßinstrumenten mit Fadenaufhängung. Damit wird das beschriebene Verfahren von der Des Coudresschen Methode für kleine Werte (unter 2 $^0/_0$) an Genauigkeit erheblich übertroffen, es erlaubt auch nicht die Messung der Phasenwinkel zwischen Grund- und Oberwellen. Dafür darf wohl behauptet werden, daß es die bekannten Methoden an Einfachheit der Handhabung und Raschheit der Aufnahme übertrifft. Das Dynamometer ist trotz seiner Empfindlichkeit leicht transportfähig; das Anlegen des Instrumentes an den zu analysierenden Strom oder die Spannung ist ebenso einfach wie für einen Strom- bzw. Spannungsmesser.

Verzeichnis der für die Arbeit benutzten Literatur.

1. Agnew, Study of the current-transformer with particular reference to the ironloss. Bull. of the B. of St. Bd. 7 (1911) S. 464.
2. Beattie, Harmonic Analysis diagrams. Electrician Bd. 67, S. 326.

2a. — Extension of Fischer-Hinnens Method of harmonic analysis. Electrician Bd. 67, S. 847.

3. Breisig, Dämpfung von Pupinleitungen in Beziehung zur Wellenfrequenz. ETZ Bd. 30 (1909) S. 464.
4. Davis, A proposed wave shape standard. Proc. of the Am. inst. of el. engineers Bd. 32 (1913) S. 325.
5. Fischer-Hinnen, Über die Zerlegung periodischer Kurven in ihre harm. Wellen. Elektrotechnik und Maschinenbau Bd. 27 (1909) S. 335.

6. Grover, Capacity and phase-difference of paraffined paper condensers as functions of temperature and frequence. Bull. of the B. of St. Bd. 7 (1911) S. 495.
7. Hänni, Über eine direkte Analyse von Wechselspannungen und Wechselströmen. Dissertation E. T. H. Zürich 1912.
8. Hazeltine, Analysis of alternating-current waves. Electrical Review Bd. 50 (1907) S. 235.
9. Hermann, Deformierte Spannungs- und Stromkurven und deren Analyse. ETZ Bd. 31 (1910) S. 56.
10. Lincoln, Wave form distortions and their effect on electrical apparatus. Proc. of the American inst. of el. engineers Bd. 32 (1913) S. 379.
11. Mader, Ein einfacher harm. Analysator. ETZ Bd. 30 (1909) S. 847.
12. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig 1906. S. 12.
13. — Kapazität und Induktivität. Braunschweig 1909. S. 87.
14. Pichelmayer und Schrutka, Eine neue Methode zur Analyse von Wechselstromkurven. ETZ Bd. 33 (1912) S. 129.
15. Proceedings of the Amer. inst. of el. engineers. Discussion Bd. 32 (1913) S. 2089.
16. Schering, Zeigerinstrumente mit geringem Eigenverbrauch. Zeitschr. f. Instrumentenkunde Bd. 32 (1912) S. 108.
17. Schleiermacher, Zur Analyse von Wechselstromkurven. ETZ Bd. 31 (1910) S. 1246.
18. Slichter, Graphical computation of Fourier's constants for alternating current-waves. Electr. World Bd. 54 (1909) S. 146.
19. Thompson, Nouvelle methode d'analyse harmonique par la sommation algébrique d'ordonnées déterminées. Comptes rendus Bd. 153 (1911) S. 88.
20. Wagner, Dielektr. Eigenschaften von versch. Isolierstoffen. Arch. f. El. Bd. 3 (1914) S. 74.
21. Zenneck, Lehrbuch der drahtl. Telegr. Stuttgart 1913. S. 169.

Zur Bestimmung der Breite der Wendezone (eine Berichtigung)[1].

Von

Rudolf Richter, Karlsruhe.

Im Jahre 1914 hatte ich im Archiv f. Elektrot.[2]) eine Arbeit „Über die Ausführbarkeit von Gleichstrom-Ankerwicklungen und die Bestimmung der Breite der Wendezone" veröffentlicht. Im zweiten Teil dieser Arbeit hatte ich gezeigt, wie man die Lage der von Bürsten kurzgeschlossenen Spulenseiten zeichnerisch und rechnerisch finden kann. Zur Berechnung der Breite der Wendezone bestimmte ich die Lage der Spulenseiten beim Eintritt in den Bürstenkurzschluß und addierte dazu die Breite der Bürste. Hierbei ergeben sich für die mehrgängigen Wicklungen ($m > 1$) zu breite Wendezonen. In Abb. 1a ist z. B. die Spule einer zweigängigen Wicklung ($m = 2$) dargestellt, wie sie gerade in den Bürstenkurzschluß eintritt. Abb. 1b stellt die Lage derselben Spule dar, wenn der Kurzschluß wieder geöffnet wird. Von der Stellung

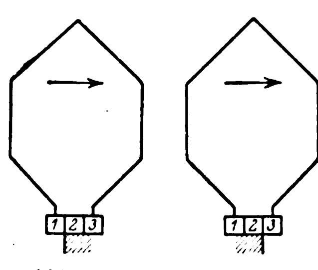


Abb. 1a. Abb. 1b.

Abb. 1a bis zur Stellung Abb. 1b hat die Spule einen Weg zurückgelegt, der nicht gleich der vollen Bürstenbreite ist, sondern gleich der um eine Lamellenteilung — oder allgemein um $m - 1$ Lamellenteilungen — verringerten Bürstenbreite. In den Formeln für die Breite der Wendezone ist deshalb die auf den Ankerumfang bezogene Bürstenbreite $b \frac{d_a}{d_k}$ zu ersetzen durch

[1]) Die Anregung zu dieser Berichtigung habe ich in einer Besprechung mit Herrn Prof. Dr. Thomälen gewonnen.
[2]) Archiv f. Elektrot. 2, S. 443.



$$b\frac{d_a}{d_k} - (m - 1)\frac{\tau_N}{u},$$

worin, wie in der früheren Arbeit, τ_N die Nutteilung und u das Verhältnis von Nutenzahl zu Lamellenzahl ist. Für Wellenwicklungen ist immer $m = a$.

Die geschlossenen Formeln für die Breite der Wendezone lassen sich auf die von Arnold in Gleichstrommaschine I, S. 577 angegebene Formel zurückführen,

wenn man sich auf solche Wicklungen beschränkt, bei denen der in Kommutatorlamellen gezählte Wicklungsschritt y_k durch die Zahl der in der Nut nebeneinander liegenden Spulenseiten teilbar ist,

wenn man vereinbart, daß die Spulenseiten der gegebenen Wicklung so numeriert werden, daß der in der Formel von Arnold vorkommende und in Spulenseiten gezählte Wicklungsschritt y_1 die kleinste mögliche Zahl annimmt[1]),

und wenn in der Formel bei Arnold noch berichtigt wird, daß in dem Ausdruck für ε der Klammerwert mit $^1/_2$ zu multiplizieren ist.

Elektrodengröße und Durchschlagsspannung bei der Prüfung dünner Isolierstoffe.

Von

H. Gewecke und **W. v. Krukowski**, Nürnberg.

In seiner Arbeit über die Durchschlagsfestigkeit von hygroskopischen Isoliermaterialien[2]) hat Schwaiger die unter der obenstehenden Überschrift gebrachte Mitteilung der Verfasser[3]) einer Kritik unterzogen. Er macht sich die Ansicht von Farmer über die Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Elektrodengröße zu eigen. Die Bemerkung, daß man „mit kleinen Elektroden doch wenigstens gelegentlich auch auf schwache Stellen treffen müßte", ist nicht verständlich, da ja aus den Messungen der Verfasser (a. a. O. S. 66) zu ersehen ist, daß dies tatsächlich vielfach zutrifft. Daß von Schwaiger keine schwachen Stellen im Papier festgestellt werden konnten, hat wohl einmal darin seinen Grund, daß die benutzte Papierstärke größer war, vor allem aber, daß er mit unimprägniertem Papier, die Verfasser dagegen mit imprägnierten Stoffen gearbeitet haben. Bei diesen ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Imprägnierung an der einen oder anderen Stelle nicht angenommen ist oder von derselben Fremdkörper auf dem Stoff festgehalten werden, erheblich größer wie bei unimprägniertem Material.

Auch die Kritik an den von den Verfassern verwendeten Elektroden ist unzutreffend; diese waren sehr sorgfältig aufgeschliffen, also in sehr hohem Maße eben. Sollte auf das Versuchsergebnis wirklich die Luftschicht zwischen der Elektrode und dem Papier von wesentlichem Einfluß sein, und zwar in dem Sinne, daß sie die Durchschlagsfestigkeit herunterdrückt, so müßte das Ergebnis bei Versuchen unter Öl das umgekehrte sein, da ja in diesem Fall das schlechtere Aufliegen der großen Elektrode die Durchschlagsspannung heraufsetzen würde. Die Versuche unter Öl wurden von Schwaiger bei seiner Kritik ganz außer acht gelassen.

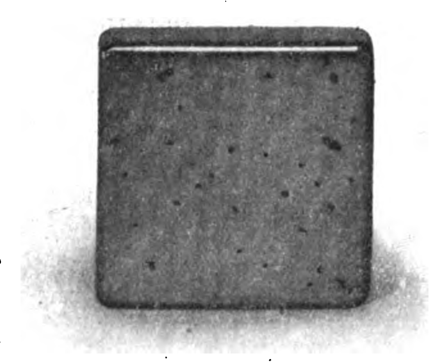
---

[1]) Der Schritt y_1 ist nämlich, wie man sich leicht überzeugt, bei einer gegebenen Wicklung von der Numerierung der Spulenseiten abhängig.

[2]) Diese Zeitschr. **3**, S. 339.

[3]) Diese Zeitschr. **3**, S. 63.

Die Kanten der großen Elektrode hatten selbstverständlich nicht einen höheren Krümmungsradius als die der kleinen. Die nebenstehende photographische Aufnahme von der Elektrode mittlerer Größe zeigt deutlich, daß die Durchschläge über die ganze Oberfläche verteilt sind und sich an den Kanten keineswegs häufen. Dagegen scheint den Verfassern die Verwendung von Kugelelektroden zur Untersuchung zum wenigsten so dünner Isolierschichten bedenklich zu sein, da bei diesen in der Tat die Vorgänge in der Luft eine ausschlaggebende Rolle spielen.



Das Material, das die Verfasser untersuchten, befand sich tatsächlich teilweise in Rollenform, wie es die Abbildung a. a. O. S. 65 wiedergibt. Die Feuchtigkeit spielt dabei aber keine Rolle, da es sich um ein imprägniertes Material handelt; außerdem wurde, um jede Beeinflussung durch eine allmähliche Veränderung des Materials auszuschließen, abwechselnd mit großer und kleiner Elektrode gearbeitet, wie die Verfasser in der Mitteilung ausdrücklich hervorheben.

Bei jeder einzelnen Messung die Alterung des Materials abzuwarten, wobei also der Durchschlag erst nach einigen Minuten erfolgt, war bei der großen Anzahl der auszuführenden Messungen unmöglich. Das Ergebnis ist aber gerade infolge der großen Zahl von Einzelwerten, aus denen die Mittel genommen wurden, als genügend zuverlässig anzusehen.

Archiv für Elektrotechnik

VI. Band. 12. Heft. 1918.

Normalzustand und Polarisation im Ferromagnetikum.

Von

Edy Velander, Stockholm.

(Mitteilung aus dem elektrotechn. Laboratorium der Technischen Hochschule Berlin.)

1. Übersicht.

Ziel der Arbeit. In der magnetischen Meßpraxis ist es oft sehr schwierig — besonders bei einigermaßen niedrigen Induktionen —, mit derselben Probe und derselben Methode zweimal nacheinander Resultate zu erhalten, die auch nur auf 2 oder 3% übereinstimmen. Bei Verwendung einer geeigneten ballistischen Methode kann man aber leicht die Ablesungen an den Meßinstrumenten bis auf 2‰ sicher erhalten. Die Begrenzung der Meßgenauigkeit liegt also nicht in der Meßmethode, sondern ausschließlich in der Schwierigkeit, die rein magnetischen Verhältnisse in der Eisenprobe zu definieren.

Die Eigenschaften des Eisens und deshalb auch die bei einem gewissen Meßverfahren erhältlichen Resultate hängen in erheblichem Maße von der magnetischen Vorgeschichte des Eisens ab. Es ist darum notwendig zu versuchen, vor jeder Messung einen geeigneten Normalzustand des Eisens herzustellen, damit die Resultate reproduzierbar werden und damit unter verschiedenen Verhältnissen erhaltene Meßwerte mit einander verglichen werden können.

Schon längst ist bekannt, daß durch „Entmagnetisieren" mit einem allmählich bis Null abnehmenden Wechselfelde die Einflüsse der Vorgeschichte auf die Eigenschaften des Eisens verwischt werden können. Ein derartiger Entmagnetisierungsprozeß gibt uns also ein Mittel, das Eisen in einen wiederherstellbaren Normalzustand zu bringen, d. h. die Eigenschaften des Eisens nach diesem Normalisierungsprozesse *sollten* vollständig genau reproduzierbar sein. Im allgemeinen trifft dies aber nicht zu. Eine gewisse Unsicherheit bleibt auch nach sehr sorgfältigem Entmagnetisieren.

Es ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, diejenigen Abweichungen vom Normalzustande, welche gewisse Arten von magnetischer Behandlung auf das entmagnetisierte Eisen herbeiführen, systematisch zu studieren, um mit Kenntnis dieser größeren Abweichungen zur Frage der genauen Wiederherstellung eines beliebigen Zustandes, insbesondere des Normalzustandes, überzugehen.

Dabei wird das Problem hauptsächlich vom Gesichtspunkte der ballistischen Permeabilitätsmessung behandelt. Es werden weiter nur stabile Eisenproben benutzt; auf Alterungserscheinungen, „Jugendzustände"[1], „empfindliche Zustände"[2] und andere Irreversibilitäten wird keine Rücksicht genommen.

Die Einflüsse der magnetischen Vorgeschichte auf die scheinbare — ballistisch oder mit Wechselstrom gemessene — Permeabilität sind von drei Arten und dementsprechend von drei verschiedenen Größenordnungen:

I. *Polarisationseffekt:* Wird das Eisen einem starken magnetischen Felde ausgesetzt, „polarisiert", und nachher die Permeabilität bei einer darunter liegenden Feldstärke gemessen, so erhält man einen anderen Wert, als wenn man vom unmagne-

---

[1]) Babbitt, Proc. Am. Ac. Sci. **47**, S. 243, 1911.

[2]) Gray und Roß, Ann. d. Phys. **33**, S. 1419, 1910.

tischen Zustand ausgeht. Die Veränderung kann einen Betrag von 50% und mehr erreichen.

II. Anpassungserscheinungen: Während und zufolge des Meßprozesses, bei mehrmaligem Kommutieren des Magnetisierungsstromes, treten die sog. Akkomodationserscheinungen auf, die, wenn man sie nicht beachtet, leicht Fehler bis zur Größenordnung von 10% hervorrufen können.

III. Unvollständige Entmagnetisierung: Schließlich bleibt, wie mehrmals erwähnt, auch nach Entmagnetisierung und bei sorgfältigem Messen noch eine Unsicherheit von 1—2 v. H., welche auf unvollständige Normalisierung zurückzuführen ist.

Der Übersichtlichkeit halber wird nun im folgenden der entmagnetisierte Zustand vorläufig als bekannt vorausgesetzt und von diesem ausgehend werden die Permeabilitätsveränderungen größter Ordnung, die Polarisationseffekte, studiert. Dann werden die Anpassungserscheinungen behandelt und im Anschluß an die Meßergebnisse wird gezeigt, wie die Entmagnetisierung durchgeführt werden muß, um eine vollständige Normalisierung und Wiederherstellbarkeit der Meßresultate hervorbringen zu können, so daß auch die letzte kleine Unsicherheit wegfällt.

Die Proben. Sämtliche Messungen wurden nach einer besonderen ballistischen Methode ausschließlich an ringförmigen Proben, die aus isolierten Blechringen zusammengebaut wurden, ausgeführt. Der äußere Durchmesser der Ringe war 125 mm und die radiale Breite 14 mm. Die Fehler wegen ungleichmäßiger Flußverteilung wurden vernachlässigt, was um so mehr zulässig erscheint, als, wie weiter unten ausgeführt wird, Differentialmethoden angewandt wurden.

Mit wenigen Ausnahmen beziehen sich sämtliche mitgeteilten Kurven und Daten auf dieselbe Probe, die aus sehr weichem und reinem schwedischen Eisenblech bestand. Der Einheitlichkeit wegen wurde an diesem Material eine ziemlich vollständige Untersuchung durchgeführt und auf eine größere Probeauswahl verzichtet, zumal es sich im Laufe der Messungen ergab — in voller Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen —, daß die fraglichen Effekte sehr allgemeiner Art sind, und daß die durch die Eigenart des Materials bedingten Verschiedenheiten ausschließlich quantitativer Natur sind. Weitere vorläufige und vergleichende Messungen sind aber auch an anderen Materialien ausgeführt worden.

2. Eine ballistische Differentialmethode.

Um trotz der Kleinheit der zu untersuchenden Effekte einigermaßen sichere Resultate erhalten zu können, wurde zu einer Differentialmethode gegriffen. Dadurch wurde erzielt, daß die Meßgenauigkeit, absolut genommen, durch den ganzen Induktionsmeßbereich ungefähr dieselbe blieb.

Frühere Schaltungen. Eine ballistische Differentialschaltung wurde schon von Maxwell zum Vergleich von eisenfreien gegenseitigen Induktivitäten empfohlen. Für ferromagnetische Präzisionsmessungen verwandte Burrows[1]) eine Differentialschaltung seines Doppeljochpermeameters mit einer eisenfreien Normalspule, wobei die Ströme der Primärwicklungen jedoch verschiedenen Batterien entnommen wurden. Das Verfahren wurde als Nullmethode ausgebildet, und die Nulleinstellung geschah durch Veränderung der gegenseitigen Induktivität der Normalspule. Die van Lonkhuyzensche Nullmethode[2]) benutzt eine ähnliche Schaltung zweier Epstein-Apparate.

Schon beim Vergleich eisenloser Induktivitäten stößt man auf eine Schwierigkeit, die eine größere Erhöhung der Empfindlichkeit verhindert, nämlich das Zucken

[1]) Burrows, Bull. Bur. Stand. 6, S. 75, 1909.
[2]) van Lonkhuyzen, Elektrot. Zeitschr. 1911, S. 1131.



des Galvanometers. Sind die Primärwicklungen der beiden zu vergleichenden Spulen einfach in Reihe geschaltet, so schlägt das Galvanometer zwar ruhig aus; will man aber den Meßbereich dadurch vergrößern, daß man etwa durch Abzweigung verschieden große Primärströme verwendet, so entsteht fast immer ein Doppelstoß im Galvanometer. Nach einem Verfahren von Gehrcke und Wogau[1]) wird das Galvanometer auch in diesem Falle dadurch beruhigt, daß die Zeitkonstanten der beiden gegeneinander geschalteten Spulen künstlich gleich groß gemacht werden.

Enthält die eine Spule Eisen — wogegen die Normalspule aus ersichtlichen Gründen bei genauen Messungen eisenfrei sein muß —, so verlaufen doch die Flußänderungen, auch wenn die Primärwicklungen in Reihe geschaltet sind, grundsätzlich verschieden, und eine völlige Ausgleichung der beiden gegeneinander geschalteten sekundären EMKe ist ausgeschlossen.

Dementsprechend ist A. F. Wagner[2]) bei dem Burrowschen Verfahren auf große Schwierigkeiten gestoßen. Wegen der heftigen Bewegungen des Galvanometers konnte eine Nulleinstellung nicht genau ausgeführt werden. Nachdem er auf eine Kompensation des Zuckens durch Veränderung der beiden verwendeten Primärstromkreise hatte verzichten müssen, kehrte er sogar zu der gewöhnlichen ballistischen Ablesungsweise zurück.

Fehler durch das Zucken. Die kräftigen, kurzzeitigen Stromstöße im Galvanometer können eine mangelhafte Proportionalität zwischen Stromintegal und Ausschlag bewirken. Teils werden schon durch die heftigen Bewegungen der Galvanometerspule Abweichungen verursacht, die nachgerechnet werden können[3]). Teils können leicht seitliche Zitterungen im beweglichen Systeme und Schwingungen zwischen Rahmen und Belastungsgewichten entstehen, welche Energie verzehren und die Resultate fälschen.

Bei der Differentialschaltung können die Stromstöße Augenblickswerte aufweisen, die weit über die üblichen Galvanometerströme hinausgehen. Dadurch werden im Eisenkern des Galvanometers Wirbelströme und Hystereseerscheinungen ins Leben gerufen, die einen Teil der zugeführten elektrischen Energie in Wärme umwandeln und gleichfalls Fehler hervorrufen[4]).

Endlich können, wenn das Galvanometer nicht ganz sorgfältig isoliert ist, durch Abrundung scharfer Stromspitzen nicht unerhebliche direkte Stromverluste entstehen.

Damit die Genauigkeitserhöhung der Differentialschaltung nicht illusorisch werde, muß man also einen ruhigen Ausgleich der beiden Sekundärströme anstreben und das Zucken soweit wie möglich herabzudrücken suchen.

Die verwendete Schaltung. Die Messungen wurden nach einer Differentialmethode im eigentlichen Sinne des Wortes ausgeführt. Die Wicklungen des Eisenringes und einer Differentialspule wurden primär und sekundär in Reihe geschaltet. Es wurde aber nicht auf Nullwerden des Ausschlages einreguliert, sondern die Differentialausschläge des Galvanometers wurden ebenso wie beim gewöhnlichen ballistischen Meßverfahren abgelesen. Die Stromstärke und eine genaue Kalibrierung der Spule ergaben den wirklichen Nullwert jeder Ablesung.

Teils durch Verwendung einer besonderen Umschaltevorrichtung, teils durch eine Nebenschlußschaltung primär und schließlich durch Einführung von Kondensatoren auf der Sekundär-, d. h. der Galvanometerseite wurde der Stromverlauf im Galvanometer derart ausgeglichen, daß das Zucken bei Messungen innerhalb des für die Untersuchung in Frage kommenden Induktionsgebietes jede Bedeutung für die Meßgenauigkeit verlor.

Als Differentialspule wurde eine große, besonders gebaute Normalspule für Gegen-

---

[1]) Gehrcke und Wogau, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **11**, S. 664, 1909.

[2]) A. F. Wagner, Phys. Zeitschr. **15**, S. 587, 1914.

[3]) Dorn, Wied. Ann. **17**, S. 654, 1882. — Diesselhorst, Ann. d. Phys. **9**, S. 458 u. 712, 1902.

[4]) Burrows, a. a. O., S. 71.

induktivität verwendet. Die Sekundärwicklung dieser Spule war in Stufen abgeglichen und die Gegeninduktivität konnte mittels Kurbeln im Verhältnis 1 bis 200 reguliert werden. Der Gesamtwiderstand der Sekundärwicklungen wurde mit einem Rheostaten immer auf 1000 Ohm ergänzt. Das Galvanometer hatte 10000 Ohm Widerstand, wurde ohne Nebenschluß angelegt und war dabei gerade aperiodisch gedämpft.

Der Stromverlauf im Sekundärkreis wurde mittels eines Siemensschen Oszillographen studiert, dessen eine Schleife statt des Galvanometers eingeschaltet wurde. Es wurde ein hochempfindliches System verwendet, das bei der Eigenfrequenz 1700 mit einer Empfindlichkeit von 12 mm/mA arbeitete.

Der Magnetisierungsstrom wurde einer Akkumulatorenbatterie von 40 Volt entnommen, durch deren Größe (100 Amp. Ladestromstärke) eine gute Konstanz des Stromes sichergestellt war. Die meisten Messungen der Anpassungserscheinungen wurden mit 0,2 Amp. Primärstrom ausgeführt, was bei einer Feldkonstante des Eisenringes von 5 Gauß/Amp. der mittleren Feldstärke 1 Gauß im Eisen entsprach.

Die Stromstärke wurde mit einem Siemensschen 10-Ohm-Instrument mit äußerem Nebenschlusse bestimmt und immer auf ganze Teilstriche des Instrumentes einreguliert, um möglichst genaue Werte erhalten zu können.

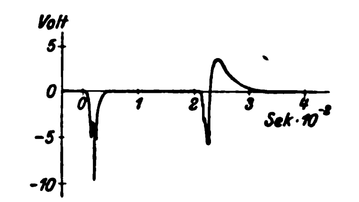


Abb. 1. Galvanometerspannung bei gewöhnlichem Umschalter.

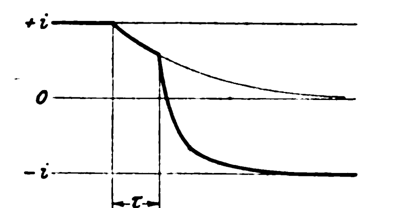


Abb. 2. Stromverlauf beim Kurzschlußumschalter.

Der Umschalter. Wird die Umschaltung des Magnetisierungsstromes mit einem Umschalter der gewöhnlichen Art gemacht, der den Strom erst nach einem Funken unterbricht und dann in umgekehrter Richtung schließt, so hat der sekundäre Differential-Spannungsstoß den Verlauf (Abb. 1). In diesem Oszillogramm, wie in sämtlichen folgenden der Differentialströme, ist das zeitliche Stromintegral (resultierender Galvanometerausschlag) Null. Die Abbildung zeigt, daß ein ausgeprägtes Zucken entstehen muß, dessen Verlauf von der Umschaltungsgeschwindigkeit und von Zufälligkeiten beim Funken abhängt.

Um einen definierten, genau wiederherstellbaren Umschaltevorgang zu erzielen, wodurch erst eine erfolgreiche Zuck-Kompensation ermöglicht wird, wurde ein Umschalter verwendet, welcher die Primärwicklungen erst kurz schloß, dann die Zuführungsdrähte vertauschte und erst nachher den Kurzschluß unterbrach.

Den Verlauf, den der Magnetisierungsstrom dadurch erhält, zeigt Abb. 2.

In Abb. 3, die die ganze Differentialschaltung darstellt, ist U der Umschalter; seine Wirkungsweise ist aus der Abbildung unmittelbar ersichtlich.

Der Antrieb des Umschalters erfolgt durch Zahngetriebe von einer Walze mit Schnur und Gewicht (Abb. 4). Die Bewegung wird durch Sperrad und Anker begrenzt. Die Reibungsmomente sind relativ klein, so daß das Gewicht jedesmal beim Freiwerden eines Zahnes des Sperrades eine gewöhnliche Fallbewegung ausführt. Die Bewegung der Bürsten in bezug auf den Kommutator wiederholt sich darum ziemlich genau und die Zeit, τ (Abb. 2), die den ganzen Umschaltvorgang definiert, ist völlig bestimmt.

Der Umschalter ist mit elektromagnetischer Auslösevorrichtung versehen und kann von Hand beliebig betätigt werden. Bei der Beobachtung von sog. Anpassungskurven



wurden die Umschaltungen mittels Relais von einer Uhr, in Zeitabschnitten von 1,5 Sek. ausgelöst, und beim Aufnehmen wurde der Umschalter von einer Kontaktscheibe an der Motorwelle des Oszillographen gesteuert. Beim Ausführen der eigentlichen Messungen bewährte sich folgende bequeme selbsttätige Auslösevorrichtung: Der Auslösemagnet des Umschalters wurde über die Arbeitskontakte eines Relais an eine Batterie angeschlossen. In dem Relaiskreise befand sich außer dieser Batterie eine elektrische Klingel, die derart belastet und einreguliert wurde, daß sie den Relaisstrom 5- bis 10 mal in der Sekunde unterbrach (Abb. 4).

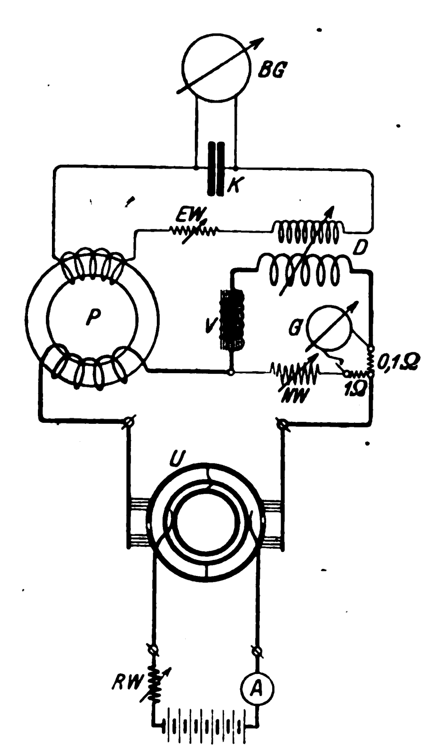


Abb. 3. Schaltungsschema. P = ringförmige Eisenprobe, D = regulierbare Differentialspule, BG = ballistisches Galvanometer, K = Parallelkondensator, EW = Ergänzungswiderstand, U = Umschalter, RW = Regulierwiderstand, NW = Nebenschlußwiderstand, G = Galvanometer zur Konstanthaltung des Verzweigungsverhältnisses, V = Verzögerungsspule.

Der Verzögerungsnebenschluß. Den mit diesem Umschalter erreichten Verlauf der verschiedenen Ströme bei H = 1,0 Gauß zeigt die Abb. 5, Reihe I. In C ist der Strom im Magnetisierungskreis dargestellt. Entsprechend der kleinen Zeitkonstante des Hauptkreises verläuft die sekundäre Spannung der Differentialspule, Osz. A, im Augenblicke, wo der Kurzschluß unterbrochen wird, sehr spitz, wogegen die EMK im Prüfringe,

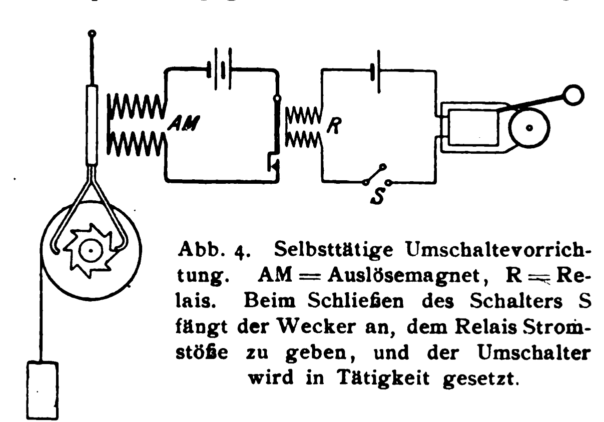


Abb. 4. Selbsttätige Umschaltevorrichtung. AM = Auslösemagnet, R = Relais. Beim Schließen des Schalters S fängt der Wecker an, dem Relais Stromstöße zu geben, und der Umschalter wird in Tätigkeit gesetzt.

Kurve B, wegen der Hysterese und Wirbelströme bedeutend verzögert ist und einen viel kleineren Maximalwert hat. Die Oszillogramme D zeigen in 2,5 mal größerem Maßstabe die Differential-EMK, welche für den Strom im Galvanometer bestimmend ist. Der ganze Stromstoß ist schon nach 0,02 Sek. völlig abgelaufen, aber wegen der beiden scharfen Spitzen macht das Galvanometer einen kräftigen Doppelstoß. Man hätte darum zu einem sehr trägen Instrumente greifen müssen, dessen Schwingungsdauer das Arbeiten außerordentlich zeitraubend machen würde. Die Verhältnisse lassen sich aber dadurch verbessern, daß man parallel zur Differentialspule einen induktionsfreien Widerstand schaltet. Bei den vorliegenden Messungen wurde dieser Widerstand gleich dem 10 fachen der Primärwicklung gewählt. Dadurch erhielt man den in der Oszillogrammenreihe II dargestellten Stromverlauf.

Um die Nebenschlußschaltung noch wirksamer zu machen, kann man den Zweigwiderstand verkleinern. Es wurde bei den Messungen das Zweigverhältnis beibehalten, aber in den Zweig, der die Primärspule der Induktivitätsnormale enthielt, die Wicklung eines großen Ringes aus Dynamoblech geschaltet (s. Abb. 3, V). Die Daten des Ringes waren: 4 Spulen, jede einzeln $0{,}0743 \cdot \mu$ mH; Feldstärke 2,88 Gauß pro Spule. Die

Reihen III bis VI in Abb. 5 zeigen Oszillogramme, die mit bzw. 1, 2, 3 und 4 der Spulen in Reihe gewonnen sind.

Die Beobachtung ist von Interesse, daß es ein vorteilhaftes Induktivitätsgebiet gibt, wo der Ausgleich am ruhigsten erfolgt. In II und III liegt die kleine noch vorhandene Spitze auf der negativen Seite, in IV gibt es zwei, dafür aber sehr kleine Spitzen, und in V und VI bildet sich auf der Seite des Proberinges — positiver Ausschlag — eine Spitze aus. Die eigentümliche Form der EMK im Proberinge, Osz. VI B, erklärt sich dadurch, daß in der Stromkurve wegen der Nebenschlußschaltung zwei Exponentialfunktionen eingehen, von denen die eine sehr schnell abklingt, die andere aber ziemlich langsam verläuft. Durch den anfangs steilen Stromanstieg wird das Eisen schnell vom Remanenzpunkte bis zu negativen Induktionswerten geführt. Dabei entsteht eine Spitze EMK.

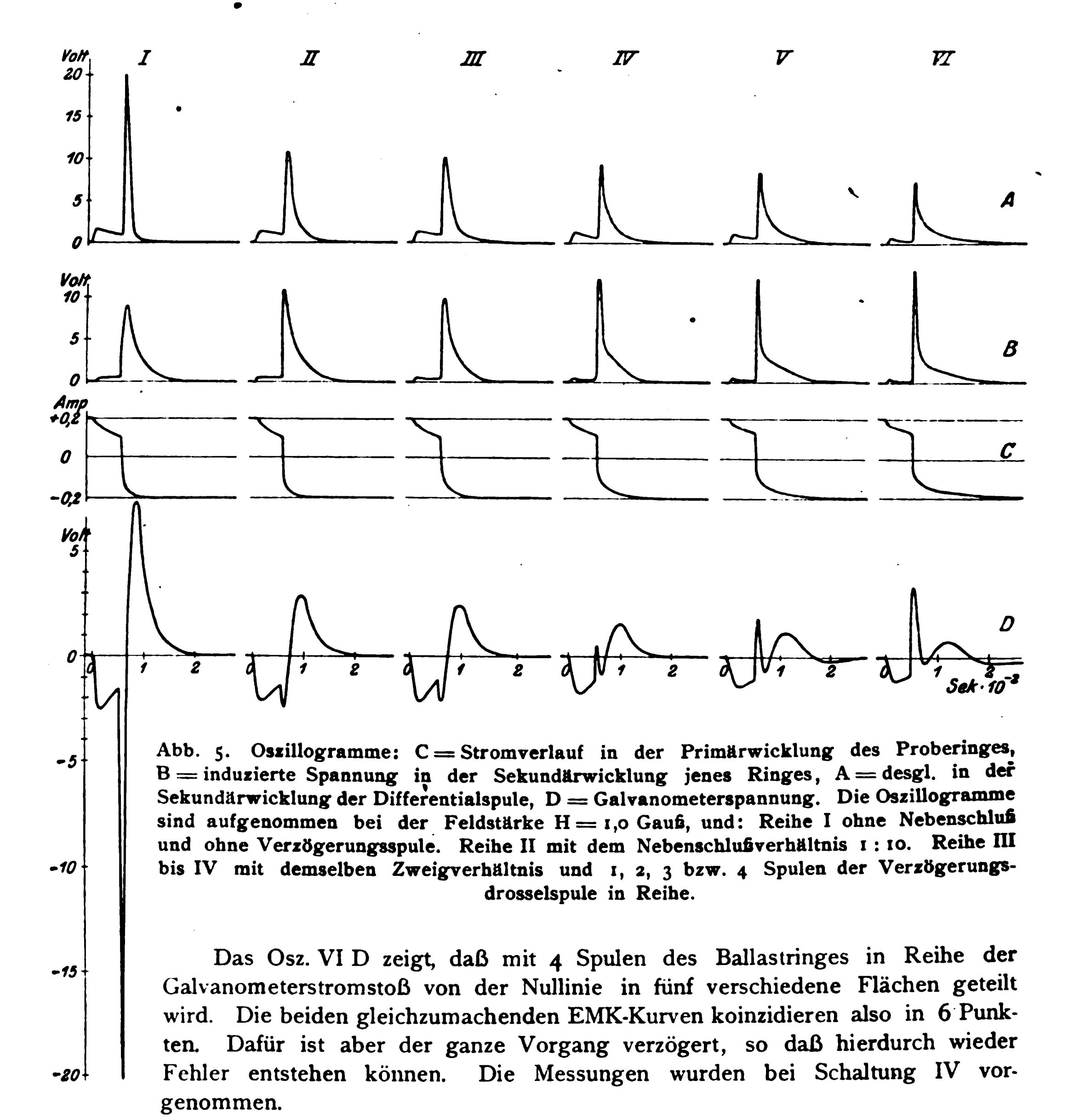


Abb. 5. **Oszillogramme: C = Stromverlauf in der Primärwicklung des Proberinges, B = induzierte Spannung in der Sekundärwicklung jenes Ringes, A = desgl. in der Sekundärwicklung der Differentialspule, D = Galvanometerspannung. Die Oszillogramme sind aufgenommen bei der Feldstärke H = 1,0 Gauß, und: Reihe I ohne Nebenschluß und ohne Verzögerungsspule. Reihe II mit dem Nebenschlußverhältnis 1 : 10. Reihe III bis IV mit demselben Zweigverhältnis und 1, 2, 3 bzw. 4 Spulen der Verzögerungsdrosselspule in Reihe.**

Das Osz. VI D zeigt, daß mit 4 Spulen des Ballastringes in Reihe der Galvanometerstromstoß von der Nullinie in fünf verschiedene Flächen geteilt wird. Die beiden gleichzumachenden EMK-Kurven koinzidieren also in 6 Punkten. Dafür ist aber der ganze Vorgang verzögert, so daß hierdurch wieder Fehler entstehen können. Die Messungen wurden bei Schaltung IV vorgenommen.

Die Innehaltung des Zweigverhältnisses ist für die Kompensationsgenauigkeit von größter Bedeutung. Bei den Messungen wurde das Verhältnis 1 : 10 aufs genaueste

einreguliert und mittels einer Art Kompensatorschaltung konstant gehalten. Siehe Schaltungsschema. Es wurden 2 Normalwiderstände von 1 bzw. 0,1 Ohm aus Manganin und ein Zeigergalvanometer geeigneter Empfindlichkeit verwendet.

Bei höheren Feldstärken wird der Ausgleich notwendigerweise schlechter. Die Amplituden werden mit wachsenden H-Werten größer. Gleichzeitig wird die durch den Nebenschluß hervorgebrachte Verbesserung fortdauernd kleiner wegen der immer schärfer hervortretenden Spitzen der Hystereseschleife. Abb. 6 zeigt in Reihe F den Verlauf des Galvanometerstromes bei 1, 2 und 3 Gauß, mit Nebenschluß und zwei Spulen des Ballastringes. Wird der Nebenschluß weggenommen, während die Ballastspulen in Reihe bleiben, so nehmen die Stromstöße nach Nulleinstellung des Ausschlages die Formen der Reihe E an. Bis zu 3 Gauß hat die Schaltung eine günstige Einwirkung, bei höheren Induktionen aber kaum. Glücklicherweise fällt das hierdurch bedingte Anwendungsgebiet mit dem interessanten Gebiete der Polarisations- und Akkomodationserscheinungen zusammen. Jene zu untersuchenden Effekte verlieren nämlich bei höheren Induktionen wegen ihrer wirklichen und erst recht prozentualen Kleinheit jedes Interesse.

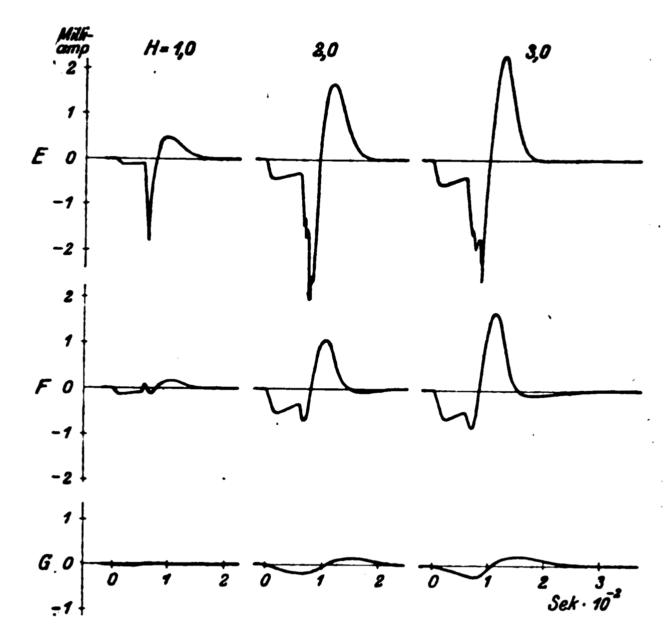


Abb. 6. Oszillogramme von dem Stromverlauf im Galvanometer bei den Feldstärken 1, 2 und 3 Gauß im Eisenring. Reihe E ist ohne Nebenschluß und ohne Kondensator, F mit Nebenschluß aber ohne Kondensator, und G sowohl mit Nebenschluß als auch mit Kondensator aufgenommen.

Sekundärkondensator. Ein noch besserer Stromausgleich kann dadurch erzielt werden, daß ein Kondensator dem Galvanometer parallel geschaltet wird. Um eine gute Wirkung zu erreichen, muß man einen ziemlich großen Kondensator wählen, nicht aber so groß, daß er den Galvanometerstromstoß allzuviel verzögert, weil sonst wieder Fehler entstehen. Es muß ein guter Glimmerkondensator verwendet werden, denn sonst können, trotzdem die Spannungen nur wenige Volt betragen, im Kondensator merkliche Verluste entstehen.

Die Oszillogrammreihe G (Abb. 6) zeigt die Stromstöße, wie sie bei den Messungen auftraten: Kapazität 16 μF, Galvanometer 10000 Ohm, Spulen 1000 Ohm. Der Kondensator hat sowohl die Stromamplituden als die absolute Größe der beiden Doppelstoßflächen erheblich herabgesetzt. Beim ersten Stromstoß wird eine Elektrizitätsmenge im Kondensator aufgespeichert, die beim zweiten neutralisiert wird, ohne durch das Galvanometer fließen zu müssen.

Bei weniger genauen Messungen kann man die doch immer ein wenig komplizierte Nebenschlußschaltung weglassen und mit dem Kondensator allein einen ziemlich guten Ausgleich erreichen. Es mag an dieser Stelle hervorgehoben werden, daß man eine Verminderung des Zuckens nicht einfach durch Reihenschaltung von einer Dämpferspule erreichen kann. Zwar lassen sich dadurch die Amplituden erniedrigen, dafür wird aber

der Ausgleich verzögert, die beiden entgegengerichteten Stromstöße behalten ihre Integralwerte bei und das Galvanometer schwingt eher noch unruhiger.

Genauigkeit. Durch die eben beschriebene Anordnung wurde es ermöglicht, von 0,1 bis zu 5 Gauß und mehr mit derselben Galvanometerempfindlichkeit zu arbeiten, trotzdem das verwendete Galvanometer eine Ausschlagsdauer von nur 3 Sek. hatte. Bei 5 Gauß entsprach eine Induktionsänderung von 1 % einem Ausschlage von 65 mm, und es konnten auch bei dieser gewaltigen Empfindlichkeit auf 2 bis 3 mm abgelesen werden. Bei 1 Gauß war der volle Ausschlag etwa 1500 mm und der Differentialausschlag ließ sich ohne Mühe auf 0,1 bis 0,2 mm schätzen, was einer noch größeren Prozentualgenauigkeit entspricht.

Die bei größeren Feldstärken doch nie völlig zu vermeidenden Zuckungen verursachen aber gewisse systematische Fehler, deren Größe sich bei gegebenem Stromverlauf berechnen läßt.

Ich habe, ausgehend von den Oszillogrammen Abb. 6 Reihe G, eine Berechnung der zu erwartenden Fehler ausgeführt. Es ergab sich, daß noch bei $H = 3$ Gauß der Fehler nur $-0{,}32$ mm betrug.

Jene Fehler, und erst recht ihre Differenzen bei konstanter Feldstärke und verschiedener Permeabilität, welche bei der Bestimmung des Polarisationseffektes und bei den Beobachtungen über den Anpassungsvorgang unterlaufen, sind also in diesem Falle völlig belanglos. Die anderen Arten von Fehlern sind wahrscheinlich von größerer Bedeutung. Ohne Ausgleichsschaltung war es nicht möglich, beim Aufnehmen von Anpassungskurven glatte Punktreihen zu erhalten. Die unten mitgeteilten Kurven zeigen, daß jene der Rechnung nicht zugänglichen Fehler zufälliger Art bei ruhigem Ausgleich fast vollständig unterdrückt wurden.

3. Der Polarisationseffekt.

Normaler und polarisierter Zustand. Wenn die Permeabilität einer ursprünglich vollständig unmagnetischen Eisenprobe bei der Feldstärke H gemessen wird, durchläuft der magnetische Zustand im Eisen (Abb. 7) beim Kommutieren des Meßstromes eine kleine Hystereseschleife $A_0 C_0 A_0$. Diese kleine Schleife liegt, wenn die Anpassungserscheinungen abgelaufen sind, symmetrisch um den Anfangspunkt. Die Permeabilität läßt sich aus dem ballistischen Ausschlag beim Kommutieren des magnetisierenden Stromes berechnen:

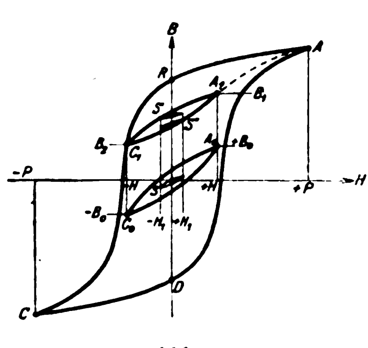


Abb. 7.

$$\mu_0 = \frac{+B_0 - (-B_0)}{2H} = \frac{B_0}{H}.$$

Die Größe B_0 dieser Formel bezieht sich auf den Normalzustand, welcher im folgenden mit dem Index 0 bezeichnet wird.

Wenn das Eisen nun polarisiert, d. h. einem starken, richtungswechselnden Felde P ausgesetzt wird, durchläuft der Zustand die Schleife ARCDA und beim Abschalten des Stromes bleibt die Remanenz RO.

Macht man danach die Permeabilitätsmessung mit der Feldstärke $\pm H$, so tritt zwar zuerst die irreversible Veränderung RC_1 ein, die kleine reversible Messungshystereseschleife $A_1 C_1 A_1$ bleibt aber im ganzen beträchtlich nach oben verschoben. Diese in bezug auf ihre Lage asymmetrische Schleife behält an und für sich fast genau ihre punktsymmetrische Form bei, hat aber eine andere, und zwar kleinere Neigung gegen die Abszissenachse als die normale Schleife $A_0 C_0 A_0$. Die Messung ergibt also eine

kleinere Permeabilität des Eisens als vor der Polarisation. Diese Tatsache ist zuerst von Searle[1]) nachgewiesen. Der ballistischen Messungsart entsprechend führte Searle die Bezeichnung „scheinbare Induktion“ für die aus dem Ausschlag des Galvanometers erhältliche Größe

$$B = \frac{B_1 - B_2}{2}$$

ein und bezeichnete die daraus berechnete Permeabilität

$$\mu = \frac{B_1 - B_2}{2H} = \frac{B}{H}$$

als „scheinbare Permeabilität“. Unten wird die Größe μ als konventionelle „ballistische“ Erscheinung aufgefaßt und der Kürze halber einfach Permeabilität genannt.

Definition des Polarisationseffektes. Im Galvanometer zeigt sich also die Einwirkung der Polarisation als eine Verminderung des Ausschlages, den man beim Kommutieren einer bestimmten Feldstärke H erhält. Wir wollen deshalb den Polarisationseffekt als

$$Z = B_0 - B$$

ansetzen. Der Polarisationseffekt läßt sich auch prozentual anschreiben, und zwar

$$z = \frac{B_0 - B}{B_0} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}.$$

Dabei werden vorläufig die Akkomodationserscheinungen außer acht gelassen, d. h. es wird vorausgesetzt, daß bei der Messung von B_0 und B der Meßstrom so oft kommutiert wurde, bis der Ausschlag einen stabilen Wert erreicht hatte.

Mehrfachpolarisation. Nach der Messung in der Schleife $A_1 C_1 A_1$ ist das Eisen als doppelt polarisiert aufzufassen. Der einfach polarisierte Zustand ist in gewissem Sinne des Wortes symmetrisch; denn wird die Messung im unteren Remanenzpunkte D ausgeführt, so erhält man eine Messungsschleife, die vollkommen symmetrisch und kongruent mit $A_1 C_1 A_1$ ist. Führt man jetzt aber nach der zweiten Polarisation mit $\pm H$ Messungen bei noch niedrigerer Feldstärke, $\pm H_1$, in zwei kleinen Schleifen S' und S'' aus, so ergeben sich dafür verschiedene Werte der scheinbaren Induktion und der Permeabilität. Der zweite Polarisierungsprozeß ist also unsymmetrisch und das Ergebnis der Polarisation in bezug auf die Permeabilität ist nicht mehr eindeutig. Bei mehrfacher Polarisation verwickeln sich die Verhältnisse außerordentlich. Da der entmagnetisierte Zustand auf solchen mehrfachen Polarisationen beruht, so ist er also trotz scheinbarer Einfachheit überaus kompliziert.

Remanenz = o. Hat man mit der Feldstärke P polarisiert, so muß stets wegen der Kontinuität des Vorganges auf dem absteigenden Ast der Schleife eine Feldstärke $-Q_2$ (Abb. 8) zu finden sein, nach deren Abschalten der magnetische Zustand gerade nach dem Nullpunkt gelangt. Dort wird also $H = 0$, $B = 0$; die Magnetisierung, d. h. das magnetische Moment pro Volumeneinheit, ist Null. Trotzdem ist das Eisen noch immer polarisiert.

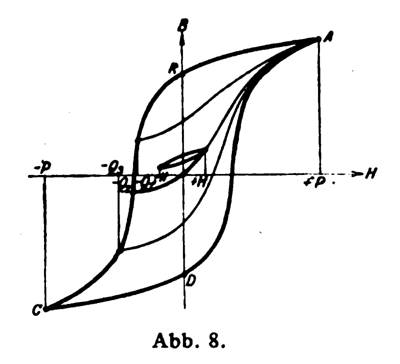


Abb. 8.

Diese Polarisation entzieht sich zwar der direkten Beobachtung (es sei denn, daß die Probe etwa ellipsoidisch wäre), verrät sich aber durch die Art und Weise, in der das Eisen auf Veränderungen eines neuen aufgedrückten Feldes reagiert. Wird z. B. ausgehend von dem letzt beschriebenen Zustand mit der kleinen Feldstärke H die

[1]) Searle, Proc. Inst. El. Eng. 34, S. 55, 1905.

Permeabilität gemessen, so verläuft die Messungsschleife nicht symmetrisch zum Nullpunkt, sondern ist in Richtung der Ordinatenachse verschoben (s. Abb. 8).

Wir finden also, daß das alte, bei magnetometrischen, Koepselschen und anderen Messungen noch heute leider oft verwendete Kriterium des unmagnetischen Zustandes: Remanenz = 0 nicht zuverlässig ist.

Es empfiehlt sich daher, um den Normalisierungsprozeß zu bezeichnen, statt des zweideutigen Wortes Entmagnetisierung den Ausdruck Entpolarisierung oder einfach Normalisierung zu verwenden.

Frühere Untersuchungen über Polarisationseffekte. Über die Größe des Polarisationseffektes Z sind von Searle (a. a. O.) und ausführlicher an mehreren Materialien von Burrows[1]) Messungen ausgeführt worden. Der Normalzustand wurde dabei durch die gewöhnliche Entpolarisierung, bei Searle mit Wechselstrom der Frequenz 90, bei Burrows mit kommutiertem Gleichstrom hergestellt und die Polarisieruug wurde durch mehrmaliges Umschalten einer polarisierenden Feldstärke hervorgebracht. Die hauptsächlichsten Resultate jener beiden Arbeiten lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

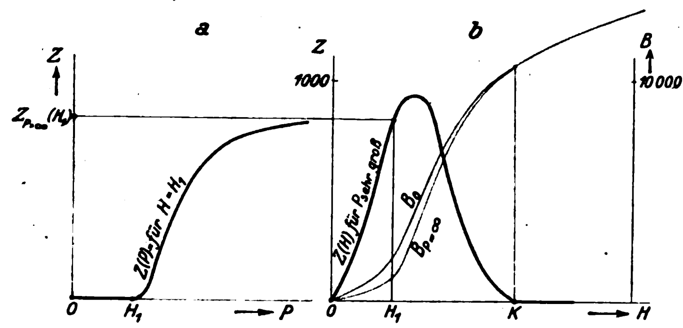


Abb. 9. Der Polarisationseffekt nach Searle und Burrows.

1. Z ist immer positiv, d. h. $B_0 > B$.

2. Bei kleinem, konstantem $H = H_1$ gemessen, verläuft Z als Funktion von P etwa wie die Kurve Abb. 9a. Wenn $P < H_1$ ist, so ist kein Polarisationseffekt nachzuweisen. Ist $P > H_1$, so wird Z immer größer und erreicht, wenn P sehr groß wird, einen konstanten Höchstwert.

3. Wird Z nach einer starken Polarisierung bei verschiedenen Werten H gemessen, so erhält man eine Kurve ähnlich der Abb. 9b. Die normale B_0 — H-Kurve und die Magnetisierungskurve nach sehr kräftiger Polarisierung sind in 10mal kleinerem Maßstabe eingezeichnet. Z wird mit zunehmendem H anfangs größer, erreicht ungefähr gegenüber dem Wendepunkte der Magnetisierungskurve ein Maximum, fällt dann wieder ab, um endlich bei einer gewissen, „kritischen Feldstärke", K, völlig zu verschwinden.

Eigene Messungen. Es wurde eine Reihe geeigneter Werte der Feldstärke H ausgewählt, bei denen Messungen ausgeführt werden sollten. Jedem H-Werte entsprach eine bestimmte Einstellung der Differentialspule, die also den Nullwert der Einzelmessung ergab.

Dann wurde für jede Feldstärke der Differenzausschlag bei sorgfältig entpolarisiertem Proberinge bestimmt. Ähnliche Messungen wurden mit polarisiertem Eisen gemacht. Es wurden, um den Anpassungserscheinungen Rechnung zu tragen, die nach mehrmaligem Umschalten erhaltenen stabilen Werte[2]) des Ausschlages abgelesen. Der Polarisationseffekt Z war mit großer Genauigkeit als der Unterschied zwischen dem Differenzausschlag bei entpolarisiertem und demjenigen bei polarisiertem Ringe erhältlich.

Einfache Polarisierung. Es wurden vollständige Meßreihen für Z bei verschiedenen P-Werten aufgenommen. In Abb. 10 sind die erhaltenen Z-Kurven und, zur Orientierung, die Normalkurve, in 10mal kleinerem Maßstabe, eingetragen.

[1]) Burrows, Bull. Bur. Stand. 4, S. 205, 1908.

[2]) Es war sogar in manchen Fällen notwendig, die Anpassungskurve zu extrapolieren, um einen verwendbaren Wert des Ausschlages zu erhalten. Näheres unten, S. 430.



Sehr kleine polarisierende Felder geben zu einem merklichen Polarisationseffekt kaum Anlaß. Wenn P aber das Gebiet der größten Steigung der B_0 — H-Kurve erreicht, wird Z bald erheblich. Es bildet sich in der Gegend des Wendepunktes der Normalkurve ein spitzes Maximum aus, welches sich allmählich nach größerem H verschiebt.

Wenn H kleiner als P ist, ist immer ein Polarisationseffekt vorhanden. Dagegen übt eine Polarisierung mit P keinen Einfluß auf die Permeabilität für $H > P$ aus. $H = P$ entspricht selbstverständlich $Z = 0$.

Die Kurven deuten darauf hin, daß der Begriff der kritischen Feldstärke, wie er von Searle und Burrows aufgestellt wurde, keine Realität besitzt. Es gibt keine obere Grenze von H, wo der Polarisationseffekt plötzlich Null wird. Die Kurven zeigen einen kontinuierlichen Übergang zur (theoretischen) Kurve für $P = \infty$, die sich offenbar der H-Achse asymptotisch nähern müßte.

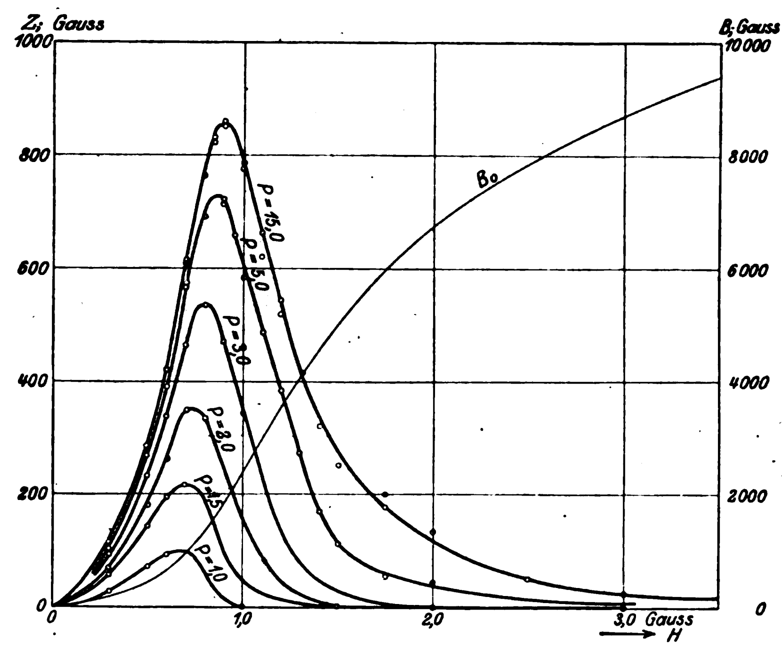


Abb. 10. Polarisationseffekt nach verschieden kräftiger Polarisierung.

Die Annäherung an diese Grenzkurve erfolgt bei kleineren H-Werten sehr schnell. Bei $H = 0 \div 0{,}8$ kann man eine Zunahme von Z kaum beobachten, wenn P von 5 bis 15 Gauß vergrößert wird. Bei größeren Feldstärken geht die Annäherung langsamer vor sich, und es ist offenbar eine große Feldstärke P notwendig, um im Gebiete $1{,}5 \div 3$ Gauß jene Grenzkurve auch nur annähernd zu realisieren. Die Kurven $Z_H = f(P)$ (Abb. 9a) für größere Feldstärken H nähern sich also äußerst langsam ihren Asymptoten.

Für die Praxis ist ausschließlich der Verlauf von z, d. h. der prozentuale Betrag des Polarisationseffektes von Interesse. In dieser Darstellung, Abb. 11, wird das Maximum sehr abgeflacht. Von einer gewissen Feldstärke an fällt der prozentuale Polarisationseffekt außerordentlich steil bis auf sehr kleine Beträge ab. In Abb. 29 ist noch die Linie $z - B_0$ für $P = 15{,}0$ gezeichnet. Dabei ist ganz willkürlich der H entsprechende Wert der Normalinduktion als unabhängiger gewählt.

Die Kurven zeigen, daß der Polarisationseffekt eine Erscheinung der niedrigen Induktion ist. Bei technischen Induktionswerten kann er die Meßresultate nur um Bruchteile von Promille beeinflussen.



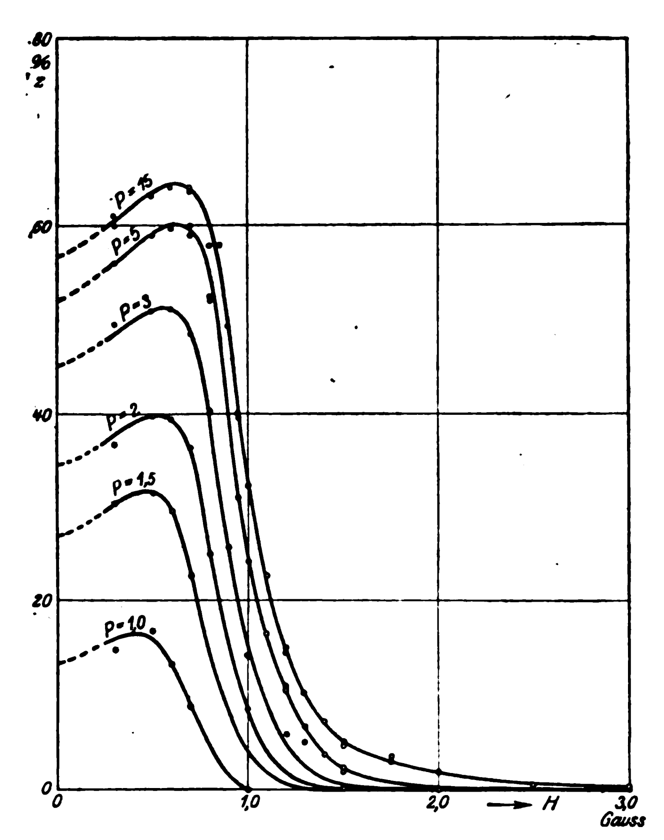


Abb. 11. Prozentuelle Größe des Polarisationseffektes nach verschieden kräftiger Polarisierung.

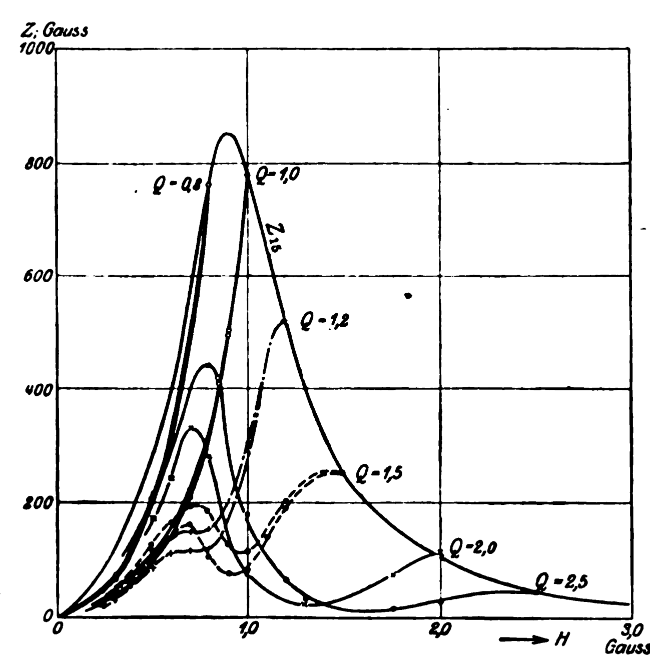


Abb. 12. Polarisationseffekt nach doppelter Polarisierung. (P = 15.)

Doppelte Polarisierung. Wird das Eisen zweimal nacheinander durch die Feldstärken $\pm P$, $\pm Q$ polarisiert, so entsteht ein Polarisationseffekt, welchen wir Z_{PQ} nennen wollen.

Wenn $P < Q$ war, ist $Z_{PQ} = Z_Q$, d. h. das Eisen verhält sich genau so, als ob es nur bei der Feldstärke Q polarisiert worden wäre. Die Behandlung mit der größeren Feldstärke Q hat die Einwirkung der vorhergehenden Behandlung mit der kleineren Feldstärke P völlig verwischt. Entsprechendes gilt ganz allgemein: Wenn auch die frühere magnetische Behandlung einen beliebig verwickelten Verlauf hatte, so wird der Zustand im Eisen von einer starken Polarisierung wieder eindeutig gemacht, wenn nur die letzte polarisierende Feldstärke größer ist als jede Feldstärke, dem das Eisen seit der letzten Normalisierung ausgesetzt wurde. Eine derartige Polarisierung leitet eine neue Epoche der magnetischen Geschichte ein.

Wenn aber bei der doppelten Polarisierung die zuletzt angewandte Feldstärke die kleinere war: $P > Q$, so bleibt ein Polarisationseffekt, welcher sowohl von Z_P als von Z_Q verschieden und außerdem zweideutig ist, je nachdem die letzte Einwirkung des zweiten Feldes, Q, in derselben oder in entgegengesetzter Richtung fiel als die letzte Einwirkung des Feldes P. Die beiden erhältlichen Kurven werden, gemäß der Abb. 7, Z'_{PQ} bzw. Z''_{PQ} genannt. Beispiele derartiger Kurven zeigt Abb. 12 und, in prozentueller Darstellung, Abb. 13. Wir finden, daß die Kurvenschar im großen und ganzen einen ziemlich kontinuierlichen Verlauf hat: sowohl für $Q = 0$ als für $Q = P$ gehen die beiden Z_{PQ}-Linien in Z_P über. Es ergibt sich weiter, daß die Einwirkung von Q sich nur bis $H = Q$

erstreckt. Untersuchungen über kompliziertere Fälle haben bestätigt, daß folgender allgemeiner Satz aufgestellt werden kann: auf die Permeabilität bei der Feldstärke H wirken nur Felder ein, die größer sind als H (dies gilt aber nur für den akkomodierten Endwert).

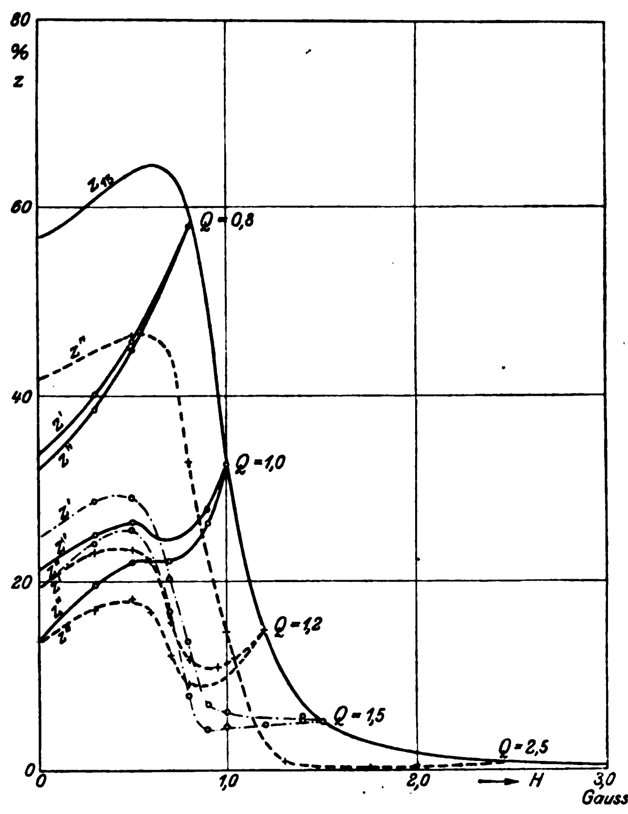


Abb. 13. Prozentueller Polarisationseffekt nach doppelter Polarisierung.

Beziehungen des Polarisationseffektes zur Gansschen reversiblen Permeabilität. R. Gans [1]) hat die sog. reversible Permeabilität, d. h. das Verhältnis $-dB/-dH$ bei sehr kleiner negativer Feldstärkenänderung $-dH$ studiert. Er hat dabei gefunden, daß diese reversible Permeabilität, bis auf kleinere Abweichungen, von der Feldstärke H und von der magnetischen Vorgeschichte unabhängig ist. Weitere Studien über die Beziehungen zwischen der entsprechend gebildeten reversiblen Suszeptibilität $\varkappa_r$ und der Magnetisierung J führten ihn zur Aufstellung des allgemeinen Satzes [2]):

$$\varkappa_r = \varkappa_{r_0} \cdot F\left(\frac{J}{J_s}\right), \quad . \quad . \quad 1)$$

wo F eine universelle, vom Materiale unabhängige Funktion darstellt, deren Verlauf von Abb. 14 gezeigt wird. J ist die Magnetisierung und J_s die Sättigungsmagnetisierung. $\varkappa_{r_0}$ ist der Maximalwert der reversiblen Suszeptibilität, welcher bei $J = 0$ erreicht wird und der Anfangssuszeptibilität gleich ist. Durch den Kunstgriff, die Relativgrößen $\varkappa_r/\varkappa_{r_0}$ und J/J_s einzuführen, gelang es also Gans, die Veränderungen der reversiblen Permeabilität auf einheitliche Ursachen zurückzuführen. Nun bestehen zwischen den Untersuchungen von Gans und unseren Beobachtungen über die Polarisationseffekte ziemlich weitgehende Analogien, und es ist in der Tat möglich, die Gl. 1) derart zu verallgemeinern, daß sowohl die Veränderungen der reversiblen Permeabilität als die Polarisationseffekte als Spezialfälle verschiedener Arten herauskommen.

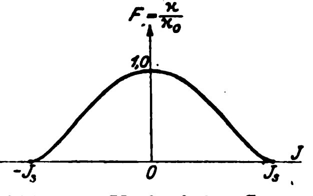


Abb. 14. Verlauf der Gansschen Funktion F.

Abhängigkeit der verallgemeinerten Suszeptibilität von der mittleren Magnetisierung. Zu diesem Zwecke wollen wir eine formale Übereinstimmung mit der Gl. 1) dadurch herbeiführen, daß wir das Verhältnis $\varkappa_r/\varkappa_{r_0}$ gleich $1 - \zeta$ setzen, wo ζ unserem z vollkommen analog gebildet ist und die prozentuale Suszeptibilitätserniedrigung darstellt, die von der Magnetisierung J hervorgerufen wird. Die Untersuchungen von Gans sind also in einer Hinsicht als ein Spezialfall der allgemeinen Untersuchung über die Polarisations-

[1]) R. Gans, Ann. d. Phys. **22**, **27**, **29** u. bes. **33**, S. 1065, 1910.

[2]) Es ist: $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$, $B = 4\pi J + H$.

effekte aufzufassen, insofern sie sich nur mit den Permeabilitätsänderungen bei einer bestimmten, und zwar sehr kleinen Meßfeldstärke von der Größe $\pm dH/2$ beschäftigen. Andererseits enthalten sie aber eine Verallgemeinerung derselben, insofern als Gans seine reversible Suszeptibilität als Grenzfall einer verallgemeinerten Suszeptibilität definiert,

$$\varkappa = \frac{J_1 - J_2}{H_1 - H_2},$$

die aus der Neigung einer beliebigen Messungshystereseschleife berechnet werden kann, welche sowohl in bezug auf H als auf B unsymmetrisch liegen darf.

Um die Gl. 1) auf Meßfeldstärken endlicher Größe ausdehnen zu können, müssen wir eine kleine Veränderung durchführen. Gans schreibt $\varkappa_r/\varkappa_{r_0}$ als Funktion von der Magnetisierung in der Spitze des Schleifchens an. Es empfiehlt sich aber, die „erweiterte relative Suszeptibilität" $\varkappa/\varkappa_0$ oder $1 - \zeta$ als Funktion von $(J_1 + J_2)/2$, d. h. von der mittleren Magnetisierung der kleinen Meßschleife aufzufassen. Im Gansschen Grenzfalle ist dies offenbar gleichgültig, denn für sehr kleine Schleifen ist

$$J = J_1 \approx \frac{J_1 + J_2}{2}.$$

Wenn wir nun auch dem „J" diese neue Bedeutung zuschreiben, reicht aber die erste einfache Form [Gl. 1)] des Gansschen Ansatzes noch nicht aus, die Erscheinungen zu erklären, wenn wir ihn auf Zyklen endlicher Größe ausdehnen. Am einfachsten fassen wir daher sämtliche Abweichungen von der Gl. 1) in einen Faktor K zusammen und geben dem allgemeinen Ansatz die Form:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_0} = 1 - \zeta = K \cdot F\left(\frac{J_1 + J_2}{2 J_s}\right). \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

In diesem Ausdrucke ist F noch dieselbe universelle Funktion, $\varkappa$ stellt aber den aus H_1, H_2, J_1, J_2 sich ergebenden Wert der Suszeptibilität im erweiterten Sinne dar.

K müssen wir uns vorläufig als sowohl von der mittleren Magnetisierung und Feldstärke als von der Feldstärkenamplitude $H = (H_1 - H_2)/2$ abhängig vorstellen. Es wird an dieser Stelle verzichtet, auf die Natur der K (J_m, H_m, H) näher einzugehen. Wir wollen hier auch nicht die Frage behandeln, in welchem Maße K von der magnetischen Vorgeschichte unabhängig bleibt, wenn man mit Hilfe der Gl. 2) das allgemeine Problem der Neigung völlig unsymmetrischer Hystereseschleifen anzugreifen versucht. Die dargestellte Auffassungsweise wird im folgenden nur zum Verständlichmachen der Polarisationseffekte benutzt und eine entsprechende Spezialisierung wird daher schon im nächsten Abschnitte durchgeführt.

Der Polarisationseffekt z nur von der mittleren Induktion abhängig. In dem Gebiete, wo der Polarisationseffekt erhebliche Beträge erreicht, ist mit genügender Genauigkeit $B = 4\pi J$, $\mu = 4\pi\varkappa$ und $z = \zeta$. Wir können deshalb den Ansatz [Gl. 2)] folgendermaßen umschreiben:

$$1 - z = K \cdot F\left(\frac{B_m}{B_s}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

wo B_s konstant gleich $4\pi J_s$ ist. $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ ist gleich der B-Koordinate des Mittelpunktes der kleinen asymmetrischen Messungshystereseschleife zwischen den Grenzwerten B_1 und B_2.

Wir beschränken uns weiterhin auf H-symmetrische Meßprozesse. Sämtliche beobachtete Polarisationseffekte lassen sich dann mittels des Ausdruckes Gl. 3) qualitativ auf B-Asymmetrie der Messungsschleifen zwanglos zurückführen, und zwar kann dabei



der Faktor K einfach als K(H) aufgefaßt werden, d. h. in erster Annäherung von B_m unabhängig. Den ungefähren Verlauf von K (H) stellt Abb. 15 dar.

Im folgenden werden einige typische Fälle behandelt. Die Übereinstimmung mit den beobachteten z-Kurven ist überall gut; in einem einzigen Punkte besteht aber eine systematische Abweichung. Wenn $B_m = 0$ ist, d. h. wenn die Messungsschleife um den Anfangspunkt herum symmetrisch liegt, sollte unabhängig von der magnetischen Vorgeschichte $z = 0$ und $B = B_0$ sein. Dies trifft aber nie ein, sondern B bleibt immer ein wenig kleiner als das nach Entmagnetisierung erhaltene B_0. Der Restbetrag der Permeabilitätserniedrigung ist aber im Verhältnis zum vollen Wert von z ziemlich klein. Ähnliche Abweichungen (bis zu etwa 15%) wurden auch von Gans im Grenzfalle beobachtet.

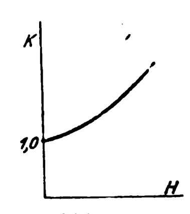


Abb. 15. Ungefährer Verlauf des Korrektionsfaktors K.

Diskussion der beobachteten z-Kurven.

I. Es wird bei konstanter Feldstärke gemessen: $H = \text{konst.}$

a) Einfache Polarisierung: $z = f(P)$. Es werden für verschiedene P-Werte die Hystereseschleifen gezeichnet und in diese primären Schleifen werden die kleinen sekundären Schleifen hineingezeichnet, welche bei der Messung durchlaufen werden.

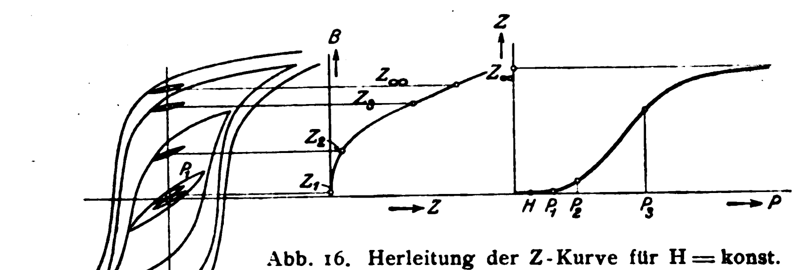


Abb. 16. Herleitung der Z-Kurve für $H = \text{konst.}$ als Funktion der polarisierenden Feldstärke P.

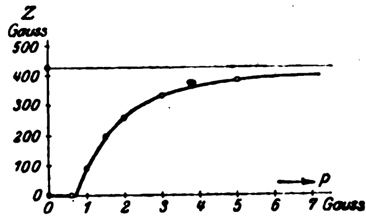


Abb. 17. Z-Kurve der Abb. 16, experimentell aufgenommen.

Die Konstruktion ist in Abb. 16 durchgeführt. Beim Aufzeichnen der Schleifen wird, da es sich nur um qualitative Untersuchungen handelt, von den Anpassungserscheinungen abgesehen [1]). Die Kurve F (B_m/B_s) kann für ein bestimmtes Material im B-Maßstab gezeichnet werden. Horizontale von den Mittelpunkten der Messungsschleifen geben direkt einen dem z proportionalen Wert, denn der Faktor K(H) ist hier konstant.

In Abb. 17 ist eine beobachtete z-Linie mitgeteilt.

b) Doppelte Polarisierung: $z = f(Q)$, $P = \text{konst.}$ Die Konstruktion wird in ähnlicher Weise ausgeführt (Abb. 18). Man findet, daß die z-Kurve in zwei Linien z' und z'' zerfallen muß und daß immer $z' > z''$. z'' fällt mit wachsendem Q rasch ab, erreicht den Wert Null und steigt dann wieder allmählich gegen z_P für $Q = P$. z' hat einen ähnlichen Verlauf, geht aber nie bis auf Null herunter. Wenn $Q > P$ wird, geht die Kurve in eine z_Q-Linie, ähnlich der z_P der Abb. 16, über.

Die beobachtete Kurve (für $P = 5$, $H = 1$) zeigt die erwähnte Abweichung: auch z'' erreicht nie den Wert Null (Abb. 19).

---

[1]) Die Regeln für das Aufzeichnen sekundärer usw. Hystereseschleifen werden stillschweigend als bekannt vorausgesetzt. Derartige Regeln sind von Madelung (Phys. Zeitschr. **13**, S. 437, 1912) angegeben und die Konstruktion oben steht in voller Übereinstimmung mit diesen Regeln. Seine Sätze nehmen aber auf die Anpassungserscheinungen keine Rücksicht und können deshalb auf genaue Gültigkeit keinen Anspruch machen, was leider von Madelung nicht hervorgehoben wird. Sie liefern aber ein sehr anwendbares Schema der Vorgänge.

II. z wird als Funktion von H untersucht.

a) Einfache Polarisierung: $z_P = f(H)$, $P =$ konst. Eine ähnliche Überlegung (Abb. 20) ergibt die charakteristische Form der Kurven Abb. 11. Hier müssen die F-Werte (dünne Linie) noch um den Faktor K(H) vergrößert werden.

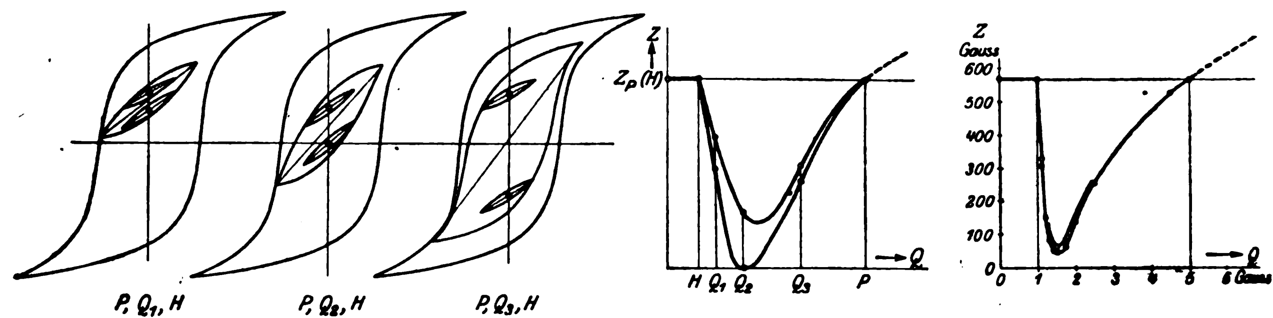


Abb. 18. Herleitung der Kurve $z_{P,Q}$ (Q), H = konst.

Abb. 19. Die Kurve der Abb. 18, experimentell aufgenommen.

b) Doppelte Polarisierung. Die z-Kurven sind für zwei verschiedene Werte Q konstruiert (Abb. 21): ein kleiner, wo der Nullpunkt außerhalb, und ein großer, wo er innerhalb der Q-Schleife liegt. Es ergeben sich z-Kurven verschiedenen Charakters, die aber beide in Abb. 13 zu finden sind. Die z-Kurven, von denen einige die H-Achse berühren sollten, erscheinen in der Wirklichkeit verzerrt. Dies hängt mit derselben Abweichungserscheinung wie unter I b zusammen.

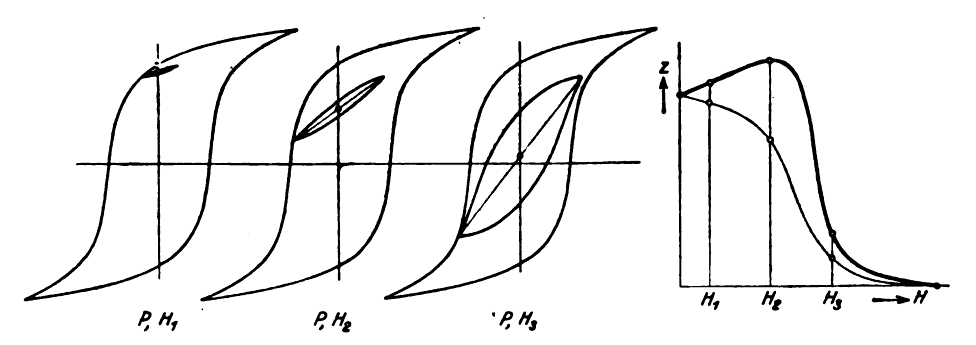


Abb. 20. Herleitung der z-Kurve nach einfacher Polarisierung.

Entpolarisierende Wirkung sukzessiver Polarisierungen. Vorläufig war es notwendig, mit Hilfe des noch nicht festgestellten Begriffes „vollständig entpolarisierter Zustand" den Polarisationseffekt zu definieren. Bei den Messungen suchte man den entsprechenden Normalzustand durch eine „sorgfältige Entpolarisierung" zu erzielen, wie sie schon längst in der Meßpraxis ausgeführt wird.

Nun ergibt sich bei den Messungen, daß immer $Z > 0$ ist. Es scheint darum berechtigt, umgekehrt als Bedingung des idealen, vollständig entpolarisierten Zustandes aufzustellen:

$$Z = 0,$$

wie es schon Burrows gemacht hat.

Die Kurven der Abb. 12 zeigen nun, daß durch die zweite Polarisierung die Größe Z kräftig herabgesetzt wurde. Nach der Q″-Polarisierung ist für gewisse Werte Q″ in je einem H-Gebiete die Größe des Polarisationseffektes fast auf Null herabgesunken. Eine zweite Polarisierung kann also eine entpolarisierende Wirkung

haben. Diese Tatsache erklärt die Eigentümlichkeit, daß der Normalzustand durch einen Entpolarisierungsprozeß erreicht werden kann, der aus lauter Polarisierungen mit allmählich abnehmender Feldstärke besteht.

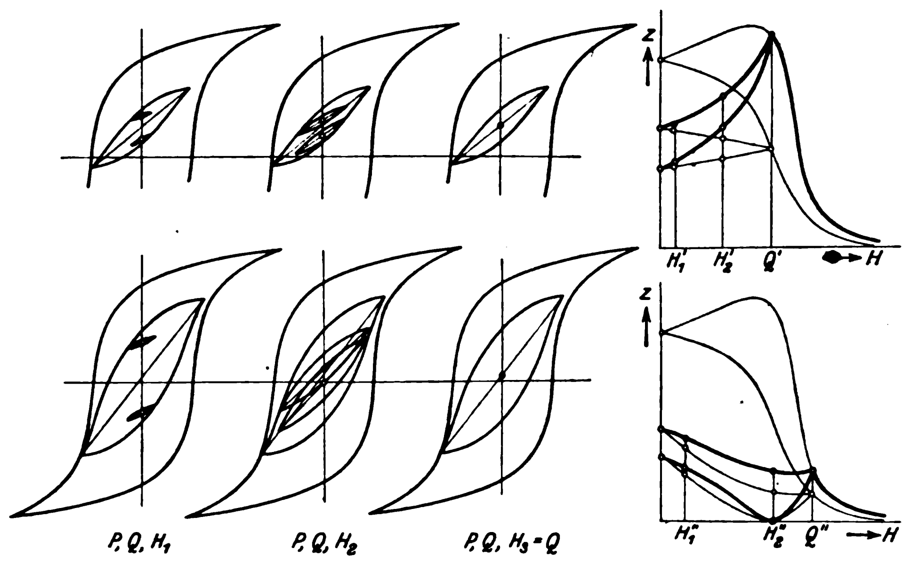


Abb. 21. Herleitung der z-Kurve nach doppelter Polarisierung.

Noch deutlicher geht dies aus der Abb. 22 hervor. Hier sind diejenigen Z''_{PQ}-Kurven gezeichnet, die nach mehreren Polarisierungen $P_1 P_2$ usw. gewonnen sind, wo immer $P_1 > P_2 > P_3 \ldots$ war. Die Abbildung zeigt unmittelbar, was für Anforderungen an den Entpolarisierungsprozeß gestellt werden müssen, damit die Bedingung $Z = 0$ erfüllt wird.

1. Es muß die Entpolarisation mit einer oberen Feldstärke D_0 beginnen, die größer ist als die größte Feldstärke P, welche früher auf das Eisen eingewirkt hat, und bis zu einer unteren Grenze D_u getrieben werden, die unterhalb derjenigen Feldstärke liegt, bei der gemessen werden soll.

2. Die Stufen zwischen den aufeinanderfolgenden Feldstärken der Entpolarisierung müssen sehr klein gewählt werden, und zwar scheint es am besten, nicht die H-Stufen, sondern die Stufen in B gleich groß zu machen.

3. Die Entpolarisierung sollte am besten in einem Zuge vollführt werden: Eine Wiederholung des Prozesses lohnt sich nur, wenn die erste Polarisierung in irgendeiner Weise fehlerhaft war. Die Güte der erhaltenen Entpolarisation hängt ausschließlich und nur von der Sorgfalt der letzten Entpolarisierung ab.

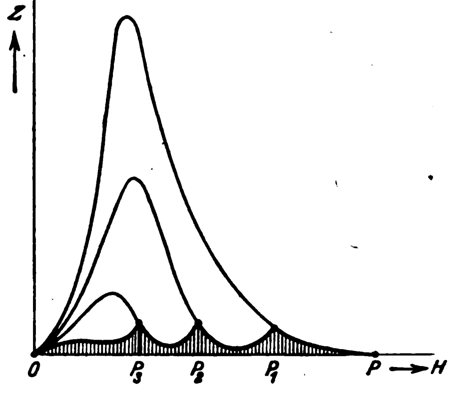


Abb. 22. Z''-Kurven nach mehrfacher Polarisierung.

4. Wenn die Entpolarisierung bei der Feldstärke D_1 abgebrochen wurde, oder wenn hier ein Fehler gemacht wurde, erhält man doch eine gute Entpolarisation, wenn nur von einer oberen Feldstärke $D_0' > D_1$ bis D_u weiter entpolarisiert wird.

Wird die erste Bedingung nicht erfüllt, so bleibt ein Polarisationseffekt $Z_{PD_0 \to (}$ übrig, und wir wollen das Eisen als teilweise entpolarisiert bezeichnen. Bei Nicht-

erfüllung der zweiten Bedingung wird das Ergebnis des Normalisierungsprozesses im folgenden mangelhafte Entpolarisierung genannt. Im letzten Falle muß zwar der Polarisationseffekt ziemlich klein sein, das Eisen verhält sich aber, wie weiter unten ausgeführt wird, in bezug auf die Anpassungserscheinungen sehr eigentümlich.

Teilweise Entmagnetisierung. Es lassen sich mehrere Fälle unterscheiden:

1. Die untere Grenze ist zu hoch, $D_u > H$; die obere hinreichend hoch, $D_0 > P_{max}$. Die letzte entmagnetisierende Feldstärke D_u läßt einen Polarisationseffekt Z_{D_u} zurück, welcher mit demjenigen identisch ist, der durch Entpolarisierung bis Null und nachfolgender Polarisierung mit $P = D_u$ hervorgerufen wird.

2. Die obere Grenze zu niedrig, $D_0 < P_{max}$; die untere hinreichend klein, $D_u < H_{min}$. In diesem Falle bleibt im Gebiete $H > D_0$ der ursprüngliche Polarisationseffekt Z_P bestehen; für $H < D_0$ erhält man Z-Linien ähnlich Abb. 23. (Diese Kurven beziehen sich auf einige vorläufige Messungen an gewöhnlichem Eisenblech und sind durch direkte ballistische Beobachtungen gewonnen, besitzen also keine große Genauigkeit.)

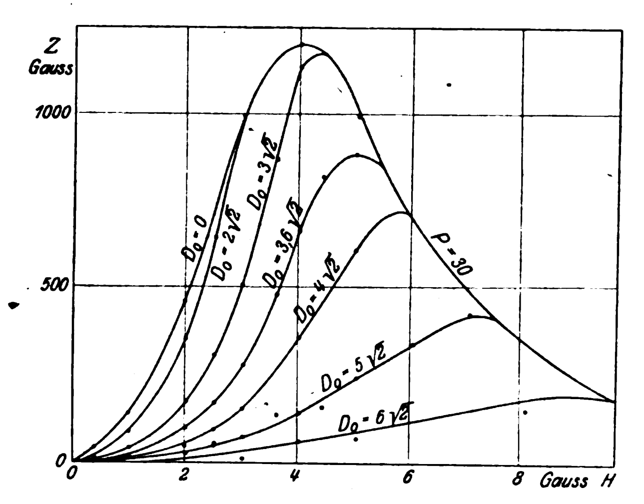


Abb. 23. Polarisationseffekt nach teilweiser Entmagnetisierung.

Auch diese Kurven lassen sich mittels des Ausdruckes Gl. 3) sehr gut diskutieren. Bei der Entpolarisierung wirken die ersten Umschaltungen der Feldstärke D_0 als eine zweite Polarisierung, also etwa wie Abb. 20. Dann wird die Wechselfeldstärke allmählich bis Null herunterreguliert. Der Zustand muß offenbar nach Beendigung der Entpolarisierung in den Mittelpunkt, O', der D_0-Schleife gelangen. Wenn nachher mit zunehmender Feldstärke gemessen wird, müssen sämtliche Messungsschleifen bis $H = D_0$ um O' symmetrisch liegen, die Funktion $F\left(\frac{B_m}{B_s}\right)$ hat daher für alle denselben Wert. Die z-Kurve muß einfach mit K(H) gleichförmig sein und muß auf z_P im Punkte $z_P(D_0)$ entspringen. Kontrollmessungen haben auch hier gute Übereinstimmung gezeigt.

3. Sprung beim Herunterregulieren. Es ist jetzt leicht verständlich, welche Einwirkung eine Nachlässigkeit beim Entpolarisieren auf die Meßresultate ausüben muß. Wurde z. B. von der Feldstärke D_1 bis D_2 ein plötzlicher Sprung gemacht, so bleibt ein Polarisationseffekt, wie er von der Abb. 24 dargestellt wird. Die Form der z-Kurve, welche bis auf das Zeichen mit der Prozentualfehler-Kurve identisch ist, geht aus der Überlegung oben hervor: es entsteht von D_2 ab ein Prozentualfehler, dessen Betrag, wenn der Sprung nicht allzu groß war, praktisch konstant und gleich $-z_{D_1}(D_2)$ ist.

4. Allgemeiner Fall: Die obere Grenze wurde zu niedrig, die untere zu hoch gewählt. Das Ergebnis ist dasselbe, als wäre das Eisen erst von $D_0 \rightarrow 0$ entpolarisiert, dann mit $P = D_u$ polarisiert. Die Kurvenschar für verschiedene D_0 und D_u ist ziemlich verwickelt, und die Kurven spalten sich in z' und z''. Dieser Fall gehört eigentlich zu den im nächsten Abschnitt behandelten Erscheinungen.

Polarisieren nach teilweiser Entpolarisierung. Ein gewisses Interesse hat noch der Fall: $P > D_0 < Q$, $D_u = 0$. Die Z-Kurve nach der teilweisen Entpolarisierung und die Z''-Kurve der zweiten Polarisierung sind nebst der Linie Z_P in der (schematischen)



Abb. 25 wiedergegeben. In Übereinstimmung mit dem oben ausgesprochenen Satze verläuft die Z″-Kurve genau so, als wenn die Entpolarisierung $D_0 \rightarrow O$ gar nicht ausgeführt worden wäre. Wenn man bei Untersuchungen über Z von einem „Normalzustande" ausgeht, welcher durch teilweise Entpolarisierung gewonnen ist, muß man immer ein Gebiet mit scheinbar negativem Polarisationseffekt finden. War aber die Feldstärke der zweiten Polarisation ebenso groß wie die der ersten, so müssen die Messungen zu dem Schlusse verführen, daß der Polarisationseffekt (gestrichelt) von dem H-Werte D_0 ab immer Null sei. Vielleicht liegt hierin eine Erklärung dafür, wie es möglich war, daß Searle und Burrows bei einer gewissen „kritischen Feldstärke" ein plötzliches Nullwerden des Polarisationseffektes glaubten feststellen zu können. Beide dürften nämlich (siehe weiter unten, S. 433) mit teilweiser Entpolarisierung gearbeitet haben.

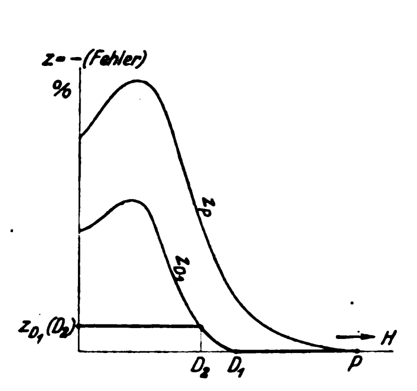


Abb. 24. Schematisierter Verlauf des von einem Sprung beim Entpolarisieren verursachten Prozentualfehlers.

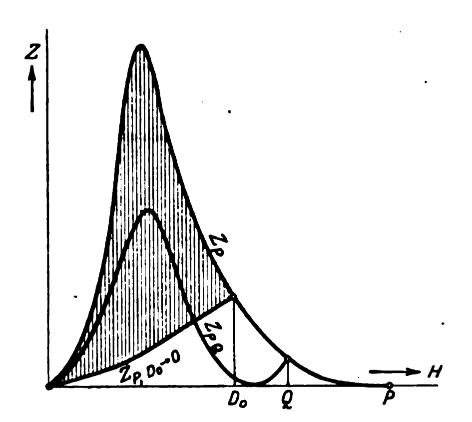


Abb. 25. Scheinbare Größe des Polarisationseffektes, wenn nach einer teilweisen Entpolarisierung gemessen wird.

Beurteilung verschiedener Materialien. Verschiedene Materialien können auch in bezug auf die Polarisationseffekte verglichen werden, wenn man nur einige Hystereseschleifen für verschiedene H_{max} aufnimmt. Das Verhältnis $J_{sätt} : J_{rem}$ gibt über den größten erreichbaren Wert von z Aufschluß und die Koerzitivkraft deutet denjenigen Bereich der Feldstärke an, wo die z-Kurve am steilsten gegen Null abfällt. Bei Magnetstählen ist also zu erwarten, daß die Polarisationserscheinungen von ganz erheblicher Größe sein und sich bis zu hohen Feldstärken erstrecken. In legierten Blechen müssen schon sehr kleine Felder kräftige Polarisationseffekte hervorrufen, dafür muß aber das Feldstärkengebiet, wo z merkliche Werte annimmt, sehr klein sein.

Die Polarisationseffekte in Stromwandlern. Das Studium der Polarisationseffekte ist zwar für die magnetische Meßtechnik von der größten Bedeutung, aber noch wichtiger dürfte es für das Verstehen der Arbeitsweise der Meßwandler sein, daß man die Abhängigkeit der effektiven Permeabilität von der magnetischen Vorgeschichte genau kennt und ihr Rechnung trägt. Bei Spannungswandlern ist zwar der Zustand des Eisenkernes für das Übersetzungsverhältnis von keinem Einfluß und spielt wohl auch für den, bei Effektmessungen wichtigen, Phasenwinkel keine große Rolle; bei den Stromwandlern sind aber sowohl der Übersetzungsfehler und erst recht die Phasenabweichung jeder Veränderung der Permeabilität gegenüber sehr empfindlich.

Der Stromwandler arbeitet mit kleinen Induktionen, also gerade in dem Gebiete, wo die Polarisationseffekte erhebliche Beträge erreichen können. Schon längst ist bekannt, daß ein Stromwandler seine Korrektionsgrößen stark verändert, wenn er, z. B. durch Unterbrechung des Sekundärstromkreises, polarisiert wird. Bisher wurde meist angenommen, daß diese Veränderungen nur nach solchen kräftigen Polarisierungen

aufträten. Jetzt wissen wir aber, daß auch kleine Feldstärken, also auch die bei dem gewöhnlichen Messen auftretenden, Permeabilitätserniedrigungen hervorbringen.

Nach einer kräftigen Polarisierung kann die Permeabilität auf etwa 30% ihres Normalwertes zurückgehen. Nun gilt annähernd, daß sowohl der prozentische Fehler des Übersetzungsverhältnisses als auch der Phasenwinkel dem $1/\mu$ proportional ist. Die beiden Korrektionen werden also bei einer solchen Polarisierung um etwa 30% ihres normalen Wertes vergrößert. Bei den normalen, während der Anwendung des Stromwandlers fortgehenden Polarisierungen sind zwar nicht Abweichungen von dieser Größenordnung zu erwarten, aber je mehr die Methoden der Untersuchung und Prüfung von Stromwandlern verfeinert werden und die Stromwandler zu immer feineren Präzisionsmessungen gebraucht werden, um so mehr muß man auf jene kleinen Veränderlichkeiten achtgeben.

Um die Einwirkung der Polarisationseffekte zu verkleinern, muß man entweder den Eisenkern sehr groß machen, so daß auch bei den höchsten vorkommenden Belastungen nicht so hohe Induktionen erreicht werden, daß erhebliche Polarisationseffekte entstehen; der Stromwandler wird in diesem Falle sehr empfindlich gegen Überlastungen. Oder man kann mit der Induktion des Eisenkernes so weit hinaufgehen, daß der Transformator auch bei den kleinsten vorkommenden Belastungen nicht in das gefährliche Gebiet der Polarisationseffekte hineingerät; die Eichkurve wird dann nur bis zu einer unteren Grenze eindeutig. In ersterem Falle würde ein ziemlich hartes Material vorzuziehen sein, im zweiten aber wäre ein Material von sehr kleiner Koerzitivkraft zu verwenden, etwa hochlegiertes Blech.

Die meisten Stromwandler dürften normal unmittelbar unterhalb der Feldstärke der maximalen Permeabilität arbeiten, also gerade im empfindlichsten Gebiet. Es ist deshalb zu erwarten, daß die älteren Wandler mit Kernen aus gewöhnlichem Dynamoblech in bezug auf die durch Polarisation hervorgebrachte Unsicherheit viel empfindlicher sind als die modernen Transformatoren mit hochlegiertem Blech.

Besonders wichtig sind die Polarisationseffekte für Stromwandler, die in Kraftzentralen in Verbindung mit kWh-Zählern verwendet werden, wo einerseits häufig heftige Kurzschlüsse vorkommen, andererseits die Belastung bisweilen auf sehr kleine Beträge herabsinken kann.

4. Die Anpassungserscheinungen.

Historisches. Jeder, der ballistische Messungen an magnetisierbaren Materialien ausgeführt hat, wird beobachtet haben, daß nach Einregulierung eines festen Magnetisierungsstromes der Ausschlag des Galvanometers bei der ersten Kommutierung verschieden ist von demjenigen nach der zweiten, dritten usw. und daß die Ausschläge sich erst allmählich einem konstanten Werte nähern. Werden die Ausschläge ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in einem Koordinatennetze als Funktion der Anzahl vor der Ablesung ausgeführten Stromwendungen gezeichnet, so entsteht eine Punktreihe, durch die eine kontinuierliche Kurve gezogen werden kann. Diese Kurve, die im allgemeinen ziemlich glatt verläuft und sich natürlich einer horizontalen Asymptote nähert, stellt den Akkomodationsprozeß dar und wird darum die Anpassungskurve AK genannt.

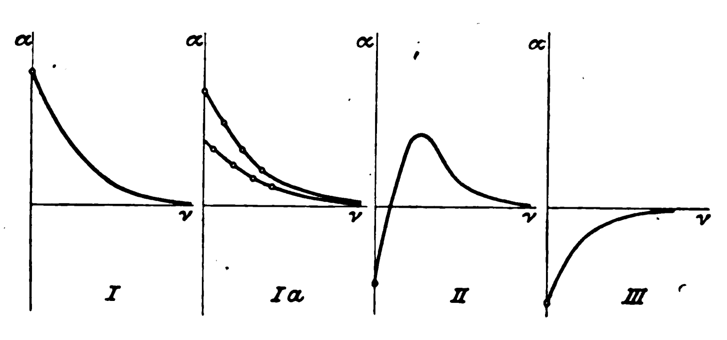


Abb. 26. Früher beobachtete Formen der Anpassungskurve.



Die Form der AK ist im höchsten Grade von der Vorgeschichte des Eisens abhängig. Im allgemeinen beobachtet man, daß die Ausschläge allmählich kleiner werden und daß der Grenzwert von oben erreicht wird. Typus I, Abb. 26. Ewing[1]) hat gezeigt, daß nach der alten Methode der „Entmagnetisierung durch Glühen" die AK immer diese Form hat, und Gray und Roß (a. a. O.) haben gefunden, daß es sogar nur einer Temperaturänderung von wenigen Graden bedarf, um das Eisen in einen „empfindlichen Zustand" zu bringen, welcher eben dadurch charakterisiert wird, daß die AK sehr kräftig abfällt. Burrows[2]) findet beim polarisierten Eisen eine ähnliche (Abb. 26, Ia), aber gespaltene Form, und stellt dagegen nach Entpolarisieren mit kommutiertem Gleichstrom die Form II fest. Bei der 3. bis 6. Umschaltung geht der Ausschlag durch ein Maximum und erreicht nach 300 bis 500 Umschaltungen von oben einen Endwert. Babbitt (a. a. O.) hat nach Wechselstromentpolarisierung gerade das Gegenteil von Form I beobachtet: III.

Es war der Zweck der vorliegenden Untersuchung, die Übergangsformen zwischen den verschiedenen beobachteten Formen der AK-Kurven aufzusuchen und womöglich die sich widersprechenden Angaben zur Übereinstimmung zu bringen.

Messungen. Nachdem das Eisen gewissen magnetischen Behandlungen ausgesetzt worden war, wurden bei geeigneten Feldstärkenwerten die Differenzenausschläge bei sukzessiven Umschaltungen beobachtet. Dabei wurde das Galvanometer immer derart umgeschaltet, daß alle Ausschläge in derselben Richtung erfolgten. Eine etwaige Inhomogenität der Skala konnte also die AK-Kurven nicht verzerren.

Die Größe des Ausschlages wird als Funktion der Nummer, ν, der entsprechenden Umschaltung aufgefaßt. Dabei beginnt die Rechnung mit der ersten Umschaltung, bei der der Zustand längs der kleinen reversiblen Messungsschleife, Abb. 7, lief.

Bei der graphischen Darstellung der AK-Kurven wird als Abszisse der $\log \nu$ gewählt. Die mitgeteilten Kurven beweisen die Zweckmäßigkeit dieser Darstellungsweise für AK-Kurven.

Unvollständige Polarisierung. Wird nach sorgfältiger Entpolarisierung das Feld nur ein paarmal umgeschaltet oder gar einseitig aufgedrückt, so bilden die Ausschläge für gerades und ungerades ν zwei verschiedene Punktreihen, die nach einer gewissen Anzahl Umschaltungen zusammenlaufen. Vgl. die Burrowsche Form Ia. Wird P mehrmals umgeschaltet, so verschiebt sich der Punkt des Zusammenlaufens immer mehr nach links, und wenn P mehrere hundertmal umgeschaltet wurde, läßt sich schon von $\nu = 1$ ab durch sämtliche Aus-

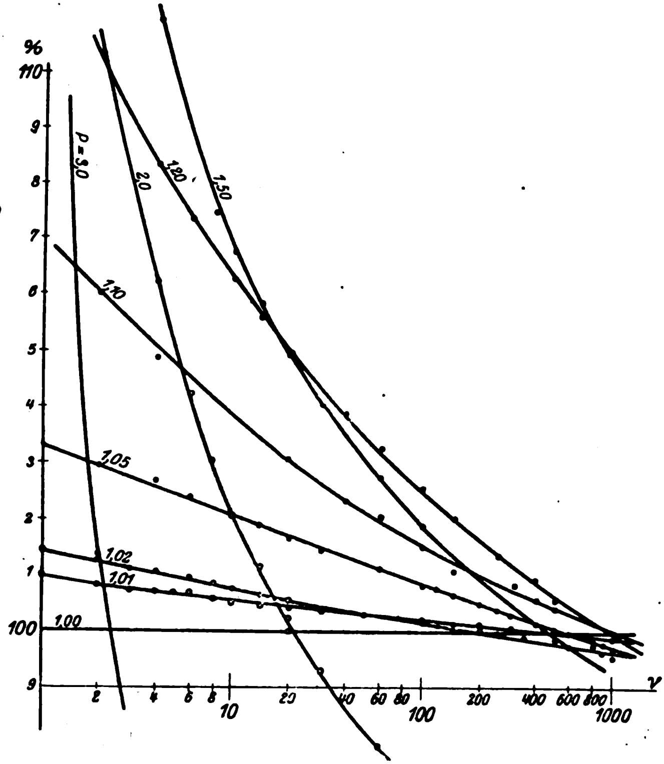


Abb. 27. Anpassungskurven nach verschieden kräftiger Polarisierung.

[1]) Ewing, Magnetic Induction in Iron etc.

[2]) Burrows, a. a. O., Bull. Bur. Stand. 4, S. 263, 1908.

schlagspunkte eine vollkommen glatte Linie ziehen. Diese Tatsache deutet darauf hin, daß der Polarisationsprozeß in bezug auf die magnetischen Eigenschaften des Ferromagnetikums ein definierter Vorgang ist. Es ist auch sehr verständlich, daß die Einwirkung des Feldes P nicht früher vollständig sein kann, als bis sich die von P hervorgerufenen Anpassungserscheinungen praktisch abgespielt haben.

Bei den oben beschriebenen Messungen über den Polarisationseffekt wurde stets der vollständig polarisierte Zustand angestrebt, und als Kriterium der Vollständigkeit wurde angesehen, daß sich die AK nicht spaltet.

Einfach polarisierter Zustand. Die AK gehört in diesem Falle zum Typus I, Abb. 26, und fällt im allgemeinen um so steiler ab, je größer der Unterschied zwischen der polarisierenden Feldstärke P und der Feldstärke H ist, bei der gemessen wird. Der gesamte Abfall ist bei kleinem H sehr klein, wird aber in der Gegend der Maximalpermeabilität erheblich und ist noch bei ziemlich großen Induktionen, wo der Polarisationseffekt schon unmerklich klein geworden ist, zu beobachten.

Die Abb. 27 stellt in prozentualer Darstellung ($B_0 = 100\,\%$) AK-Kurven bei $H = 1{,}0$ und verschieden großem P dar. Sie zeigt sehr schön die Übergänge zwischen den beiden Grenzen, sehr großem P und $P = 1$, in welch letztem Falle die AK offenbar mit der Geraden $B = B_0$ identisch sein muß. Bei großen P-Werten liegt die ganze AK unterhalb $B = B_0$ und die Annäherung an die Asymptote erfolgt sehr schnell. Bei kleinerem P liegt die AK dagegen bis zu ziemlich großen ν-Werten oberhalb $B = B_0$, und ein konstanter Ausschlag wird erst nach einer außerordentlich großen Zahl von Umschaltungen erreicht. Die Messung des Polarisationseffektes Z ist darum in der Nähe von $H = P$ sehr schwierig und kann leicht fälschlich zu negativen Z-Werten führen. Die Linien zeigen aber deutlich, daß ein positiver Polarisationseffekt stets vorhanden ist.

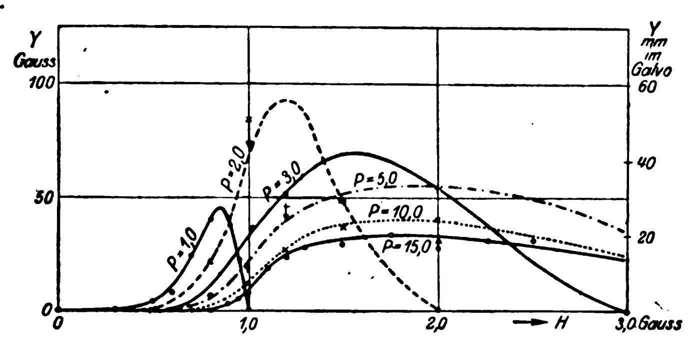


Abb. 28. Verlauf der Größe Y = Abfall der AK von der 200. Umschaltung bis zum extrapolierten Endwert.

Aus praktischen Gründen ist es bei den Messungen über Z notwendig, irgendeine Extrapolationsmethode zu verwenden, um den in Wirklichkeit kaum erreichbaren Endwert der AK annähernd bestimmen zu können. Es wurde darum die AK von $\nu = 200$ bis $\nu = 1000$ beobachtet und die Ausschläge über $1/\sqrt{\nu}$ als Unabhängige aufgetragen. In dieser Darstellung liegen die Punkte der AK genau auf einer Geraden. Die beobachtete Punktreihe kann deshalb geradlinig bis zur Ordinatenachse verlängert werden. Der Achsenabschnitt enspricht $\nu = \infty$, stellt also annähernd den Endwert des Ausschlages dar. Der Berechnung von Z oben wurden solche extrapolierten Werte des Ausschlages zugrunde gelegt.

Die Neigung jener geradlinigen AK charakterisiert den ganzen Anpassungsvorgang und bietet eine Möglichkeit der graphischen Darstellung. In Abb. 28 ist die Abnahme des Ausschlages von $\nu = 200$ bis zum extrapolierten Wert für $\nu = \infty$ als Funktion von H eingetragen, und zwar für verschiedene Werte P ($Y = B_{200} - B_\infty$).

Abb. 29 zeigt in prozentualem Maßstabe ($B_0 = 100\,\%$) die y-Kurve für $P = 15$. Als Unabhängige ist hier der H entsprechende Wert der Normalinduktion, B_0, gewählt und zum Vergleich ist noch die Kurve $z_{15} = f(B_0)$ eingetragen. Die Neigung der AK und die Verschiebung ihrer Asymptote erreichen in verschiedenen Induktionsgebieten ihre Höchstwerte.



In Übereinstimmung mit der oben entwickelten Anschauungsweise kann man sich denken, daß von einem gewissen Feldstärkenwert ab die unsymmetrische Messungsschleife unstabil wird. Bei wiederholtem Kommutieren sinkt die kleine Hystereseschleife gegen den Anfangspunkt, d. h. der Zustand wird immer mehr symmetrisch und der Betrag von z wird daher sehr klein.

Doppelte Polarisierung, P, Q. Eine bis in alle Einzelheiten gehende Untersuchung der ziemlich verwickelten Anpassungserscheinungen nach komplizierterer magnetischer Behandlung hat für die Technik wenig Interesse. Eine kurze Übersicht dürfte aber von Interesse sein, insofern die AKK darüber Aufschluß geben, wie die vorhergehende Messung die Ergebnisse der nächstfolgenden beeinflussen kann.

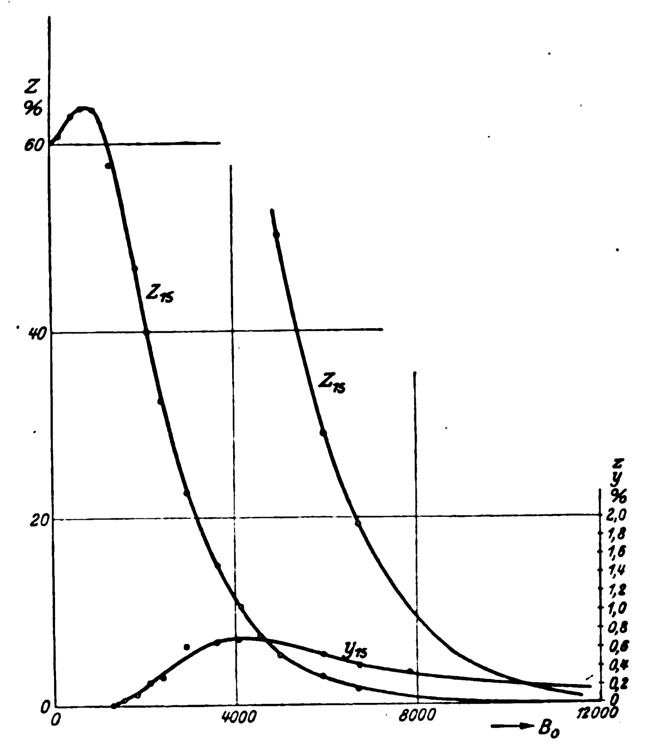


Abb. 29. Die Größe z_{15} als Funktion von der Normalinduktion B_0. Daneben sind y_{15} (d. h. Y_{15}/B_0 in $^0/_0$) und ein Teil von z_{15} in zehnmal größerem Maßstab eingetragen.

Es lassen sich entsprechende Fälle wie oben bei den Polarisationserscheinungen unterscheiden.

1. $Q > P$: je vollständiger die Polarisierung war, um so mehr geht die AK_{PQ} in die AK_Q über.

2. $P > Q > H$: Eine besondere AK vom Typus I entsteht, deren Asymptote dem Z_{PQ} entspricht. In den Fällen 1 und 2 verlaufen die AKK nach demselben einfachen Gesetze

$\alpha = \alpha_\infty + \frac{k}{\sqrt{\nu}}$ als bei Einfachpolarisierung.

Es lassen sich auch hier im Sinne der Abb. 7 zwei Kurven AK′ und AK″ unterscheiden, die aber fast genau kongruent sind.

3. $P > H > Q$: Wir wissen schon, daß die Asymptote der AK durch die Behandlung mit $Q < H$ nicht beeinflußt wird. Das Aussehen der AK, besonders bei kleinerem ν, wird aber ein völlig verschiedenes. Die AK kann nach sämtlichen Typen I, II und III verlaufen, je nach Größe von Q und Vollständigkeit der zweiten Polarisierung. Wenn die obige Extrapolierungsmethode verwendet werden soll, kann man also nicht mehrere Messungen mit immer größerem H nach derselben Polarisierung ausführen. Vor jeder Messung muß neu polarisiert werden.

Als Beispiele seien in Abb. 30 die AKK für $H = 1$ mitgeteilt, die nach $P = 2$ und verschiedenen Werten Q gewonnen sind, wenn Q 200 mal umgeschaltet wurde. Abb. 31 veranschaulicht den Einfluß der Vergrößerung der Zahl, N, der Umschaltungen von Q, wo $Q = 0{,}95$ gewählt ist.

Allgemein läßt sich sagen: Die AK_{PQ} nähert sich asymptotisch der AK_P, wobei die durch Q hervorgerufene Störung sich bis zu immer größeren ν-Werten bemerkbar macht, je vollständiger die Einwirkung von Q gewesen ist.

5. Entpolarisierung.

Kennzeichen des Normalzustandes. Wir haben früher gefunden, daß für den entpolarisierten Normalzustand die Bedingung Remanenz = 0 zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist. Wir haben weiter gesehen, daß der Normalzustand sich viel besser durch die Bedingung $Z \equiv 0$ charakterisieren läßt, und wir haben gewisse allgemeine Forderungen aufstellen können, die erfüllt sein müssen, damit der Entpolarisierungsprozeß zu einer vollständigen Normalisierung führe. Wir wollen nun zuletzt unser neuerworbenes Untersuchungsmittel: Beobachtung der Anpassungsvorgänge, anwenden, um eine endgültige Antwort der Frage zu suchen: Wie kann der Normalzustand experimentell erreicht und nachgewiesen werden?

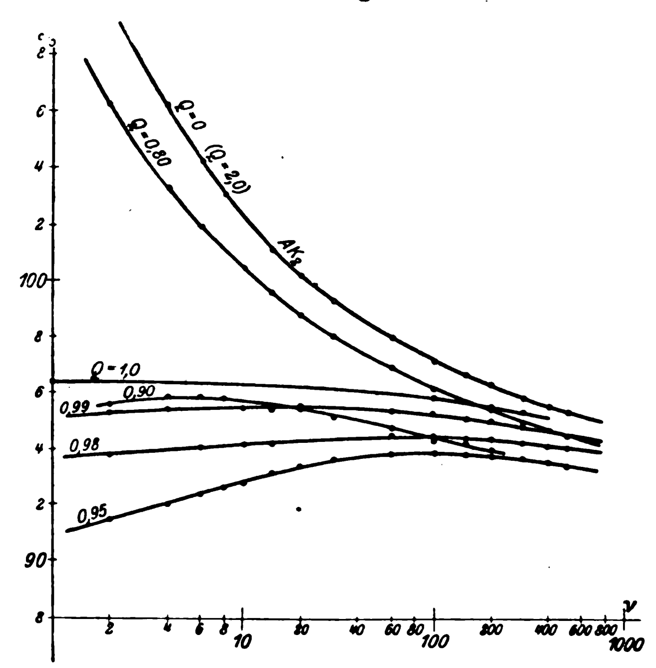


Abb. 30. Anpassungskurven nach doppelter Polarisierung; Q jedesmal 200mal umgeschaltet.

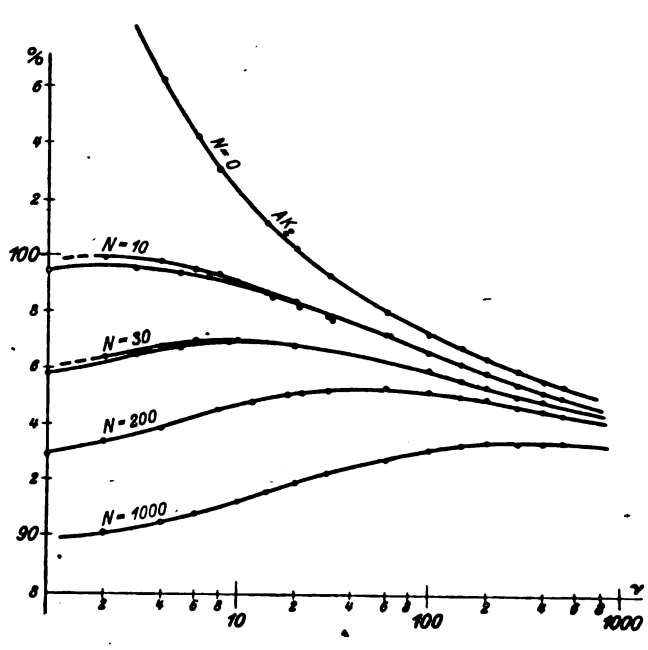


Abb. 31. Anpassungskurven nach immer vollständigerer zweiter Polarisierung.

Frühere Entpolarisierungsverfahren. Von früheren Forschern wurde für die Entmagnetisierung „zerhackter" Gleichstrom benutzt, welcher für jede Umschaltung ein wenig verkleinert wurde. Die Anzahl der Stufen wurde ziemlich willkürlich gewählt, aber man wußte schon, daß die obere und untere Grenzfeldstärke unsere obigen Bedingungen erfüllen mußten.

Später, als die Wechselströme immer mehr angewandt wurden, ging man der Einfachheit halber fast allgemein zur Entpolarisierung mit Wechselstrom über. In der Phys.-Techn. Reichsanstalt hat man den Entmagnetisierungsprozeß dadurch zu verbessern versucht, daß man den Strom nicht durch Einschalten von Widerständen verkleinerte, wobei kleine Sprünge fast unvermeidlich sind, sondern durch allmähliches Auseinanderziehen eines besonderen Entmagnetisierungstransformators [1]), dessen sekundäre EMK dadurch vollständig sprungfrei bis 0 hinunterreguliert werden konnte.

In der amerikanischen Meßpraxis hat sich eine andere Methode eingebürgert, welche von Burrows in der schon mehrmals erwähnten Arbeit [2]) angegeben wurde.

[1]) Gumlich und Rogowski, Arch. f. Elektrot. 4, S. 153, 1915.
[2]) Burrows, a. a. O., Bull. Bur. Stand. 4, S. 205, 1908.

Burrows ist der Meinung, daß eine Entmagnetisierung mit WS immer mangelhaft werden müsse und daß eine vollständige Normalisierung des Eisens erst durch Gleichstromentpolarisierung zu erreichen sei. Er fand nämlich nach Polarisierung und WS-Entpolarisierung einen kleineren Wert der Permeabilität als nach GS-Entpolarisierung, und zwar einen um so kleineren, je höher die Frequenz des verwendeten Stromes war. Dies wurde sowohl bei massiven als bei lamellierten Proben beobachtet. Burrows faßt diese Permeabilitätserniedrigung als einen bleibenden Polarisationseffekt auf und meint, daß wegen der allzu schnellen Variationen des Stromes das Eisen einer WS-Entpolarisierung nie folgen könne und daß darum immer ein Rest von Polarisation bleiben müsse. Er empfiehlt daher die Verwendung von GS, welcher in Zeitabschnitten von 1 Sek. umgeschaltet und dabei in nur 90 Stufen verkleinert wird, und zwar so, daß die höchste Feldstärke größer als die „kritische" Feldstärke ist und die kleinste unterhalb derjenigen Feldstärke liegt, bei der gemessen werden soll. Die B-Stufen sollten gleich groß gemacht werden.

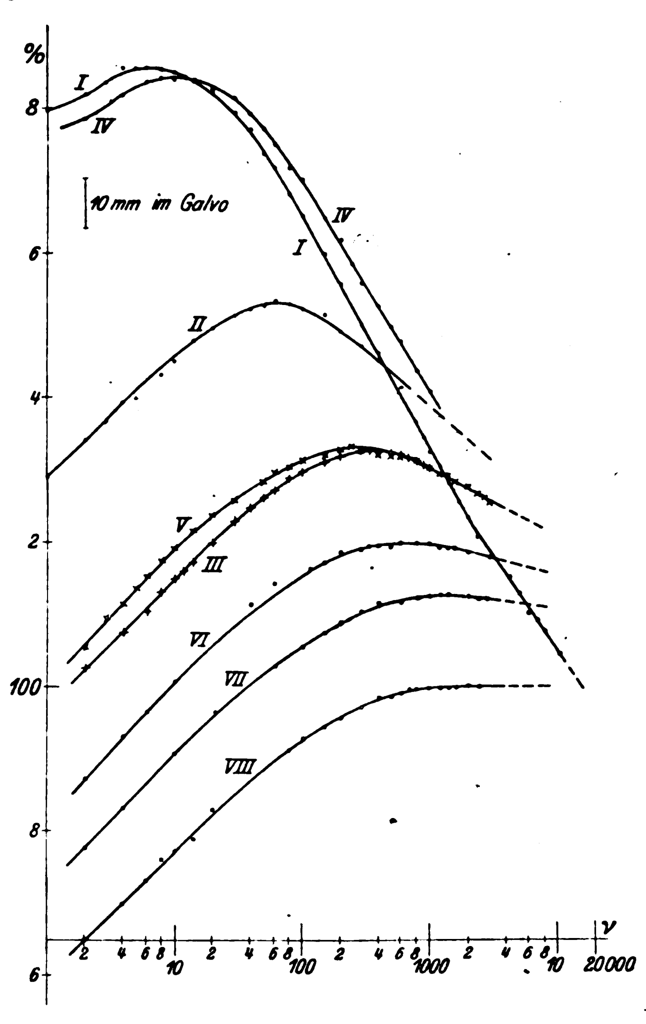


Abb. 32. Anpassungskurven nach immer vollständigerer Entpolarisierung.

GS-Entpolarisierung. Es wurde eine Reihe Beobachtungen der AK für $H = 1$ nach Entpolarisierung ausgeführt. Ich habe zum Entpolarisieren Gleichstrom benutzt, welche sehr langsam — in Zeitabschnitten von 1.5 Sek. — kommutiert wurde. Diese Arbeitsweise wurde gewählt, um etwaige Verzerrungen der Resultate durch Viskositätserscheinungen im Burrowsschen Sinne auszuschließen. Durch Einschalten von Widerständen wurde die Feldstärke stufenweise von 20 bis 0,5 Gauß geschwächt. Die AK nach Entpolarisierung in 200, 500 und 10000 Stufen sind in Abb. 32, I, II bzw. III wiedergegeben.

Die Kurven zeigen sämtlich den von Burrows beobachteten Verlauf des Typus II: Der Ausschlag erreicht einen Maximalwert und fällt dann wieder ab. Je kleiner die Stufen bei der Entpolarisierung waren, d. h. je besser die Entpolarisation ist, um so weiter rückt das Maximum gegen höhere Werte von ν hinaus, um so flacher bildet es sich aus und um so kleiner ist sein Höchstwert. Bei vollständig entpolarisiertem Eisen muß das Maximum offenbar in eine Asymptote übergehen. — Die gewonnene Entpolarisierung muß aber noch bei 10000 Stufen ziemlich mangelhaft sein.

WS-Entpolarisierung. Um eine noch wirksamere Entpolarisierung praktisch ausführen zu können, wurde zu WS gegriffen. Durch das große Entgegenkommen des Vorstandes der magnetischen Abteilung der Phys.-Techn. Reichsanstalt, des

Prof. Dr. E. Gumlich, wurde es mir ermöglicht, vergleichende Versuche mit dem erwähnten Entmagnetisierungstransformator ausführen zu können, wofür es mir an dieser Stelle gestattet sei, Herrn Gumlich meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Mit dem Transformator wurden Entpolarisierungen mit WS der Frequenz 50 gemacht, aber bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Schwächung der Sekundärspannung. (Der Ring war mit seiner Primärwicklung direkt an den Sekundärklemmen des Transformators angeschlossen.) Einmal dauerte die ganze Entpolarisierung ungefähr 0,5 Min., das zweite Mal etwa 5 Min. Die beiden nachher erhaltenen AKK finden sich in Abb. 32 als IV bzw. V.

Die Kurven stimmen zufälligerweise fast genau mit je einer der bei GS-Entpolarisierung erhaltenen Kurven I und III überein. Die Entpolarisierung mit WS der Frequenz 50 erweist sich hiermit der GS-Entpolarisierung vollkommen gleichwertig.

Mit WS wurde in 5 Min. erreicht, was mit GS Stunden und Stunden erforderte. Die Entpolarisation ist aber bei weitem noch nicht vollständig. Um eine noch langsamere Schwächung des Stromes zu erzielen, wurde ein kleiner Generator von 50 ∼ verwendet, dessen Erregung durch langsames Einschalten von Widerständen geschwächt wurde. (Die Remanenzspannung war sehr klein.) Die Entpolarisierung dauerte etwa 15 Min., danach wurde AK VI aufgenommen.

AK VII ist nach einer noch langsameren Entpolarisierung erhalten. Derselbe Generator wurde verwendet, sein Erregerstrom wurde aber einem kleinen Motorgenerator entnommen, dessen Geschwindigkeit durch Einschalten von Reihenwiderständen in 212 gleich großen Stufen während 35 Min. bis Stillstand herunterreguliert wurde. Der Probering wurde ohne jeden Reihenwiderstand, aber unter Zwischenschaltung einer als kleiner Transformator mit Übersetzung 5 : 1 geschalteten Drosselspule an die Klemmen des Generators angeschlossen. Durch diese Maßnahmen wurde erzielt, daß die Induktion im Proberinge mit der Zeit fast genau linear abnahm, so daß die Stufen in B merklich gleich groß wurden.

Das Maximum der AK rückt immer weiter ins Unendliche hinaus und wird immer flacher und niedriger, aber die erwartete Asymptote ist noch nicht erreicht.

Um die Entpolarisierung in noch mehr Stufen einteilen zu können, wurde deshalb wiederum auf Widerstände zurückgegriffen. Mittels eines Dekadenrheostaten von $3 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 \times 1 + 3 \times 10 \times 0{,}1$ Ohm wurden bei $120\sqrt{2}$ Volt Magnetisierungsspannung 900 Ohm in Stufen von 0,1 Ohm derart eingeschaltet, daß die Dekadenstufen einander überlappten.

Die Feldstärke wurde dabei von 18 bis 0,85 Gauß variiert. Wegen der Ähnlichkeit der B_0 — H-Kurve mit einer Hyperbel werden die B-Stufen bei konstanten R-Stufen annähernd gleich groß. 0,1 Ohm entsprach somit einer B-Stufe von etwa 0,7 Gauß. Der Widerstand wurde mit einer solchen Geschwindigkeit eingeschaltet, daß etwa 40 halbe Perioden in jeder Stufe verflossen. Der Entmagnetisierungsprozeß nahm also bei 50 Perioden etwa eine Stunde in Anspruch und es wurden 3 bis 400000 „Umschaltungen" gemacht.

Die jetzt erhaltene AK VIII liegt noch erheblich niedriger als VII und es tritt eine Verkleinerung des Ausschlages auch bei $\nu = 3000$ nicht ein. Nach dieser großen „Sorgfalt" beim Entpolarisieren scheint also die Entpolarisation auch dem empfindlichen Kriterium der Anpassungskurve gegenüber vollständig zu sein. Die B_0-Bestimmungen, welche den Polarisationseffektkurven oben zugrunde liegen, sind den Asymptoten der AKK nach dieser Entpolarisierung entnommen.

Mangelhafte und gute Entpolarisierung. War die Entmagnetisierung mangelhaft, so gibt es überhaupt keinen praktisch erreichbaren Wert des Ausschlages, welcher für eine objektive Bestimmung der Permeabilität verwendet werden kann. Die AK I ist bis zu $\nu = 10\,000$ beobachtet. Man kann aber in diesem Gebiete noch kaum eine



Krümmung entdecken, die eine Annäherung an den doch notwendigerweise vorhandenen stabilen Asymptotenwert des Ausschlages andeutet.

Beobachtungen, die auf solche bis ins Unendliche langsam verlaufende Anpassungserscheinungen hindeuten, sind bereits früher gemacht worden. So hat mir Herr Dr. Schering von der Phys.-Techn. Reichsanstalt freundlichst mitgeteilt, daß er bei Messungen an Stromwandlern häufig Nachkriechungen der Nulleinstellung hat feststellen können, die mehrere Minuten dauerten. Ebenfalls hat mir Herr Dr. Kühn, Berlin, erzählt, daß er bisweilen bei Induktivitätsmessungen an Eisenringen die endgültigen Ablesungen erst nach 15 Minuten machen konnte. Diese Messungen wurden bei der Frequenz 500 ausgeführt. Die Permeabilität ist also dabei erst nach etwa 1 Million Polwechseln konstant geworden. Dies steht mit der AK I in vollem Einklang.

Es mag an dieser Stelle nochmals hervorgehoben werden, wie wichtig es ist, daß beim Aufzeichnen der AKK die logarithmische Darstellungsweise gewählt wird. Ein linearer Maßstab führt leicht zu dem falschen Schlusse, eine Asymptote sei schon nach ein paar hundert Umschaltungen erreicht.

Werden die Widerstände in derselben Weise eingeschaltet, so erhält man offenbar eine um so bessere Entpolarisierung und einen um so niedrigeren Maximalwert der AK, je höher die Periodenzahl des Entpolarisierungsstromes ist. Vielleicht wäre es möglich, daß diese Tatsachen den Burrowsschen Schlüssen zugrunde liegen, die WS-Entpolarisierung sei immer unvollständig.

Diese neuen Messungen zeigen dagegen, daß die WS-Entpolarisierung es mit der GS-Entpolarisierung nicht nur aufnehmen kann; vielmehr dürfte in der Praxis die WS überhaupt die einzig verwendbare sein.

Die Kurven scheinen darauf hinzudeuten, daß es nicht die Hauptsache ist, daß die Entpolarisierung ohne Sprünge vor sich geht. Es ist offenbar ebenso wichtig, daß bei jeder Stufe mehrere Perioden verfließen dürfen, so daß das Eisen sich den neuen Verhältnissen anpassen kann: Kurve VIII, wo die Stufen etwa 0,7 Gauß betrugen, dafür aber in jeder Stufe etwa 40 mal umgeschaltet wurde, zeigt eine entschieden bessere Entpolarisation als die AK VII, wo keine Sprünge, auch nicht von dieser Größenordnung gemacht wurden, sondern die Induktion bei jeder Ummagnetisierung um etwa 0,05 Gauß verkleinert wurde.

Werden die Beobachtungen der AK nach mangelhafter Entpolarisierung von $H = 1$ auf kleinere und größere Feldstärken ausgedehnt, so findet man, daß die Anpassungslinien ihren Charakter völlig beibehalten und daß sie ihre Maxima nach genau derselben Zahl Umschaltungen erreichen. Dies trifft aber nur zu, wenn die Entpolarisation gleichmäßig erfolgte, d. h. wenn über das ganze Gebiet die Stufen von B einigermaßen gleich gemacht wurden. Wurden z. B. bei der Entpolarisierung zwei in Reihe geschaltete Schieberwiderstände verschiedener Arten verwendet und nimmt man nachher eine Reihe AKK für sukzessive H-Werte auf, so lassen sich aus der Lage der Maxima die Stufen des Entpolarisierungsprozesses deutlich ablesen.

Wegen dieser Gleichförmigkeit der AKK läßt sich eine gewisse (gleichförmige) Entmagnetisierungsmethode auf ihre Effektivität einfach dadurch prüfen, daß die AK bei einem einzigen Feldstärkenwerte beobachtet wird, welcher zweckmäßig in derjenigen Gegend gewählt wird, wo die Anpassungserscheinungen am stärksten hervortreten.

Für größere Feldstärken sind die Anpassungserscheinungen ebenso wie die Polarisationseffekte, in Gauß gemessen, sehr klein, prozentual erst recht. Bei Messungen im Gebiet der abfallenden Permeabilität braucht man sich deshalb auch bei ziemlich großen Ansprüchen an Genauigkeit kaum mit der Frage der Vollständigkeit der Entpolarisierung oder mit einer Entpolarisierung überhaupt zu beschäftigen. Im Gebiet unterhalb der Maximalpermeabilität können aber, wie Abb. 32 zeigt, durch mangelhafte Entmagnetisierung, und wenn man die Anpassungserscheinungen nicht beachtet, sehr leicht Fehler von mehreren v. H. entstehen.



Anpassung nach teilweiser Entpolarisierung. Wenn die Entpolarisierung zwar nicht mangelhaft war, aber das Eisen nur teilweise entpolarisiert wurde, weil die höchste verwendete Feldstärke zu klein war, so geschieht die Anpassung nach vollständig ähnlichen AKK von Typus III, Abb. 26, die aber — dem in diesem Falle bleibenden Polarisationseffekt entsprechend — niedrigere Asymptoten haben als die AK für vollständige Entpolarisierung.

Das Kriterium der AK sagt also nichts darüber aus, ob die Entpolarisierung etwa eine teilweise war, sondern nur, ob sie mangelhaft ausgeführt wurde oder nicht.

6. Schlußbemerkungen.

Nebenerscheinungen. Außer den Polarisations- und Anpassungserscheinungen gibt es eine Reihe anderer Umstände, welche das Ergebnis einer Permeabilitätsmessung beeinflussen können.

Temperatur. Am wichtigsten scheinen die Temperatureinflüsse zu sein. Eine Temperaturveränderung von 1^0 gibt zu einer Permeabilitätsveränderung von einigen Promille Anlaß — Größe und sogar Richtung von dem Temperaturkoeffizienten hängt bekanntlich von der Induktion ab. Alle beschriebenen Messungen sind daher bei derselben — bis auf 1^0 oder 2^0 konstant gehaltenen — Temperatur ausgeführt. Es erwies sich als sehr wichtig, daß bei den langwierigen Entpolarisierungsprozessen für gute Kühlung der Probe gesorgt wird. Sonst wird die Entpolarisierung oft von einer Art Wärmebehandlung begleitet, welche durchgreifende Veränderungen der magnetischen Eigenschaften der Probe herbeiführen kann.

Reproduzierbarkeit. Dies hängt mit der Frage der Reproduzierbarkeit zusammen. Kleinere Temperaturänderungen rufen zwar irreversible Zustandsänderungen hervor, aber es scheint, als ob ihre Einwirkung von einer kräftigen Polarisation wieder verwischt werden könne. Während der Normalzustand vor allen Dingen bei niedriger Induktion ziemlich schwer wiederherzustellen ist, und die Normalpermeabilität von Temperaturveränderungen und anderen Umständen sehr abhängig ist, zeigte es sich im Laufe der Untersuchung, daß der polarisierte Zustand eben in dem empfindlichen Bereiche unterhalb der Feldstärke der maximalen Permeabilität sich aufs genaueste reproduzieren läßt. Es wurden zwecks Messung der Z_5 und Z_{15} verschiedene AKK nach Polarisierung mit 5 und 15 Gauß aufgenommen, zwischen deren Beobachtung Monate von Messen und intensiver magnetischer Behandlung aller Art lagen. Die Veränderung des Ausschlages im Laufe der Anpassung betrug dabei mehrere v. H., aber die Einzelausschläge der verschiedenen Anpassungskurven stimmten größtenteils bis auf Promille überein.

Viskosität. Die Größe des Einzelausschlages unterliegt noch einem gewissen Zeiteinfluß, welcher mit den Nachkriechungserscheinungen zusammenhängt. Wenn diejenige Umschaltung, bei welcher der Ausschlag abgelesen wird, unmittelbar einer anderen Umschaltung folgt, erhält man im allgemeinen einen kleineren Wert des Ausschlages als nach einigen Sekunden Zögerns. Bei dem untersuchten Material handelte es sich dabei nur um äußerst kleine Beträge — Bruchteile von Promille.

Eine Einwirkung auf die Form der AK[1]) von der Umschaltefrequenz habe ich nicht beobachten können. Wenn z. B. die ersten paar hundert Umschaltungen mit größerer Geschwindigkeit erfolgten und erst dann das Messen beginnt, erhält man wenigstens bis zu 10 Umschaltungen in der Sekunde dieselbe Anpassungskurve, als wenn die ganze AK langsam aufgenommen wurde. Dank dieses Umstandes gehen die Messungen ziemlich schnell, auch wenn es nach Entpolarisierung Tausender von

[1]) Burrows, a. a. O., Bull. Bur. Stand. 4, S. 205, 1908.



Umschaltungen bedarf, bis der Ausschlag seinen konstanten Wert erreicht. Man muß nur bei der Wahl der Magnetisierungsspannung darauf achten, daß der Strom zwischen zwei Umschaltungen seinen vollen Wert erreicht. Sonst werden die AKK bei hoher Umschaltegeschwindigkeit verzerrt, was zu dem falschen Schlusse verführen kann, daß die Viskosität eine merkbare Einwirkung habe.

Die vorstehende Arbeit wurde teils in Berlin, teils in Stockholm in den elektrotechnischen Instituten der Technischen Hochschulen ausgeführt. Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Orlich in Berlin, sowie Herrn Prof. Dr. Pleijel in Stockholm meinen verbindlichsten Dank dafür aussprechen, daß sie mir die Mittel ihrer Institute zur Verfügung gestellt haben, und für das freundliche Interesse, mit dem sie meiner Arbeit stets entgegengekommen sind.

Über die Hystereseverluste bei linearer Ummagnetisierung durch Gleich- und Wechselstrom.

Von

L. Dreyfus, Berlin-Niederschönhausen.

Es ist in der Praxis üblich, die gesamten Eisenverluste bei linearer Wechselstrommagnetisierung in zwei Summanden aufzulösen, von denen der erste proportional der Periodenzahl (ν), der zweite mit dem Quadrate der Periodenzahl (ν^2) zunimmt. Daß diese Verlusttrennung prinzipiell zulässig ist, haben unzählige Versuche bewiesen; dagegen kann man über die Interpretation der beiden Verlustglieder sehr wohl im Zweifel sein. Gewöhnlich pflegt man den ersten Summanden als Hystereseverlust, den zweiten Summanden als Wirbelstromverlust anzusprechen.

Dieser Auslegung der Versuchsresultate liegen zwei Annahmen zugrunde:

Einmal die Annahme, daß die dynamische Hystereseschleife mit der statischen Hystereseschleife identisch wird, wenn es gelingt, jede noch so kleine Wirbelstrombildung auszuschließen.

Und sodann die weitere Annahme, daß die Wirbelstromverluste bei technischen Frequenzen mit dem Quadrat der Periodenzahl zunehmen.

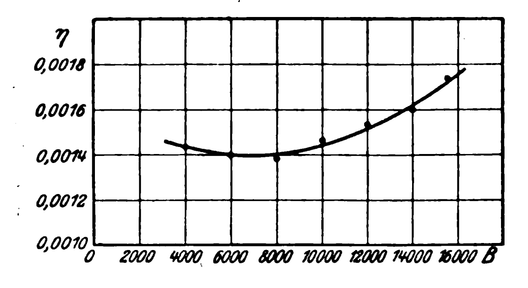
Nur die zweite Annahme ist theoretisch wohlbegründet. Die erste Annahme dagegen ist eine Hypothese. Darf man sich mit dieser Hypothese zufrieden geben?

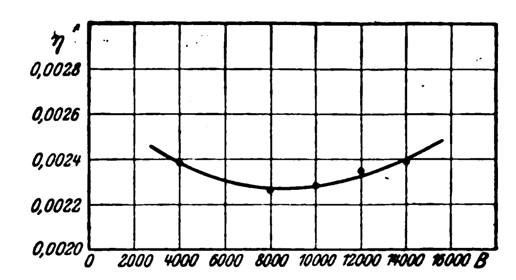
Darauf sollte die Antwort eigentlich so lauten: Die Wirbelstromverluste sind berechenbar, wenn man die elektrische Leitfähigkeit des Materials kennt; und die Verlustformel ist zuverlässig, solange die Rückwirkung der Wirbelströme auf die Verteilung der Induktion über den Blechquerschnitt vernachlässigt werden kann. Das ist bei technischen Frequenzen und den üblichen Blechstärken der Fall. Wenn also der ν^2 proportionale Anteil der Eisenverluste mit den theoretischen Wirbelstromverlusten übereinstimmt, so ist die oben angegebene Hypothese gerechtfertigt. Andernfalls ist sie zu verwerfen.

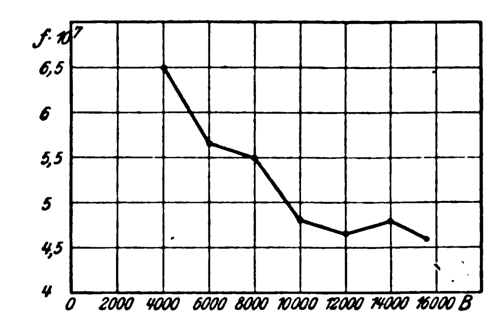
Tatsächlich wird nun der ν^2 proportionale Anteil der Eisenverluste an Ringproben oder im Epsteinapparat stets größer gemessen als die theoretischen Wirbelstromverluste. Aber eigentümlicherweise hat man daraus nicht die oben befürwortete Konsequenz gezogen, sondern gerade umgekehrt die Formel für die Wirbelstromverluste verworfen.



So Uppenborns Kalender, der S. 60, Jahrgang 1915 erklärt: „die Regel stimme ziemlich schlecht mit der Wirklichkeit überein". Selbst nachdem sorgfältige Messungen dargetan hatten, daß der mit ν_{φ}^2 wachsende Anteil höchstwahrscheinlich auch zusätzliche Hystereseverluste enthielte, hat man die Formel für die Wirbelstromverluste nicht







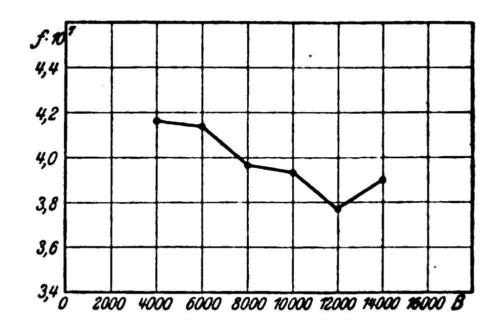
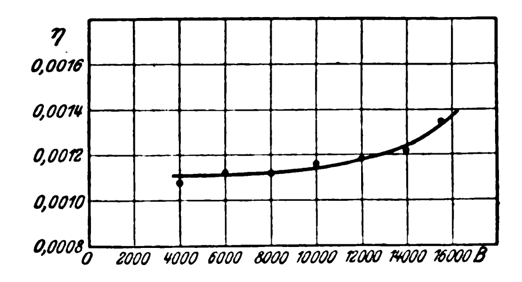


Abb. 1. Hysterese- und (scheinbarer) Wirbelstromkoeffizient für Ring 1.

Abb. 2. Hysterese- und (scheinbarer) Wirbelstromkoeffizient für Ring 2.



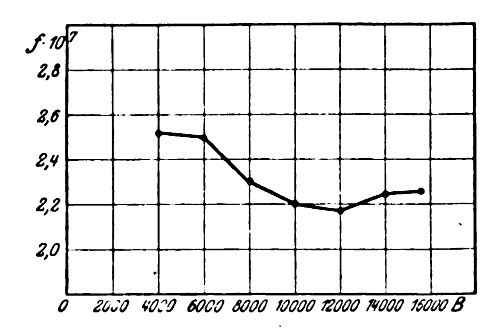
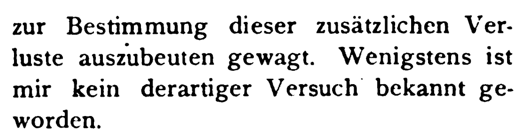


Abb. 3. Hysterese- und (scheinbarer) Wirbelstromkoeffizient für Ring 4.


zur Bestimmung dieser zusätzlichen Verluste auszubeuten gewagt. Wenigstens ist mir kein derartiger Versuch bekannt geworden.

Ich möchte nun zeigen, was bei einem derartigen Versuch herauskommt. Dabei stütze ich mich auf eine experimentelle Arbeit von Gumlich und Rose [1]), deren Zuverlässigkeit unter allen veröffentlichten Untersuchungen wohl am höchsten steht. Gumlich und Rose untersuchten mehrere Ringproben, die sie in ihrer Veröffentlichung mit den Nummern 1, 2 und 4 bezeichneten. Sie bestanden aus 0,5 mm starken Blechen und wogen je 10 kg. Bezüglich der Permeabilität waren die Ringe 1 und 4 annähernd gleichwertig, Ring 2 dagegen entschieden minderwertig. Der elektrische Widerstand ϱ und die elektrische Leitfähigkeit λ pro m Länge und mm^2 Querschnitt betrugen für

[1]) ETZ 1905, S. 503 über die Magnetisierung durch Gleichstrom und durch Wechselstrom.



Ring 1	$\varrho = 0{,}12$ Ohm	$\lambda = 8{,}33 \frac{1}{\text{Ohm}}$
„ 2	$\varrho = 0{,}14$ „	$\lambda = 7{,}15$ „
„ 4	$\varrho = 0{,}38$ „	$\lambda = 2{,}63$ „

Bei der Auswertung ihrer Versuche leitete die beiden Autoren der Ansatz für die spezifischen Gesamtverluste

$$\frac{V}{cm^3} = \nu \cdot \eta \cdot B^{1,6} + \nu^2 \cdot f \cdot B^2 \ldots \frac{\text{Erg}}{\text{sec}}.$$

Für den Hystereseverlust bei sehr niedriger Periodenzahl (erstes Glied) wurde also das Steinmetzsche Näherungsgesetz zugrunde gelegt. Da man unter dem zweiten Gliede zunächst nur Wirbelstromverluste vermutete, setzte man es — wie die Theorie verlangt — proportional dem Quadrate der Induktion. Daraus ergaben sich dann für den Hysteresekoeffizient η und den scheinbaren Wirbelstromkoeffizient f die in Abb. 1 bis 3 abgebildeten Kurven. Wie nicht anders zu erwarten, stimmte der Koeffizient η für Gleichstrom- und Wechselstrommagnetisierung überein. Dagegen zeigt der scheinbare Wirbelstromkoeffizient ein eigentümliches Verhalten. Er nimmt mit steigender Induktion ab, ein Zeichen dafür, daß der zweite Summand der Verlustformel in Wirklichkeit langsamer als mit dem Quadrate der Induktion ansteigt. Diese — und scheinbar nur diese — Erscheinung, die auch andere Experimentatoren festgestellt haben, führte Gumlich und Rose zu dem Schluß, daß der zweite Summand neben den Wirbelstromverlusten auch gewisse zusätzliche Hystereseverluste einschlösse. Da aber der Koeffizient f oberhalb B = 12000 wieder merklich konstant wird, folgerten sie, daß die zusätzlichen Hystereseverluste wahrscheinlich nur bei niedrigeren Induktionen auftreten.

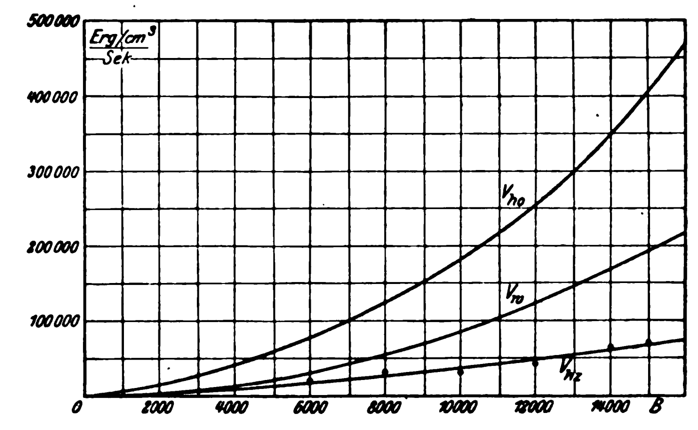


Abb. 4. Trennung der Eisenverluste bei Ring 1. $\nu = 50$, $f_w = 3{,}42$.

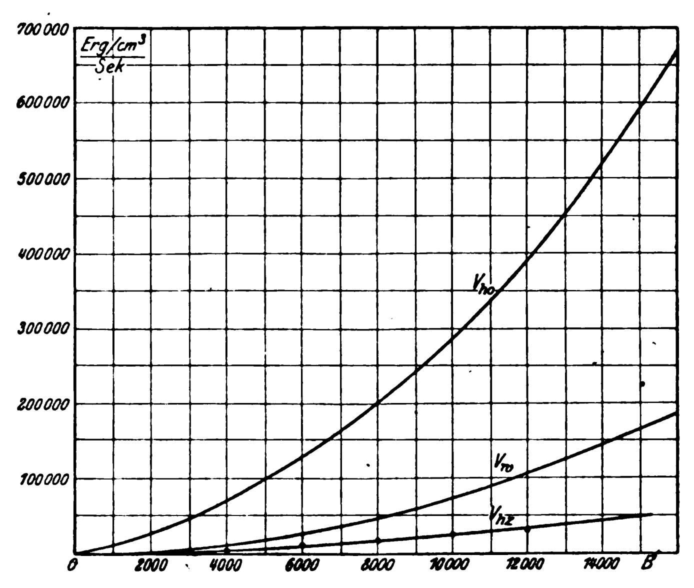


Abb. 5. Trennung der Eisenverluste bei Ring 2. $\nu = 50$, $f_w = 2{,}94$.

Wir wollen nun zusehen, wie sich die Verlustverteilung darstellt, wenn man für die Wirbelstromverluste ihren theoretischen Wert in Anspruch nimmt. Bezeichnet h die Blechstärke in mm, so lautet die Gleichung der Wirbelstromverluste

$$\frac{V_w^{Watt}}{dm^3} = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) \cdot \left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{B}{1000} \cdot h\right)^2$$

oder ausgedrückt in $\frac{Erg/cm^3}{sec}$

$$\frac{V_w}{cm^3} = \left(\pi^2 \cdot \frac{\lambda}{6} \cdot h^2 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \nu^2 \cdot B^2.$$

Der theoretische Wert des Wirbelstromkoeffizienten beträgt also

$$f_w = \pi^2 \cdot \frac{\lambda}{6} \cdot h^2 \cdot 10^{-7}$$

und daraus ergeben sich für die drei Ringe folgende Werte:

Ring 1 $f_w = 3{,}24 \cdot 10^{-7}$
„ 2 $f_w = 2{,}94 \cdot 10^{-7}$
„ 4 $f_w = 1{,}08 \cdot 10^{-7}$.

Man sieht, der theoretische Faktor f_w liegt auch oberhalb $B = 12000$ noch immer tiefer als der experimentell ermittelte Wert f. Für die zusätzlichen Hystereseverluste bleibt so ein Restglied

$$\frac{V_{hz}}{cm^3} = \nu^2 \cdot (f - f_w) \cdot B^2 \ldots \frac{Erg}{sec}.$$

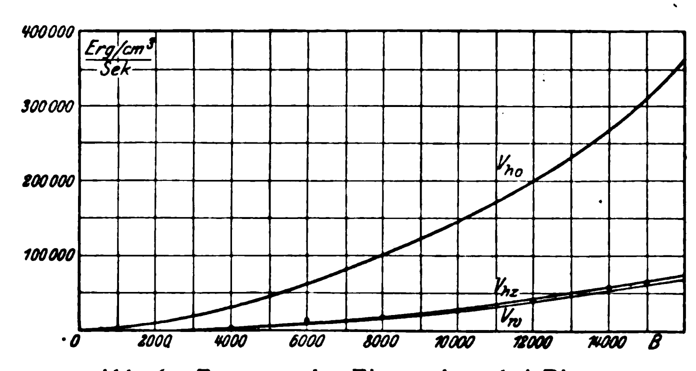


Abb. 6. Trennung der Eisenverluste bei Ring 4. $\nu = 50$, $f_w = 1{,}08$.

Diesen Wert habe ich in den Abb. 4 bis 6 dem normalen Hystereseverlust V_{h_0} bei niedriger Frequenz bzw. Gleichstrom und dem rechnungsmäßigen Wirbelstromverlust V_w gegenübergestellt. Während die Wirbelstromverluste im Verhältnis 1 : 3, die Gleichstrom-Hystereseverluste im Verhältnis 1 : 2 variieren, besitzen die zusätzlichen Hystereseverluste bei allen drei Ringen ungefähr dieselbe Größenordnung. Doch läßt sich natürlich an Hand so weniger Proben kein allgemeines Urteil fällen.

Zusammenfassung. Es wird vorgeschlagen, von den gesamten Eisenverlusten die rechnungsmäßigen Wirbelstromverluste in Abzug zu bringen und den Rest als Hystereseverluste zu betrachten. Dann ergibt sich allerdings gegenüber der Gleichstrommagnetisierung ein zusätzlicher Hystereseverlust, der mit dem Quadrat der Periodenzahl zunimmt. Nachdem aber die experimentell bewiesene Inkonstanz des scheinbaren Wirbelstromkoeffizienten ohnehin zu dieser Annahme zwingt, ist die Bestimmung der zusätzlichen Hystereseverluste auf dem angegebenen Wege wohl die zuverlässigste.

Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Dr.-Ing. W. Rogowski, Charlottenburg
Schriftleitung: i. V. Prof. Dr. E. Orlich, Charlottenburg
Verlag von Julius Springer in Berlin

6. Band | 1917 | 1. u. 2. Heft

Inhaltsverzeichnis. Seite

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden während der Einberufung des Herrn Dr. Rogowski zum Heeresdienst erbeten unter der Adresse: Prof. Dr. E. Orlich, Technische Hochschule, Charlottenburg.

Das **Archiv für Elektrotechnik** erscheint in Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis des Bandes beträgt M. 24,—, für Abonnenten der „Elektrotechnischen Zeitschrift" sowie Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins M. 18,—. Der Bezug kann durch jede Buchhandlung sowie durch unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer
Berlin W 9, Linkstraße 23/24.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.



Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Dr.-Ing. W. Rogowski, Charlottenburg
Schriftleitung: i. V. Prof. Dr. E. Orlich, Charlottenburg
Verlag von Julius Springer in Berlin

6. Band 1918 12. Heft

Inhaltsverzeichnis.

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift“ infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden während der Einberufung des Herrn Dr. Rogowski zum Heeresdienst erbeten unter der Adresse: Prof. Dr. E. Orlich, Technische Hochschule, Charlottenburg.

Das **Archiv für Elektrotechnik** erscheint in Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis des Bandes beträgt M. 24,—, für Abonnenten der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ sowie Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins M. 18,—. Der Bezug kann durch jede Buchhandlung sowie durch unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer
Berlin W 9, Linkstraße 23/24.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

